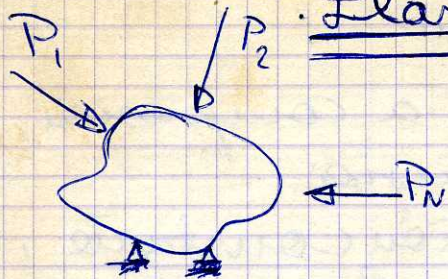


## Elasticidad.



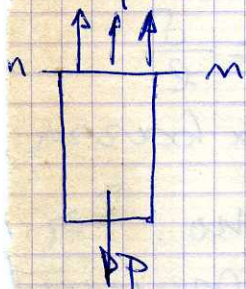
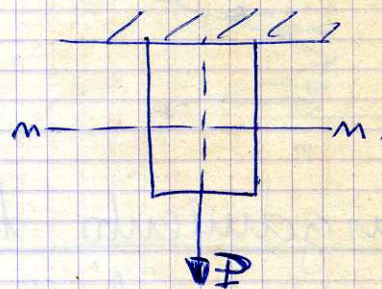
El cuerpo sometido a las fuerzas  $P_1, P_2 - P_n$  se deforma hasta que los esfuerzos internos equilibren a los externos.

Una vez deformado, quitamos las cargas. Entonces puede suceder a) que el cuerpo recobre su estado inicial  $\Rightarrow$  entonces diremos que el cuerpo se comporta elásticamente b) que el cuerpo quede con una cierta deformación; entonces diremos que el cuerpo  $\leftarrow$  (deformación plástica) se comporta elastoplásticamente.

En el caso a) el trabajo realizado por las fuerzas exteriores quedaba almacenado en el cuerpo en forma de energía de deformación. En el caso b), del trabajo realizado por las fuerzas, parte queda almacenado en el cuerpo en forma de energía de deformación y otra parte se pierde en forma de calor.

## Tensión o fatiga.

Actúa en la dirección del eje de la barra. Si la cortamos por la sección  $m-n$  y nos quedamos con la parte de arriba:

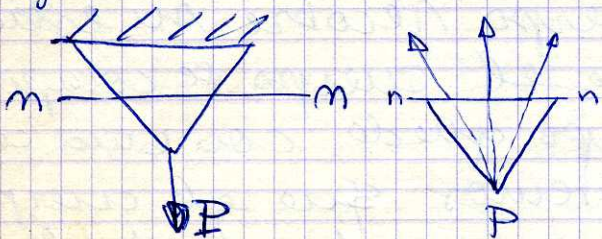


Aparecen unas fuerzas por unidad de superficie, de reparto uniforme cuya resultante  $= P$  para que haya equilibrio. A estas fuerzas por unidad de superficie se les llama tensión o fatiga  $\sigma$ .

$$\sigma = \frac{P}{A} \text{ siendo } A = \text{área de la barra.}$$

Unidades: se usa el  $\text{Kg/cm}^2$

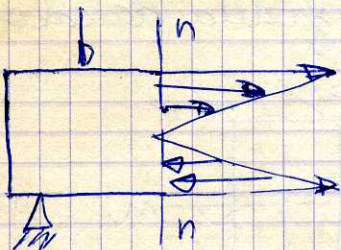
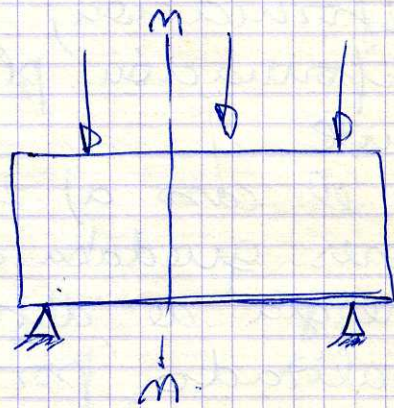
- Si  $P$  hace trabajar a la barra a tracción o extensión la fatiga  $\sigma$  también es de tracción.
- Si  $P$  hace trabajar a la barra a compresión, la fatiga  $\sigma$  es también de compresión.
- Si la barra no tiene sección constante, las fuerzas por unidad de superficie tienen esa forma. La distribución no es uniforme y las fuerzas por unidad de superficie se siguen llamando tensión  $\sigma$ .



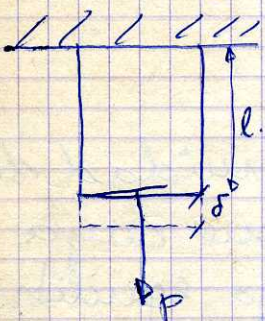
fuerzas por unidad de superficie se siguen llamando tensión  $\sigma$ .

Otro ejemplo de tensiones:

Aparecen fuerzas por unidad de superficie, unas a tracción y otras a compresión. También se llaman tensión  $\sigma$ .



Alargamiento total y unitario de una barra:



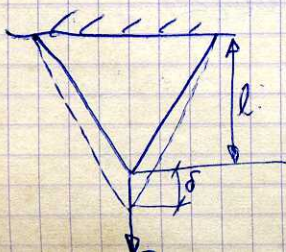
La barra sometida a  $P$  se alarga  $\delta =$  alargamiento total de la barra.

Alargamiento unitario  $\epsilon = \frac{\delta}{l}$

siendo  $l =$  long. primitiva de la barra

A veces  $\epsilon$  tiene sentido y otras no. Por ejemplo, en el caso de barra de sección no uniforme.

$\epsilon = \frac{\delta}{l}$  no tiene sentido, porque no se alarga lo mismo un metro del punto de arriba de la barra que un metro del más abajo.



## Ley de Hooke:

Siempre que  $P$  se mantenga por debajo de cierto límite (llamado límite de proporcionalidad del material) se cumple la siguiente ley:

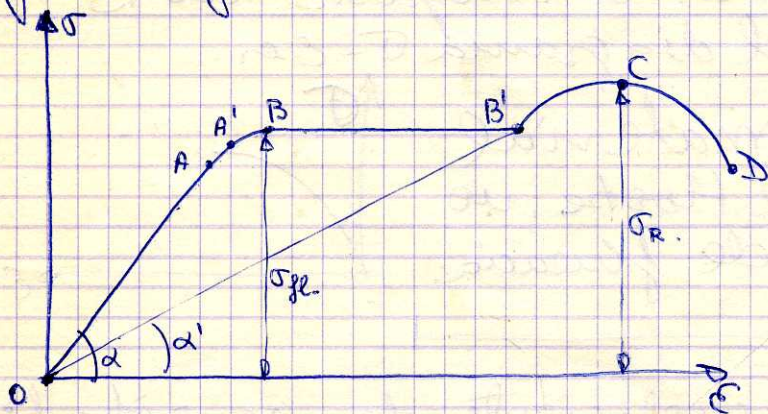
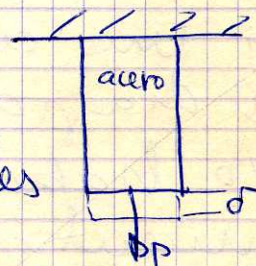
$$\delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E}$$

$P$  = fuerza actuante sobre la barra  
 $l$  = longitud primitiva de la barra  
 $A$  = área de la barra.  
 $E$  = cte llamada módulo de elasticidad del material.

$E \cdot \frac{\delta}{l} = \frac{P}{A}$ ;  $E \cdot \epsilon = \sigma \rightarrow \sigma = E \epsilon$  Hay materiales que no siguen la ley de Hooke. El acero por ejemplo, la sigue pero por debajo de un cierto límite.

## Diagrama $\sigma$ - $\epsilon$ para el acero

Supongamos que  $P$  va creciendo de manera gradual. Si represento en unos ejes tensiones y alargamientos unitarios



Desde O-A, los alargamientos y tensiones son proporcionales. A punto A se le llama límite de proporcionalidad del material. Desde O hasta A se

cumple la ley de Hooke

El pto A' es el límite de elasticidad del material. De O a A' el material se comporta elásticamente.

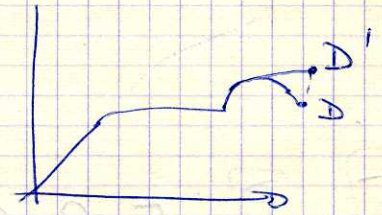
El pto B se llama punto de fluencia y la tensión correspondiente, tensión de fluencia  $\sigma_{ye}$ . Para el acero  $\sigma_{ye} = 24 \text{ kg/cm}^2$

El valor de la tensión de fluencia no es fijo, depende de la velocidad con que se haga el ensayo.

Desde B a B' la barra se alarga sin aumentar la tensión.

- A partir de B' comienza la etapa de endurecimiento del material.
  - A la tensión correspondiente al punto C se llama tensión de rotura  $\sigma_R$ .
  - El material se rompe en el punto D.
- NOTA: A es el área primitiva de la barra; a medida que se alarga la barra, su sección va disminuyendo. Si tomara  $\sigma = \frac{P}{\text{Área en cada instante}}$  el

diagrama  $\sigma, \epsilon$  sería así y el material se habría roto en D' y no en D.



$$t_s \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon}; \boxed{t_s \alpha = E} = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Uniendo O con B', la  $t_s \alpha' = E' \rightarrow$  módulo de endurecimiento del material.

Si un cuerpo fuera elastoplástico perfecto el diagrama sería.

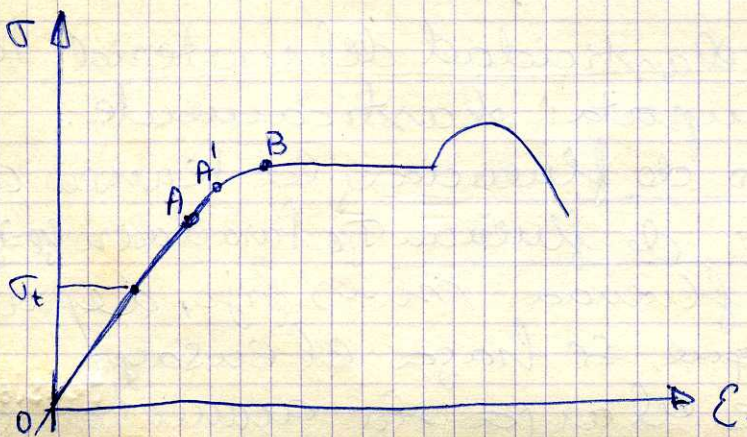


No habría etapa de endurecimiento y el material se rompería en B. Para la fundición el diagrama  $\sigma - \epsilon$  es.

Prácticamente este material no sigue la ley de Hooke, no tiene pto. mínima de fluencia.



### Fatiga de trabajo y coeficiente de seguridad:



El diagrama  $\sigma - \epsilon$  es: Desde O a A' el comportamiento del material se comporta elásticamente. Siempre vamos a hacer trabajar el material en la zona elástica para no producir

circulo ninguna deformación permanente,  $\sigma$   
 sea, por ejemplo a una  $\sigma_t$  dentro de la zona OA!  
 A  $\sigma_t$  se le llama fusión de trabajo.  
 Para el acero y en elasticidad,  $\sigma_t = \frac{\sigma_{fl}}{n}$  de fluencia

A  $n$  se le llama coeficiente de seguridad. y para el acero  $n=2$

Por tanto:  $\sigma_t = \frac{2.400}{2} = 1.200 \text{ Kg/cm}^2$

En plasticidad, la tensión de trabajo para el acero es  $\sigma_t = \frac{\sigma_R}{n_1}$  de rotura.

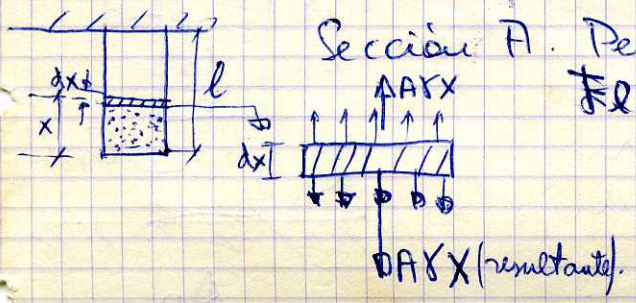
$n_1$ : coef. de seguridad frente a rotura.

En materiales frágiles se toma  $\sigma_t = \frac{\sigma_R}{n_1}$ , igual que en plasticidad. Por ejemplo en el  $n_1$  hormigón  $n_1=3$ .

Factores de que depende el coef. de seguridad:

- a) Del tipo de material
- b) Del tipo de cargas que actúan. Si son estáticas, el coef. de seguridad es menor que si son dinámicas
- c) De la homogeneidad del material
- d) Del estudio riguroso que se haya hecho de la estructura. Si al estudiar la estructura he tenido en cuenta las posibles sobrecargas que pueda tener, adoptaré un coeficiente de seguridad menor que si no las he tenido en cuenta.

Deformación de una barra debido a su propio peso



Sección A. Peso específico  $\gamma$   
 El peso de la parte de abj. es  $A \gamma x$

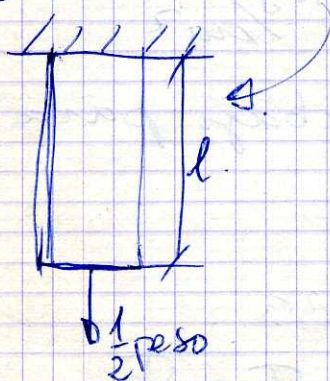
El alargamiento del  $dx$  es:  

$$d\delta = \frac{A \gamma x \cdot dx}{A \cdot E}$$

El alargamiento total:

$$\delta = \int_0^l \frac{F(x) dx}{AE} = \frac{F x l^2}{2AE} = \frac{\left(\frac{1}{2} \text{Peso}\right) \cdot l}{AE}$$

O sea, la deformación es la misma que si no tuviera en cuenta su peso y aplicara en su extremo una fuerza igual a la mitad del peso.



Casos estaticamente indeterminados: un

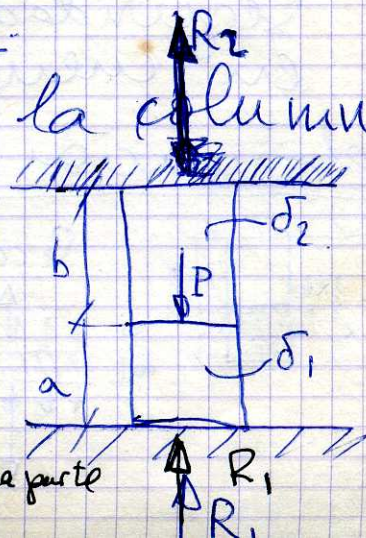
caso se dice que es isostático cuando con las ecuaciones de la estática se pueden calcular las ligaduras. Si no ocurre esto, es un caso hiperestático. Para resolver un caso hiperestático, tendré que plantear las ecuaciones de la estática y además tendré que plantear tantas ecuaciones complementarias como ligaduras sobrantes. Estas ecuaciones complementarias que planteo estarán basadas en la deformación.

Casos hiperestáticos.- Ejemplos.

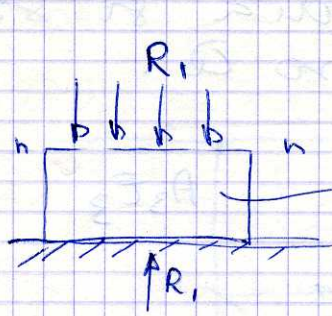
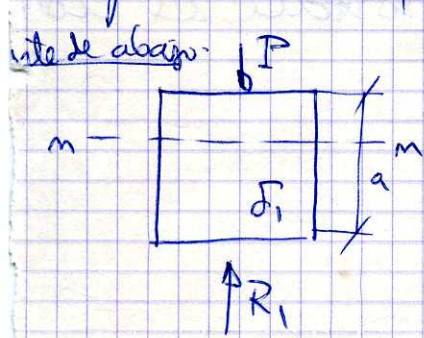
1) Calcular las reacciones en la columna de la figura.

$$R_1 + R_2 - P = 0$$

Solo necesito una ecuación complementaria, basada en la deformación  $\delta_1$  y  $\delta_2$ : alargamiento de la parte



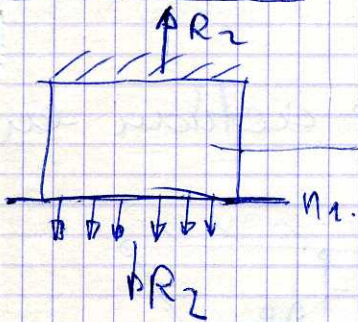
de arriba y de abajo. Se tiene que cumplir  $\delta_1 + \delta_2 = 0$ , porque la distancia techo-suelo permanece constante.



por ser compresión (acortamiento)

$$\delta_1 = -\frac{R_1 \cdot a}{A \cdot E}$$

parte de arriba:



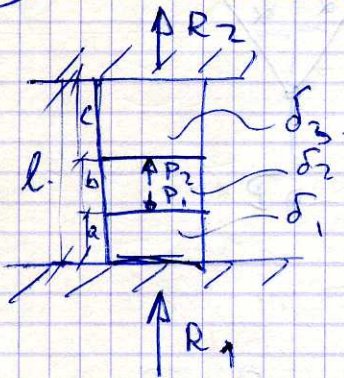
$$\delta_2 = \frac{R_2 \cdot b}{A \cdot E}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

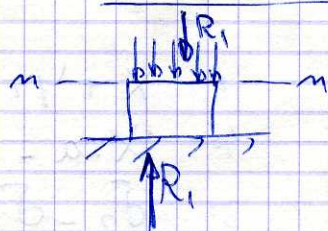
2º) Calcular reacciones en la columna de la figura

$$R_1 + R_2 - P_1 + P_2 = 0 \quad (\text{ec. de la estática})$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (\text{ec. complementaria})$$

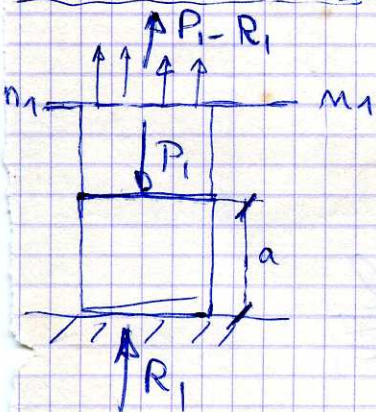


Parte de abajo:



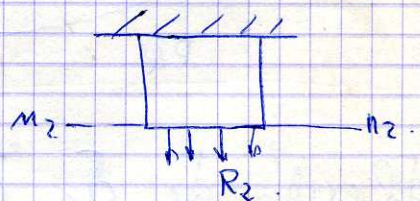
$$\delta_1 = -\frac{R_1 \cdot a}{A \cdot E}$$

Parte del centro:



$$\delta_2 = \frac{(P_2 - R_1) \cdot b}{A \cdot E}$$

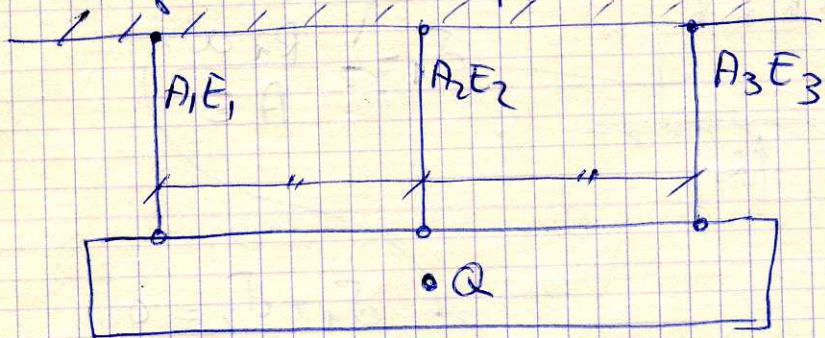
Parte de arriba:



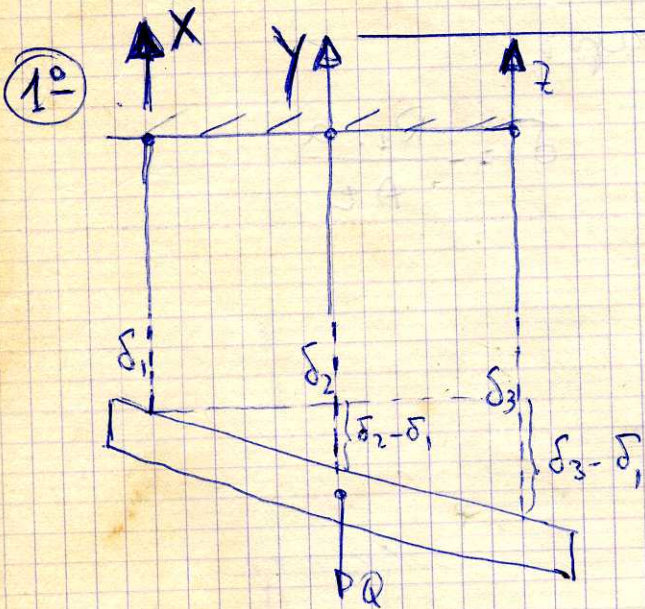
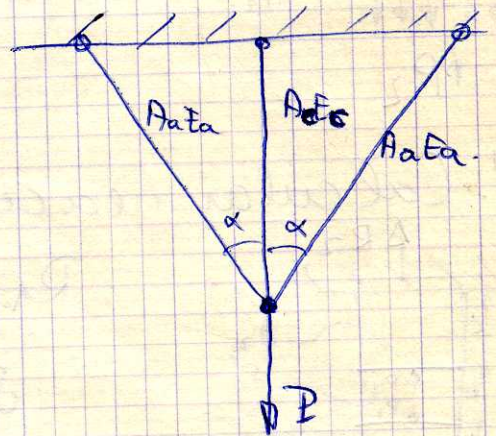
$$\delta_3 = \frac{R_2 \cdot c}{A \cdot E}$$

PROBLEMAS:

1º Calcular las fuerzas de tracción o compresión a las que está sometida cada barra de la figura si soportan el peso  $Q$  en un punto rígido de peso  $Q$ .



2º Calcular las fuerzas que actúan en cada barra de la figura:



$$1: x + y + z - Q = 0$$

$$2: x \cdot a - z \cdot a = 0$$

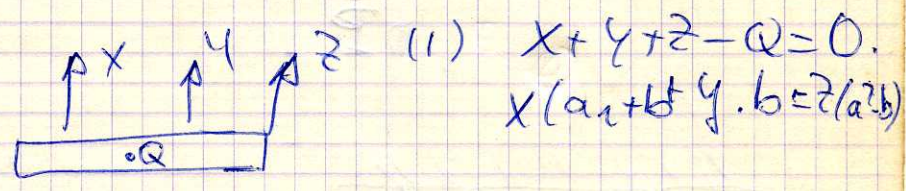
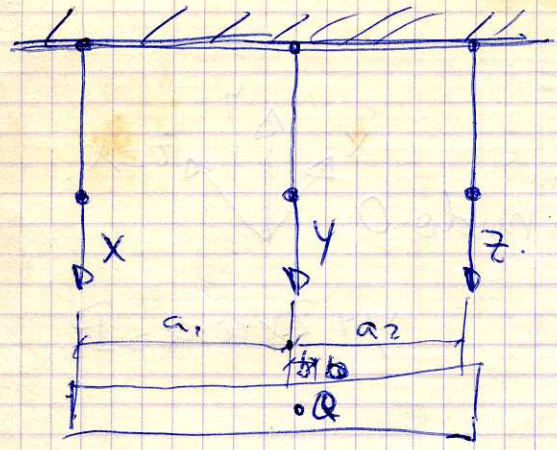
$$3: \delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{2} (\delta_3 - \delta_1)$$

Cálculo de  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$

$$\delta_1 = \frac{x \cdot l}{A_1 E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{y \cdot l}{A_2 E_2}$$

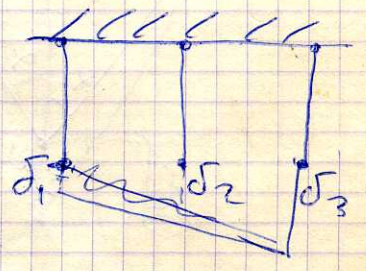
$$\delta_3 = \frac{z \cdot l}{A_3 E_3}$$



1) Fijalo el bloque

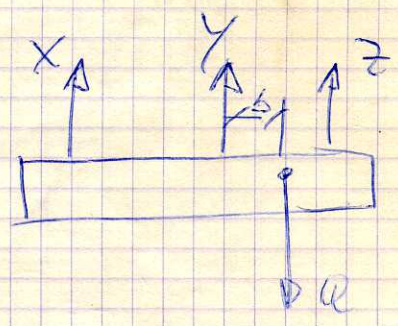
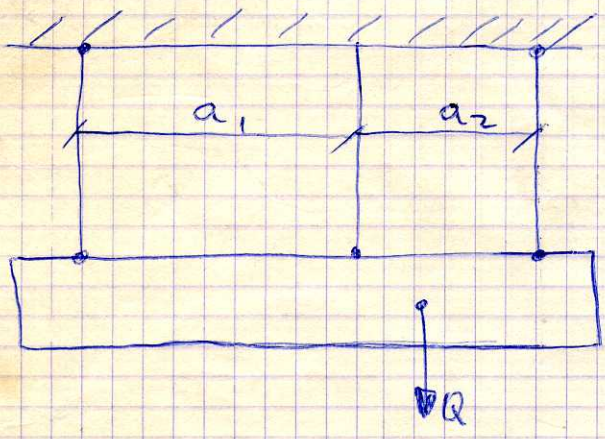
2) Como se deforma la estructura

3<sup>a</sup> ecuación:  $\frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$



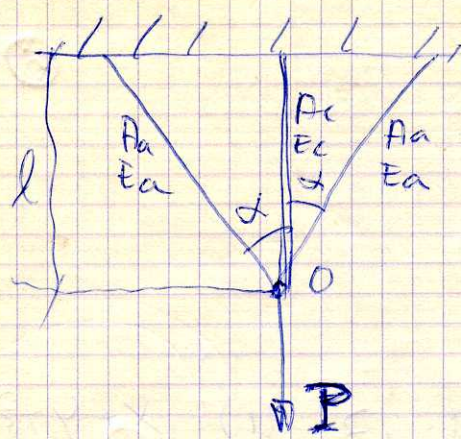
$\delta_1 = \frac{X \cdot l}{A_1 E_1}$       $\delta_2 = \frac{Y \cdot l}{A_2 E_2}$       $\delta_3 = \frac{Z \cdot l}{A_3 E_3}$

Calcular las fuerzas en este caso:

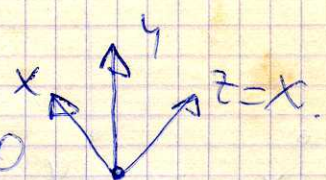


$X + Y + Z - Q = 0$   
 $X(a_1 + b) + Y \cdot b - Z(a_2 + b) = 0$   
 $\frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$

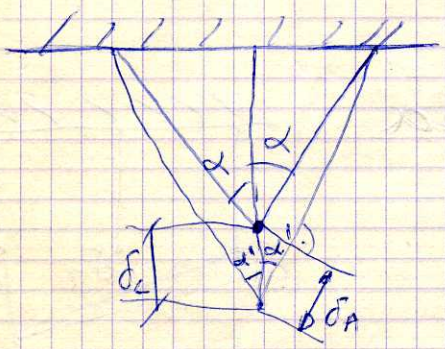
2.)



aislo el nudo O



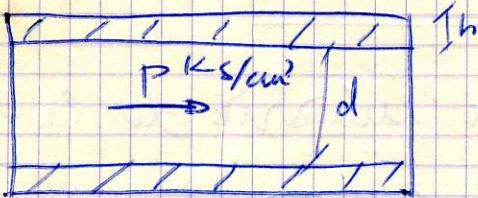
$$y + 2x \cos \alpha = P$$



$$\delta_a = \delta_c \tan \alpha \cdot n$$

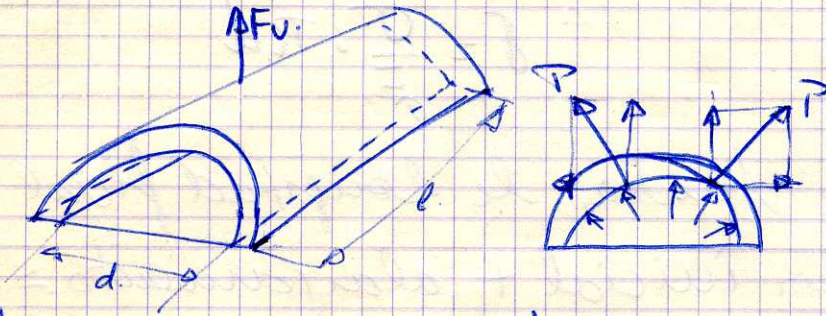
# Tensiones originadas en un tubo:

(6)



Por el interior para un fluido a  $p \cdot \text{Kg/cm}^2$   
 $d =$  diámetro interior tubo  
 $h =$  espesor del tubo

Vamos a calcular las tensiones que se originan en este tubo: (considero la mitad del tubo)



Sobre la cara interna del tubo se ejerce una presión  $P$ . La  $P$  la descompongo en horiz. y vertical. En un elemento simétrico, idéntico, y se compensan componentes horizontales.

$F_v =$  resultante vertical sobre la pared semi cilíndrica interior

$F_v = P \times$  proyección de la cara interna sobre el plano diametral.

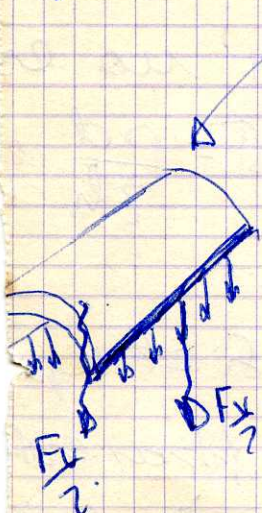
$$F_v = p \cdot d \cdot l$$

Esta resultante está contrarrestada por una serie de tensiones que se pondremos de reparto uniforme.

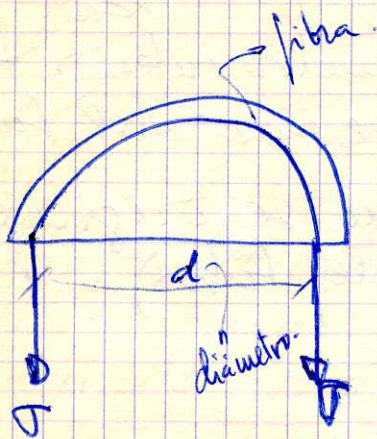
O sea, que la resultante de las tensiones de cada lado será  $\frac{F_v}{2}$ .

$$\sigma = \frac{F_v/2}{h \cdot l} \quad (\text{el área en cuestión repartida es } h \cdot l, \text{ en negro}).$$

$$\sigma = \frac{P \cdot d \cdot l}{2 \cdot h \cdot l} = \frac{P \cdot d}{2h}$$



# Cálculo del alargamiento experimental de por el diámetro del cilindro:



Alargamiento unitario de la fibra interior:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Alargamiento total:  $\rightarrow$  long. de la fibra

$$\delta = \frac{\sigma}{E} \cdot \pi d$$

Por tanto, la longitud final de la fibra será: valor inicial + alargamiento =  $\pi d + \epsilon \pi d = \pi d (1 + \epsilon)$ .

O sea, la fibra interior sigue siendo una  $\pi$  de diámetro  $d(1 + \epsilon)$

El alargamiento del diámetro será:

$$d(1 + \epsilon) - d = d\epsilon$$

El alargamiento unitario =  $\frac{d\epsilon}{d} = \epsilon$ .  
( $d$ )  $\rightarrow$  long. inicial.

El alarg. unitario del diámetro coincide con el alarg. unit. de una fibra interior.

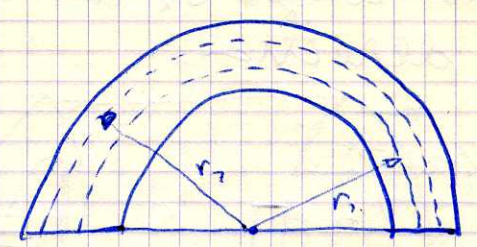
En realidad el reparto de tensiones no es uniforme y por tanto la fórmula  $\sigma = \frac{Pd}{2h}$  es solo aproximada.

Demostración: coge dos fibras  $r_1$  y  $r_2$ . Si el rep. de tensiones fuese uniforme, las dos fibras estarían sometidas a la misma tensión y por tanto tendrían el mismo alargamiento unitario.

$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

(7)

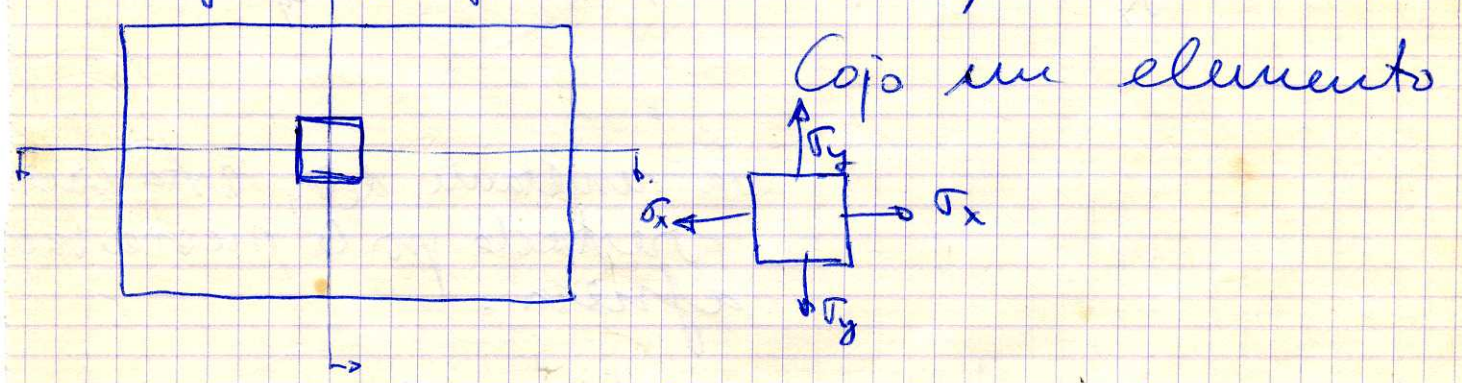
El alargamiento de la  $r_1$  será:  $r_1 \cdot \epsilon$   
 La  $r_2$ :  $r_2 \cdot \epsilon$  }  $r_1 \cdot \epsilon < r_2 \cdot \epsilon$



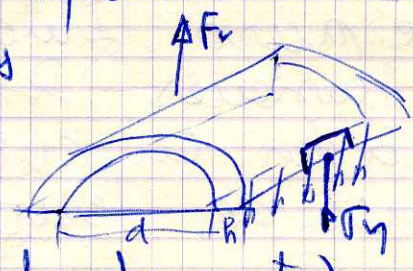
En la deformación, las dos fibras tenderían a separarse más, por ser mayor la deformación de  $r_2$ . Sin embargo, en la práctica se demuestra que el tubo se ~~ensancha~~ estrecha a medida que se deforma, o sea que el reparto de tensiones no puede ser uniforme.

La fórmula  $\sigma = \frac{p \cdot d}{2h}$  solo se usa cuando el tubo es estrecho ( $h$  pequeño comparado con  $d$ ).

Tensiones en un depósito cerrado en el supuesto de que en el interior del depósito hay un fluido a una presión de  $P \text{ Kg/cm}^2$

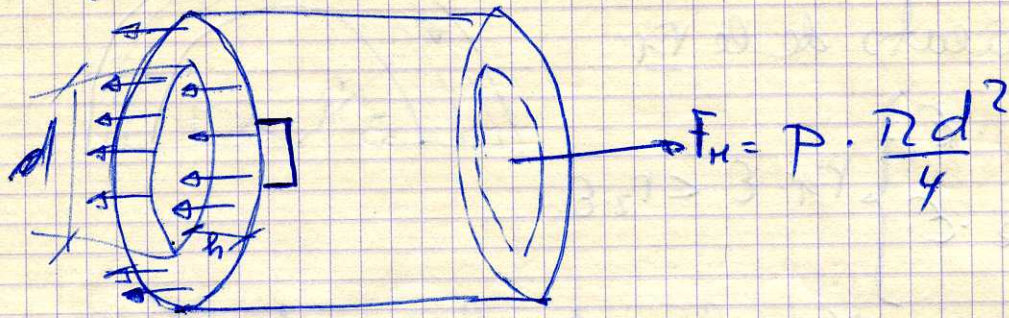


Considero el equilibrio de la parte de arriba del depósito y



$\sigma_y = \frac{Pd}{2h}$  (calculo da antes)

Para calcular  $\sigma_x$  considero el equilibrio de la parte derecha.



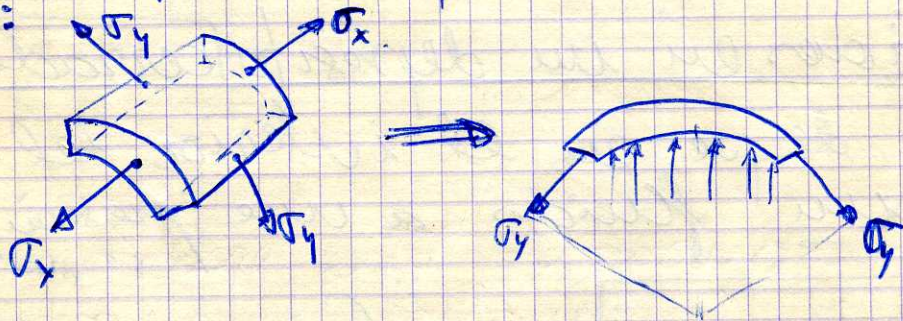
La  $F_H$  estará contrarrestada por esas fuerzas que supondré de reparto uniforme, y que es  $\sigma_x$ .

$$\sigma_x = \frac{F_H}{\text{Area corona}}$$

En la práctica, área corona =  $\pi \cdot d \cdot h$  (cuando  $h$  es pequeño)

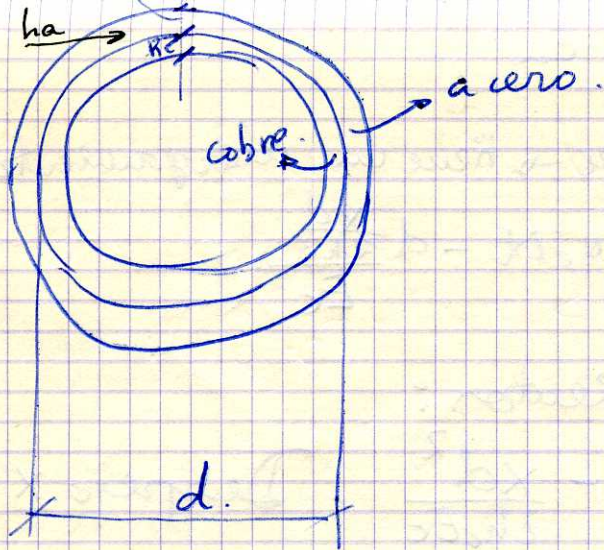
$$\sigma_x = \frac{F_H}{\pi d h} = \frac{P \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{\pi d h} = \frac{P \cdot d}{4 h} \quad (\text{unidad de la anterior})$$

El elemento diferencial que lo tomamos, en realidad es curvo:

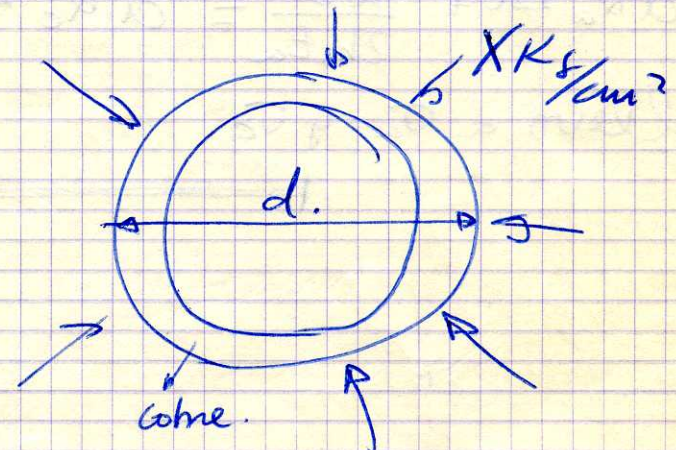
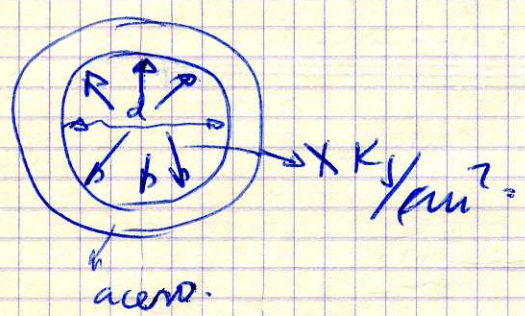


La resultante de  $\sigma_y$  está contrarrestada por la presión hacia afuera.

Problema: un tubo de cobre está introducido en un tubo de acero. Inicialmente, ambos tubos están sin tensiones. Se pide 1° Calcular las tensiones originadas en ambos tubos si se aumentan un  $\Delta t$  de temp.  $\Delta t$



$d = \text{ext. del cobre e int. acero}$   
 $hc = \text{espesor cobre}$   
 $ha = \text{'' acero}$   
 $E_a$   
 $E_c$  } módulos de elasticidad  
 $\alpha_a$   
 $\alpha_c$  } coef. de dilatación  
 $\alpha_c > \alpha_a$



El tubo de acero no va a dejar dilatarse al del cobre todo lo que debiera (por ser  $\alpha_a < \alpha_c$ )  
 O sea, ejercerá sobre el una fuerza de compresión  $X \text{ Kg/cm}^2$ . Idem. con el otro tubo

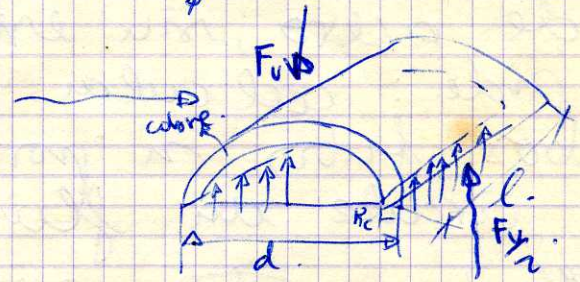
Tensión del tubo de acero:

$$\sigma_a = \frac{X \cdot d}{2 h_a} \quad (\text{por la fórmula de autes})$$

Tensión del tubo de cobre:

$$\sigma_c = \frac{F_v / 2}{h_c \cdot l} = \frac{X \cdot d}{2 h_c}$$

(a compresión)



$$F_v = X \cdot d \cdot l$$

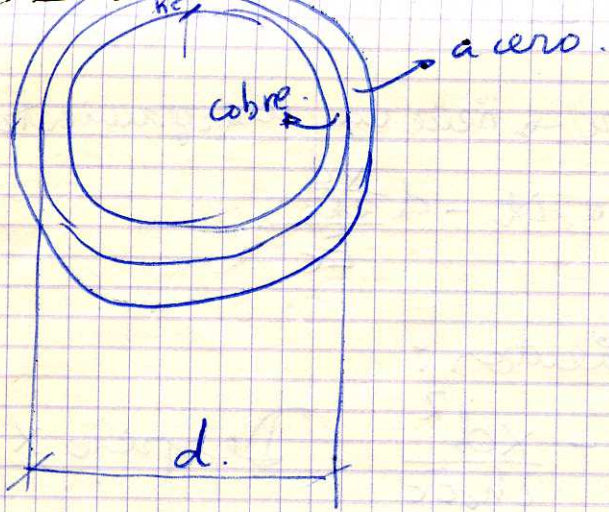
↳ porque hay que proyectar la sup. ext.

Cálculo de  $X$  para hallar  $\sigma_a, \sigma_c$ :

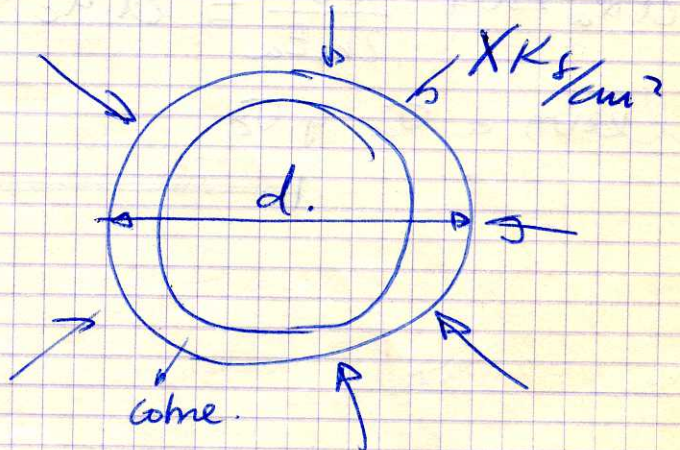
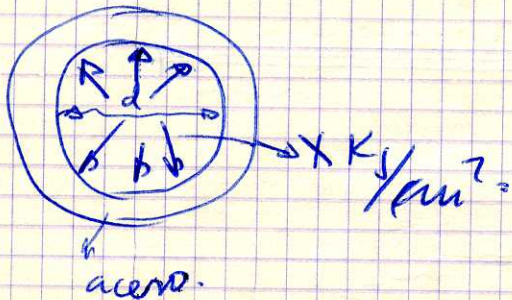
~~Los~~ Los dos tubos permanecerán unidos después de la dilatación, lo que quiere decir que el alargamiento de  $d$  es idéntico para los dos tubos.

Interior del tubo de acero tiene un alargamiento:

$$= d \cdot \alpha_a \cdot \Delta t + d \cdot \epsilon_a \quad \text{alarg. unitario}$$



$d = \text{es del Cu e int' acero}$   
 $h_c = \text{espesor cobre}$   
 $h_a = \text{acero}$   
 $E_a$   
 $E_c$  } módulos de elasticidad  
 $\alpha_a$   
 $\alpha_c$  } coef. de dilatación  
 $\alpha_c > \alpha_a$



El tubo de acero no va a dejar dilatarse al del cobre todo lo que debiera (por ser  $\alpha_a < \alpha_c$ ) o sea, ejercerá sobre el una fuerza de compresión  $X \text{ Kg/cm}^2$ . Idem. con el otro tubo

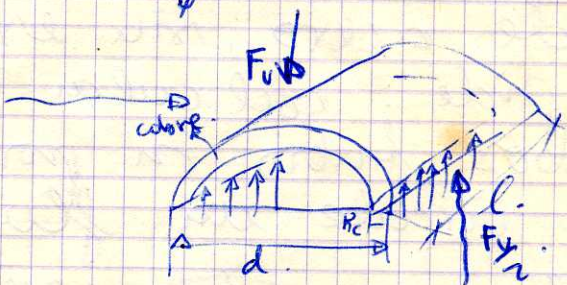
Tensión del tubo de acero:

$$\sigma_a = \frac{X \cdot d}{2h_a} \quad (\text{por la fórmula de antes})$$

Tensión del tubo de cobre:

$$\sigma_c = \frac{F_v/2}{h_c \cdot l} = \frac{X \cdot d}{2h_c}$$

(a compresión)



$$F_v = X \cdot d \cdot l$$

↳ por qué hay que proyectar lo sup ext

Cálculo de  $X$  para hallar  $\sigma_a, \sigma_c$ :

~~Los~~ Los dos tubos permanecerán unidos después de la dilatación, lo que quiere decir que el alargamiento de  $d$  es idéntico para los dos tubos.

Interior  $d$  del tubo de acero  $\rightarrow$  tiene un alargamiento:

$$= d \cdot \alpha_a \cdot \Delta t + d \cdot \epsilon_a \quad \text{alarg. unitario}$$

debido a la temp. debido a las tensiones.

$$= d \alpha_a \Delta t + d \frac{\sigma_a}{E_a} = d \alpha_a \Delta t + d \frac{\frac{x d}{2 h_a}}{E_a}$$

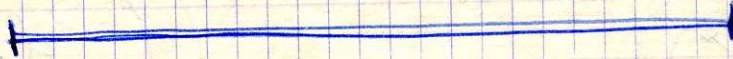
diámetro exterior del tubo de cobre  $\rightarrow$  tiene un alargamiento:

$$= \underbrace{d \alpha_c \Delta t}_{\text{debido al } \Delta t} + \underbrace{d \epsilon_c}_{\substack{\text{debido a la fuerza} \\ \rightarrow \text{ porque es compresión.}}} = d \alpha_c \Delta t - d \frac{x d}{2 h_c E_c}$$

Iguando los dos alargamientos:

$$d \alpha_a \Delta t + \frac{x d^2}{2 h_a E_a} = d \alpha_c \Delta t - \frac{x d^2}{2 h_c E_c} \quad \text{Despejo } x$$

llevo a  $\sigma_a$  y  $\sigma_c$ .

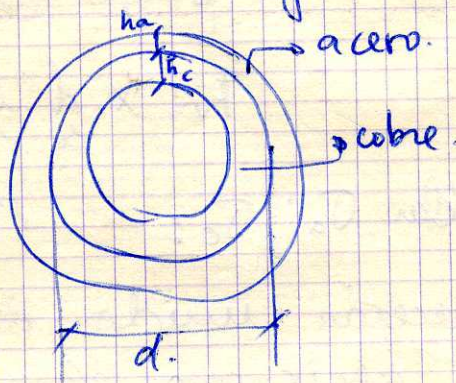


### Problema

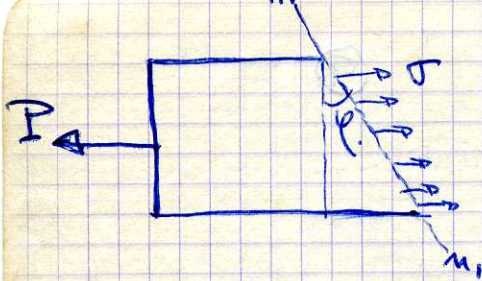
Un tubo de cobre está introducido en un tubo de acero, sin estado inicial de tensiones.

Se pide: calcular las tensiones originadas en ambos tubos si por el interior del tubo de cobre circula un fluido a una presión de

$$P \text{ Kg/cm}^2$$



$$F_a \quad F_c$$



Las tensiones que aparecen son tambien de reparto uniforme.

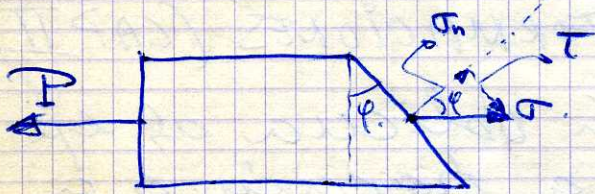
$$\sigma = \frac{P}{\text{area inclinada}} = \frac{P}{\frac{A}{\cos \varphi}} = \frac{P}{A} \cos \varphi$$

pero  $\frac{P}{A} = \sigma_x$  ;  $\sigma = \sigma_x \cos \varphi$

O sea, la máxima tensión aparece en la sección normal al eje de la barra ( $\cos \varphi = 1$ ) y su valor es  $\sigma_x = \frac{P}{A}$

En una sección inclinada, la tensión es menor y su valor es  $\sigma = \sigma_x \cos \varphi$ , que cuando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  $\sigma = 0$

Descomposición de  $\sigma$  en una tensión normal a la superficie (tensión normal) y en una tensión paralela a la superficie (tensión tangencial o cortante)



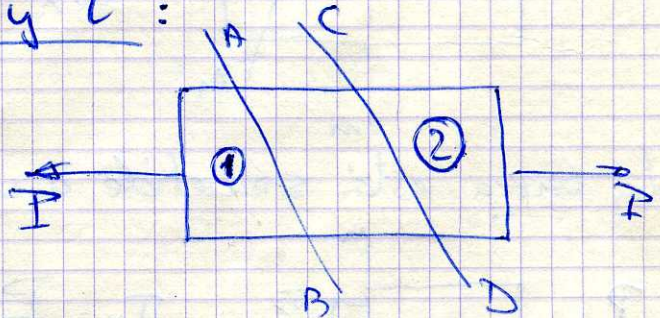
$\sigma_n$  = tensión normal  
 $\tau$  = tensión cortante o tangencial

$$\sigma_n = \sigma \cos \varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

$$\tau = \sigma \sen \varphi = \sigma_x \sen \varphi \cos \varphi = \sigma_x \frac{\sen 2\varphi}{2}$$

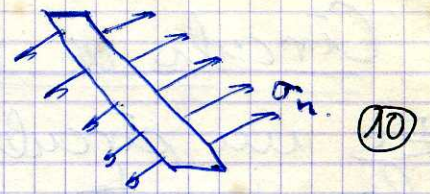
Efecto que produce  $\sigma_n$  y  $\tau$ :

Considero las secciones A B y C D infinitamente próximas, y el elemento de barra comprendido entre ellas.

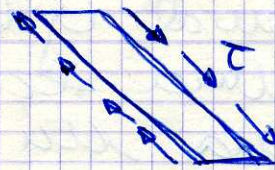


Este elemento está sometido:

A las tensiones normales  $\sigma_n$



A las tensiones cortantes





- Las tensiones normales tienden a separar a los dos pedazos de barra ① y ②
- La tensión cortante tiende a hacer deslizar un pedazo sobre el otro.


Los dos efectos se producen de manera independiente en una sección.


NOTA: en adelante, en una sección inclinada de la barra, dire' que existe una tensión normal  $\sigma_n$  y una tensión cortante  $\tau$ , pero no  $\sigma$ , porque hay dos efectos independientes y  $\sigma$  no tiene existencia, sólo es el resultante de  $\sigma_n$  y  $\tau$ .

### Círculo de Mohr

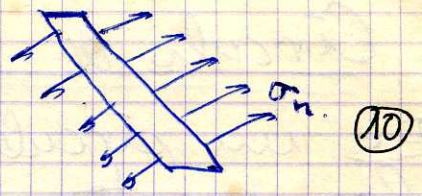
- Convenio de signos para  $\sigma_n$  y  $\tau$

- Si un elemento está a  $\sigma_n$  como esta  (a tracción) consideraré  $\sigma_n(+)$ .
- Si es a compresión , entonces  $\sigma_n(-)$ .

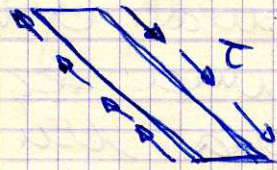
Si  $\tau$  hace girar al elemento en el sentido de las agujas del reloj  $\rightarrow$   $\tau(+)$  

Si  $\tau$  lo hace girar en sentido contrario al del reloj,  $\tau(-)$ . 

A las tensiones normales  $\sigma_n$



A las tensiones cortantes.



- Las tensiones normales tienden a separar a los dos pedruzcos de barra ① y ②


- La tensión cortante tiende a hacer deslizar un pedazo sobre el otro.

Los dos efectos se producen de manera independiente en una sección.


NOTA: en adelante, en una sección inclinada de la barra, dire' que existe una tensión normal  $\sigma$  y una tensión cortante  $\tau$ , pero no  $\sigma_n$ , por que hay dos efectos independientes y  $\sigma$  no tiene existencia, solo es el resultante de  $\sigma_n$  y  $\tau$ .

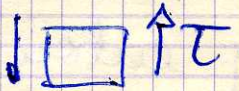
### Círculo de Mohr

- Convención de signos para  $\sigma_n$  y  $\tau$

Si un elemento está a  $\sigma_n$  como esta   $\sigma_n$  (a tracción) consideraré  $\sigma_n(+)$ .

Si es a compresión   $\sigma_n$ , entonces  $\sigma_n(-)$ .

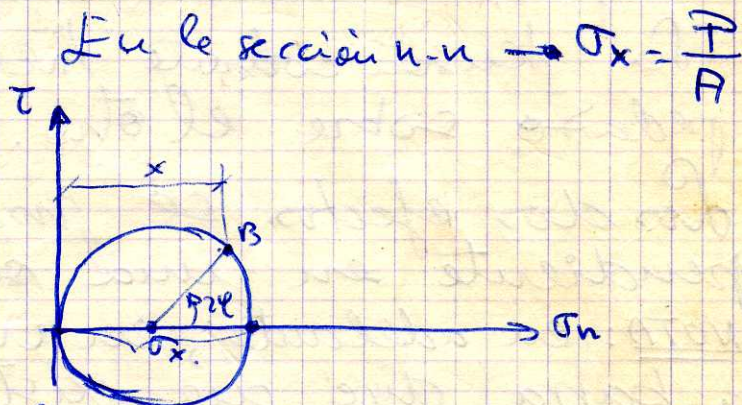
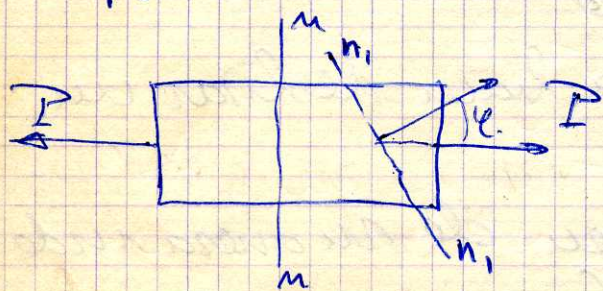
Si  $\tau$  hace girar al elemento en el sentido de las agujas del reloj  $\tau(+)$  

Si  $\tau$  lo hace girar en sentido contrario al del reloj,  $\tau(-)$ . 

# Círculo de Mohr para el estado simple de tensión

Es un círculo en el que las coordenadas de los puntos de su circunferencia dan la tensión normal y la tensión cortante que actúan en una sección de la barra cuya normal forma un ángulo  $\varphi$  con el eje de la misma.

Forma de trazarlo:



El círculo pasa por el origen y tiene de diámetro  $\sigma_x$ .  
 En la sección  $n_1 n_1$   $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi \\ \tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi \end{array} \right.$

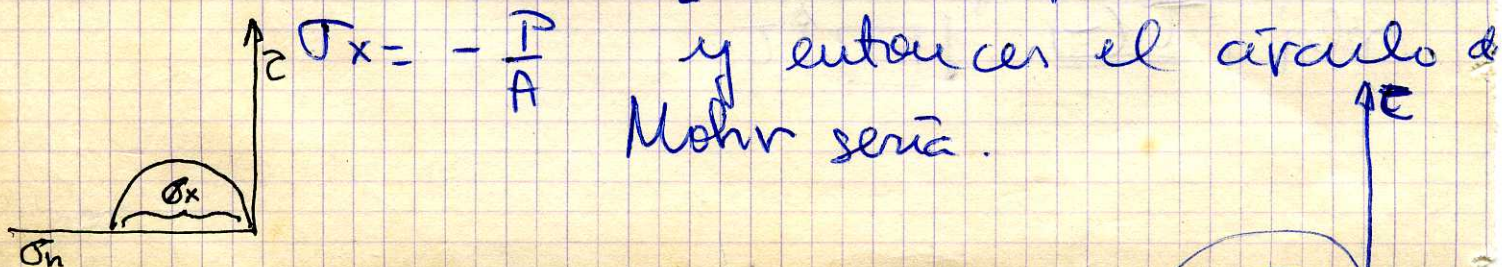
Vamos a demostrar que  $\sigma_n$  y  $\tau$ , que actúan en  $n_1$  son las coordenadas de un punto de este círculo de Mohr:

Se toma un ángulo  $2\varphi$  a partir del eje de  $\sigma_n$ ; las coordenadas del punto B miden  $\sigma_n$  y  $\tau$ :

$$x = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi \quad (\text{Tensión normal})$$

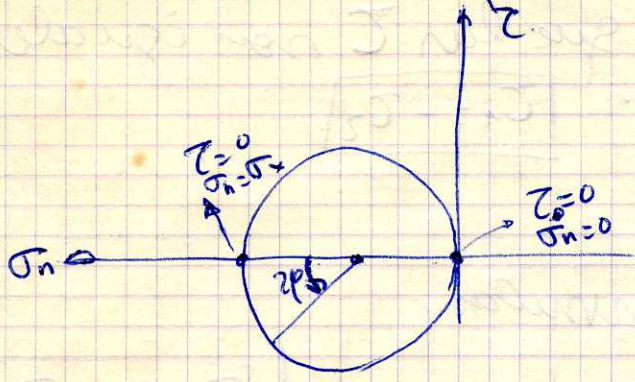
$$y = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi \quad (\text{Tensión cortante})$$

- Si la barra trabajase a compresión:  $\frac{P}{A}$



El ángulo  $2\varphi$  se toma a partir de  $\sigma_x$  en el mismo sentido que antes.

(11)

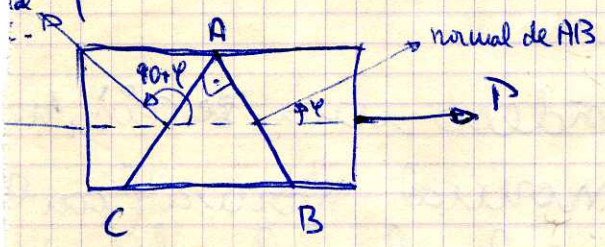


Consecuencias

1<sup>a</sup>) Existen dos puntos en el círculo en los que  $\tau=0$ . En uno de ellos  $\sigma_n = \sigma_x$  y en otro  $\sigma_n = 0$ . Al punto  $(\sigma_x, 0)$  se le llama tensiones principales por que actúan en caras donde  $\tau=0$

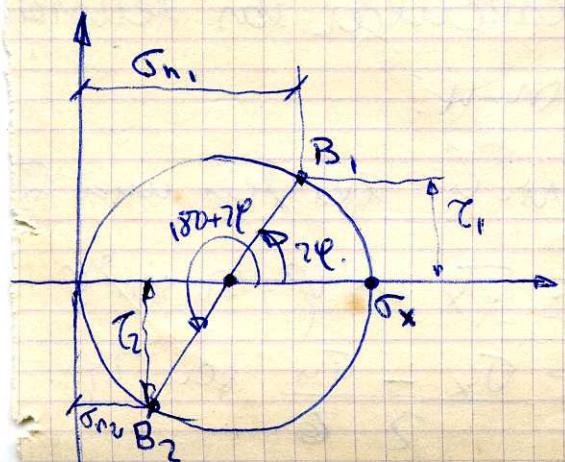
2<sup>a</sup>) Valor máximo de  $\tau \rightarrow$  es el radio. O sea  $\tau_{max} = \sigma_x / 2$ . En la fórmula se ve que  $\tau$  es máx. cuando  $\sin 2\varphi = 1$  }  $2\varphi = 90^\circ; \varphi = 45^\circ$   
 }  $2\varphi = 270^\circ; \varphi = 135^\circ$   
 y esas dos caras son normales entre sí.

3<sup>a</sup>) Relación entre tensiones que actúan en dos caras perpendiculares:



Considero dos secciones AB y AC normales entre sí.

Dibujar el círculo de Mohr: el pto  $B_1$  representa el estado de tensiones que actúa en la cara AB y el  $B_2$ , la cara AC.



Los pto. que representan el estado de tensiones que actúan en dos

caras perpendiculares, forman un diámetro del círculo de Mohr.

Mirando el círculo, se ve que las  $\tau$  son iguales y de sentido contrario.  $\tau_1 = -\tau_2$

$$\sigma_{n1} + \sigma_{n2} = \sigma_x$$

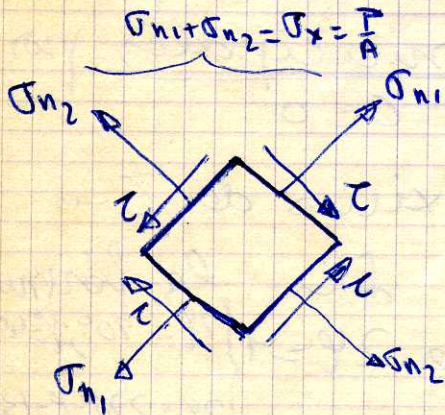
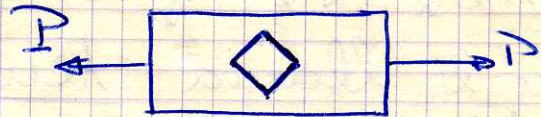
También se ve en las formulas:

$$\sigma_{n1} = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

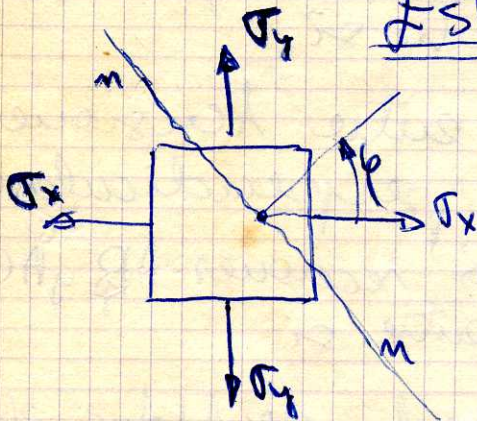
$$\sigma_{n2} = \sigma_x \cos^2 (90 + \varphi) = \sigma_x \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_{n1} + \sigma_{n2} = \sigma_x$$

Aísto un elemento cúbico de la barra y voy a representar el estado de tensiones a que está sometido.



### Estado doble de tensiones.



Este elemento está sometido a un estado doble de tensiones.

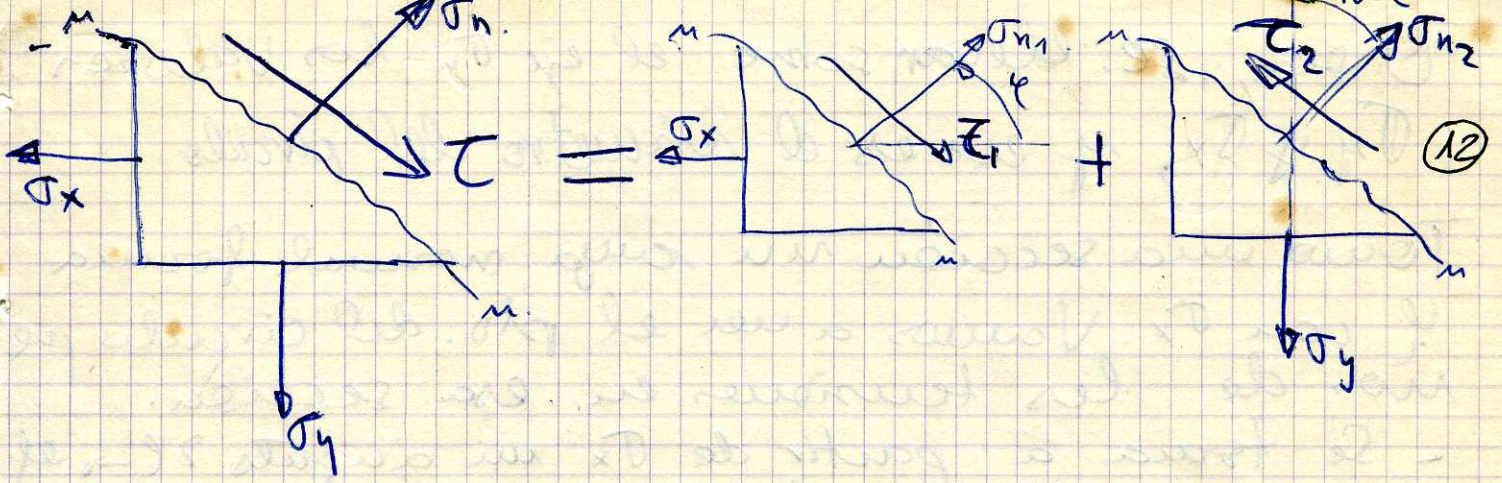
Si considero una sección  $n-n$  cuya normal forma  $\varphi$  con  $\sigma_x$  quiero calcular las tensiones que hay en la sección  $n-n$ .

que hay en la sección  $n-n$ .

Voy a demostrar que en  $n-n$  existen una  $\sigma$  y una  $\tau$  de valores

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$$



$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{n1} + \sigma_{n2} \\ \tau &= \tau_1 - \tau_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_{n1} = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{n2} = \sigma_y \cos^2 (90 - \varphi) = \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$\tau_2 = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2(90 - \varphi) = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

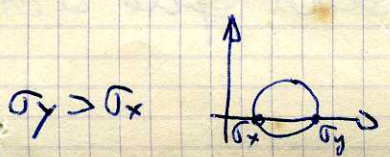
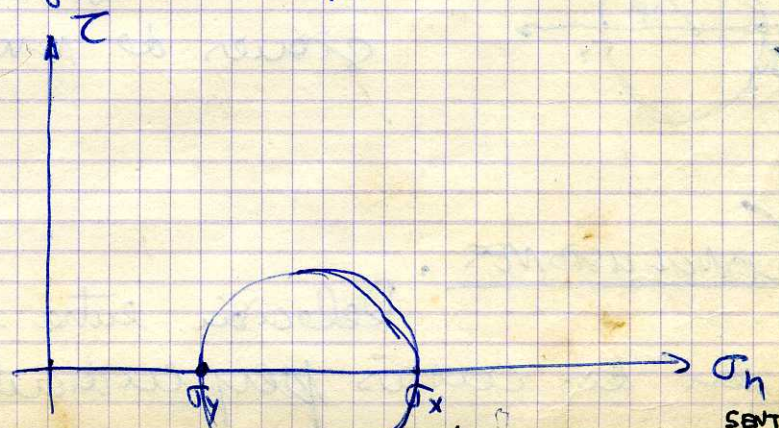
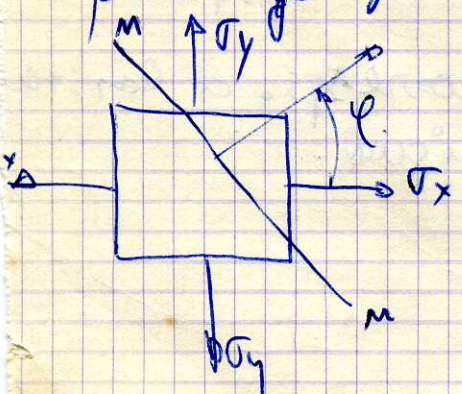
$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$$

Círculo de Mohr para el estado doble de ten.

Siempre:

Definición: es un círculo en el que las coordenadas de los puntos de su circunferencia da la tensión normal y la tensión cortante que actúan en una cara cuya normal forma un ángulo  $\varphi$  cualquiera por ejemplo con la  $\sigma_x$ .

Supongamos  $\sigma_x > \sigma_y$

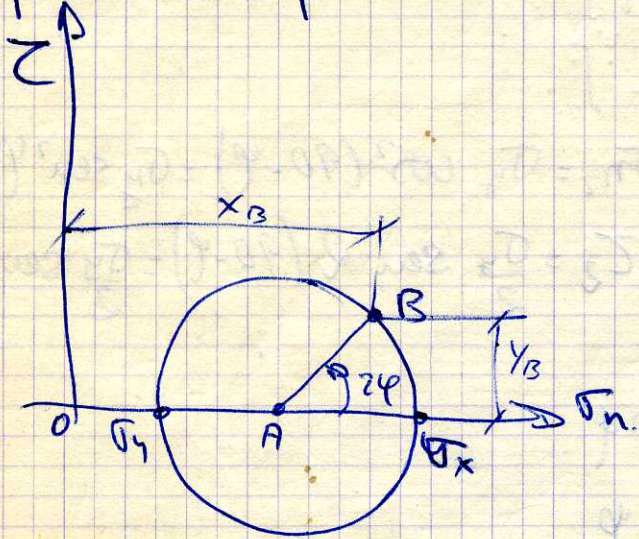


El ángulo  $2\varphi$  se lleva a partir de  $\sigma_y$  SIEMPRE EN EL MISMO SENTIDO

O sea, se llevan sobre el eje  $\sigma_n$  los valores  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$ , y ese es el diámetro del círculo

Tomamos una sección  $n-n$  cuya normal forma  $\varphi$  con  $\sigma_x$ . Vamos a ver el pto. del círculo que nos da las tensiones en esa sección.

- Se toma a partir de  $\sigma_x$  un ángulo  $2\varphi$  → el pto B representa el estado de tensiones en  $n-n$ .



$$x_B = \overline{OA} + \overline{AB} \cos 2\varphi$$

Pero A es el pto. medio de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ . O sea

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad \text{Operando}$$

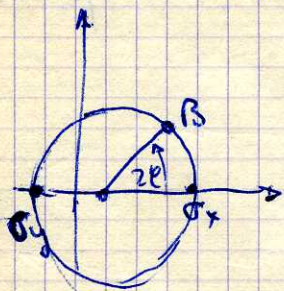
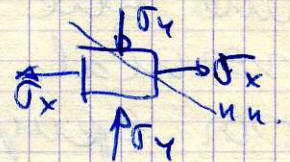
$$x_B = \frac{\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi}{1}, \text{ que}$$

es el valor de la tensión normal en  $n-n$ .

$$y_B = \overline{AB} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi, \text{ que es la tensión cortante en esa sección}$$

- Si  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  fueran a compresión, el círculo sería igual, pero dibujado a la izquierda.

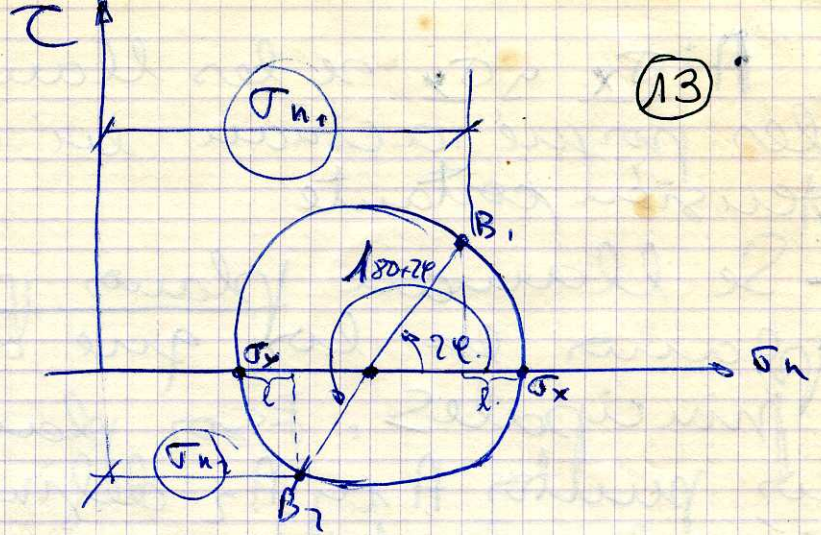
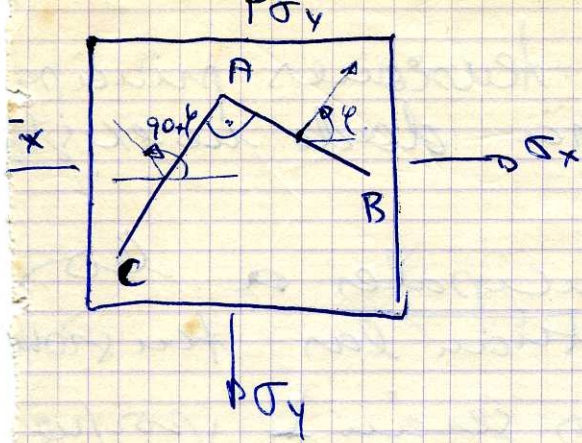
- Si una es positiva y la otra negativa



Para hallar el pto. corresp. a las tensiones de  $n-n$ , hago igual.

### CONCLUSIONES

Relación entre las tensiones que actúan en dos caras perpendiculares



(13)

$B_1$ : tensiones en la cara AB  
 $B_2$ : tensiones en la cara AC

} O sea, los pto que en su representan tensiones

que actúan en dos caras perpendiculares definen un diámetro del círculo de Mohr (como en el estado simple de tensiones)

Las tensiones cortantes  $\tau$  son iguales y contrarias.

Las tensiones normales  $\sigma_{n1} + \sigma_{n2} = \sigma_x + \sigma_y$

Valor de  $\tau$  máxima: es el radio del círculo

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

Plano en que se produce el  $\tau$  máxima.

Como  $\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi \rightarrow$  max. cuando  $\sin 2\phi = 1$

$$\begin{cases} \phi = 45^\circ \\ \phi = 135^\circ \end{cases}$$

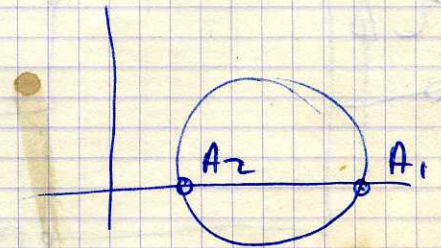
O sea es máxima en plano perpendicular entre si que forman con  $\sigma_x$  (las normales)  $135^\circ$  y  $45^\circ$  respectivamente.

Tensiones principales:

En la pto  $A_1$  y  $A_2$ ,  $\tau = 0$ .

En  $A_1$   $\sigma_n \rightarrow \sigma_x$

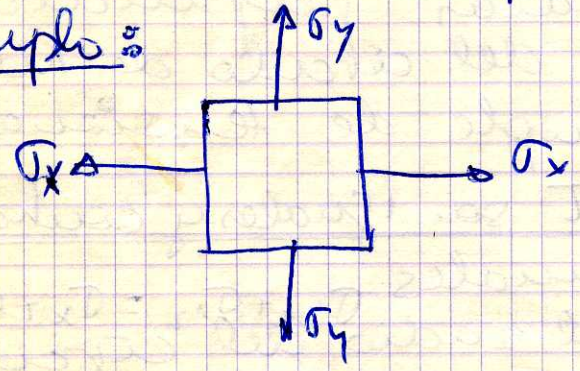
En  $A_2$   $\sigma_n \rightarrow \sigma_y$



A  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  se les llama tensiones principales porque actúan en caras donde no existe tensión cortante

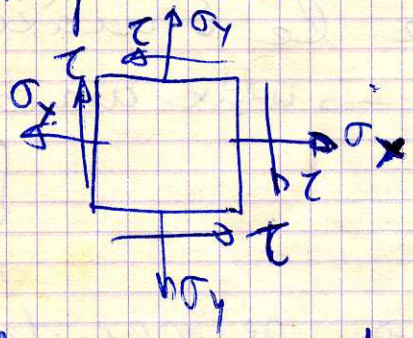
- Se llaman planos principales a los planos en los que actúan las tensiones principales. Esos planos serían  $\perp$  porque los puntos  $A_1$  y  $A_2$  definen un diámetro de círculo de Mohr
- Se llaman direcciones principales a las normales a los planos principales.

Ejemplo:



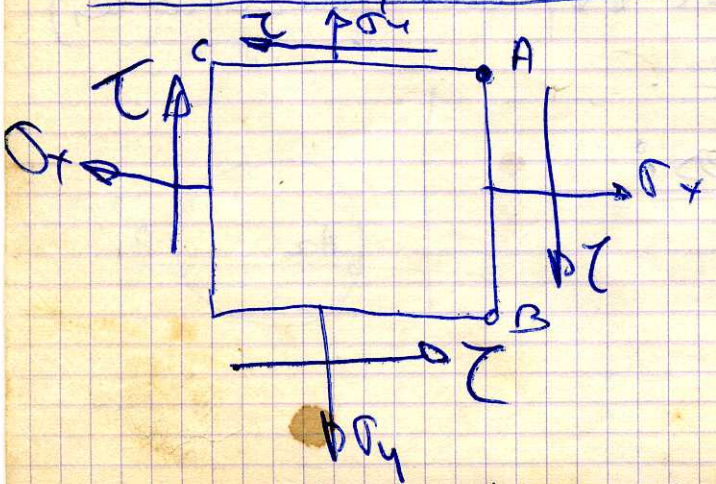
En este caso  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son tensiones ppales porque actúan en caras donde no existe tensión cortante. Las caras de ese elemento

Son planos principales. Son perpendiculares a ellos



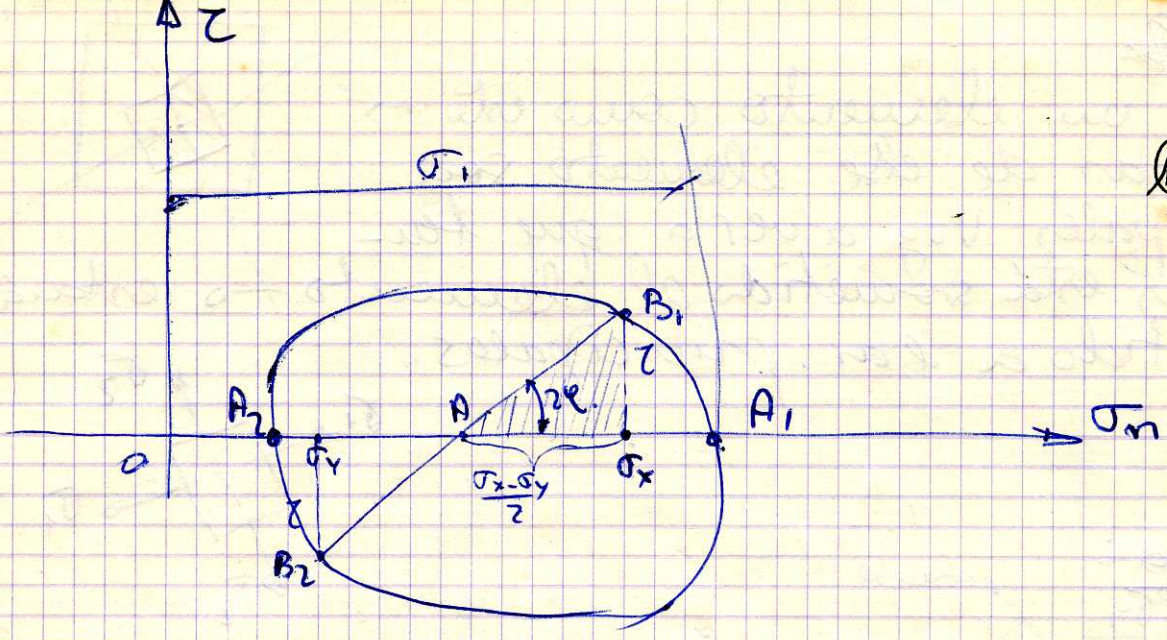
Este elemento,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  no son principales, porque existe  $\tau$  y las caras del elemento tampoco son ppales

Cálculo de las tensiones principales de un elemento



Dibujar el círculo de Mohr: - lleve  $\sigma_x$ ,  $\tau$  y el pto  $B_1$  me de elemento de tensiones de AB. - lleve  $\sigma_y$  y  $\tau$  (de sent. cont. a lo anterior) y obtenga  $B_2$  de la cara AC. Como son dos caras  $\perp$ , estos

Estos dos ptes. me definirán un  $\phi$  del círculo de



Las tensiones ppales del elemento son las de las caras representadas por  $A_1$  y  $A_2$

$$\begin{cases} \sigma_1 = OA + AA_1 = OA + AB_1 \\ \sigma_2 = OA - AA_2 = OA - AB_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$OA = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

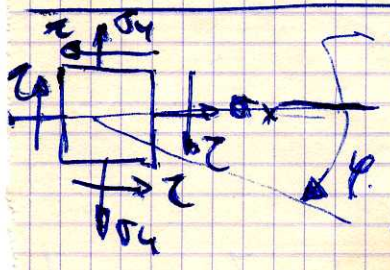
$$AB_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Llevando a las formulas (1) y operando:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Calculo de las direcciones principales:

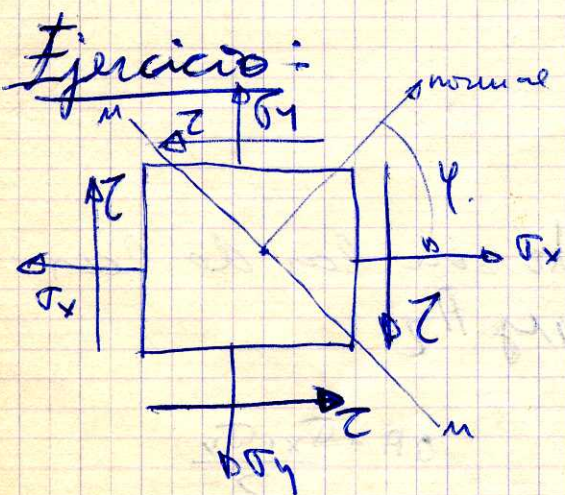
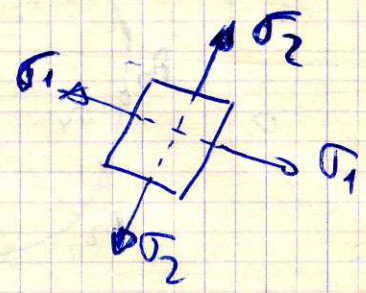
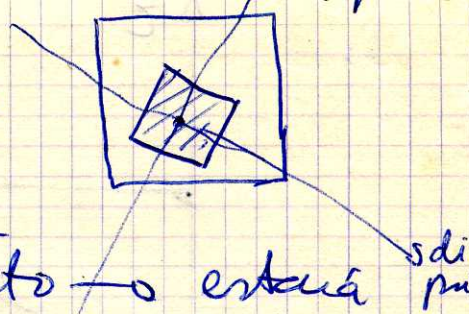


Para pasar de  $B_1$  a  $A_1$  hay que girar  $2\phi$  en el sentido del reloj.

Para pasar de la dirección 1 a la ppal, giramos  $\phi$  en el mismo sentido.

este será una dirección principal, y la otra será la normal a ella.

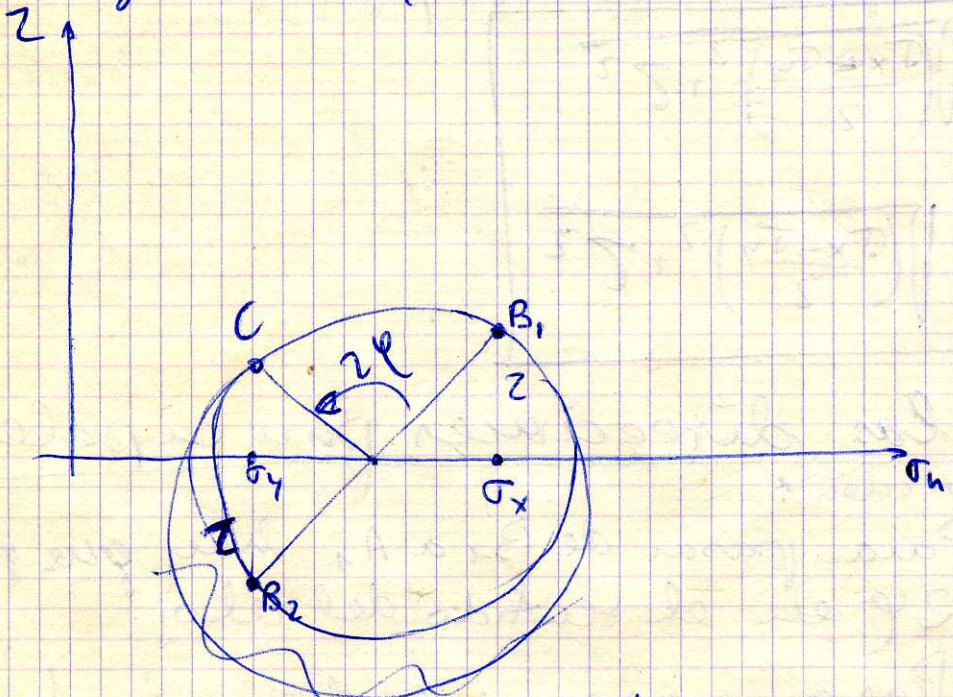
~~Asílo~~  
 Asílo un elemento como este → las caras de este elemento son principales. Voy a ver a que tensiones está sometido el elemento → está sometido a las principales.



→ Estas tensiones no son principales, porque hay  $\tau$ .

- 1º Dibujar el círculo de Mohr
- 2º Representar en el círculo de Mohr el pto que da el estado de tensiones que actúan en la cara  $n$  cuya normal forma  $\varphi$  con  $\sigma_x$ .

de tensiones que actúan en la cara  $n$  cuya normal forma  $\varphi$  con  $\sigma_x$ .



Tomo un  $2\varphi$  a partir de  $B_1$ , porque este punto representa las tensiones de la cara sobre la que actúa  $\sigma_x$  y entre la normal a esta cara y la normal  $n$  hay un ángulo  $\varphi$  (o sea, he  $2\varphi$  en el círculo). Obtengo el punto  $C$

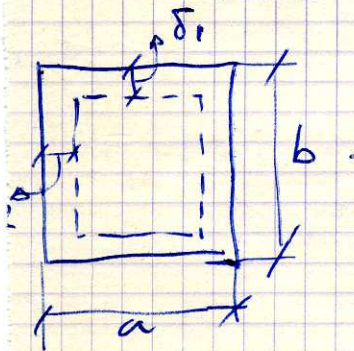
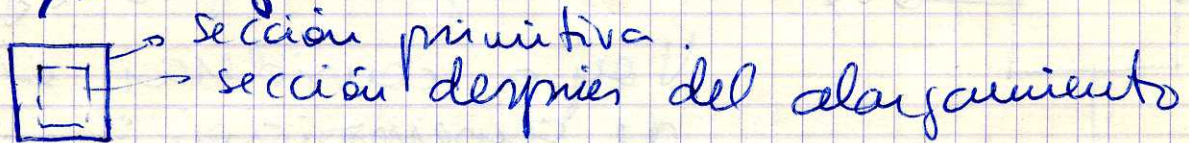
# Coefficiente o módulo de Poisson: $\nu$

Es una constante elástica

(15)



La barra se alargará en la dirección del eje (tendrá alargamiento unitario  $\epsilon_x$  y alarg. total). Se observa que en sentido lateral, la barra se contrae de forma que la contracción unitaria lateral es  $= \nu \times$  alargamiento unitario axial



$\epsilon_x \rightarrow$  alarg. unitario de la barra en el sentido axial.

Contracción unitaria según el eje  $z \rightarrow \epsilon_z = \nu \cdot \epsilon_x$

La contracción total:  $2\delta_1 = \nu \cdot \epsilon_x \cdot b$

$\nu \rightarrow$  contracción unitaria según el eje  $y \rightarrow \epsilon_y = \nu \epsilon_x$

Contracción total según  $y$ :  $2\delta_2 = \nu \cdot \epsilon_x \cdot a$

Incremento de la sección

La primitiva era:  $a \cdot b$ .

Después de la contracción:  $(b - \nu \epsilon_x b) \cdot (a - \nu \epsilon_x a)$

$$\Delta S = ab - (b - \nu \epsilon_x b)(a - \nu \epsilon_x a)$$

$\rightarrow$  disminución de área

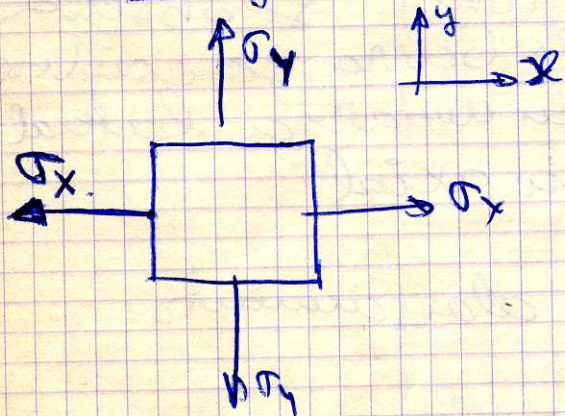
Si  $P$  fuera a compresión en vez de a tracción, el área, en vez de disminuir, aumentaría.

Si un material es isótropo (tiene las mismas propiedades elásticas según todas)

(en direcciones) el valor del coeficiente de Poisson =  $\frac{1}{4}$ . Para el acero se toma

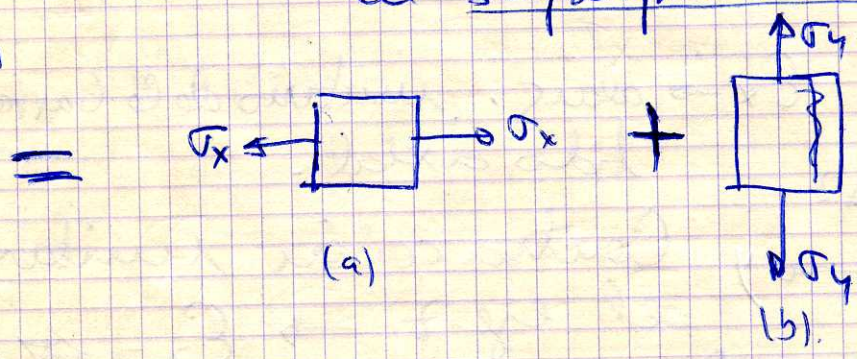
$$\nu = 0.3$$

## Deformación en el estado doble de tensiones



Voy a calcular el alargamiento unitario del elemento según x e y  $\rightarrow \epsilon_x$  y  $\epsilon_y$

Voy a considerar el teorema de superposición:



- (a)  $\rightarrow$  alargamiento unitario:  $\frac{\sigma_x}{E}$  (dirección eje x)
- ~~(a)~~  $\rightarrow$  habrá una contracción:  $-\nu \frac{\sigma_x}{E}$  (dirección eje y)

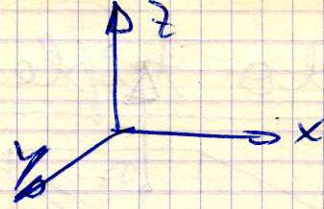
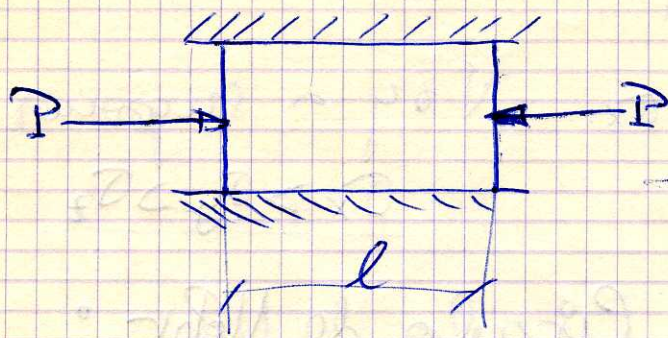
- (b)  $\rightarrow$  alargamiento unitario  $\frac{\sigma_y}{E}$  (dirección eje y.)
- $\rightarrow$  contracción en eje x =  $-\nu \frac{\sigma_y}{E}$  (dirección eje ~~x~~)

Alargamiento unitario total:

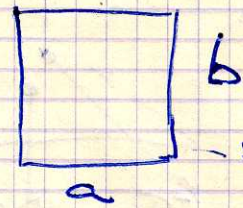
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (\text{dirección eje } x)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{dirección eje } y)$$

Ejemplo:



(16)



- sección de la barra.

Según eje  $x \rightarrow$  contracción  $P$

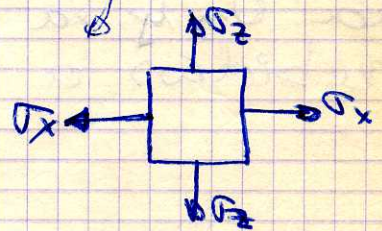
Según eje  $z \rightarrow$  empujada en dos paredes

Según eje  $y \rightarrow$  libre

1º) Plantear las ecuaciones que ligan a las tensiones con los alargamientos unitarios.

Aislando un elemento de la barra

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \right\}$$



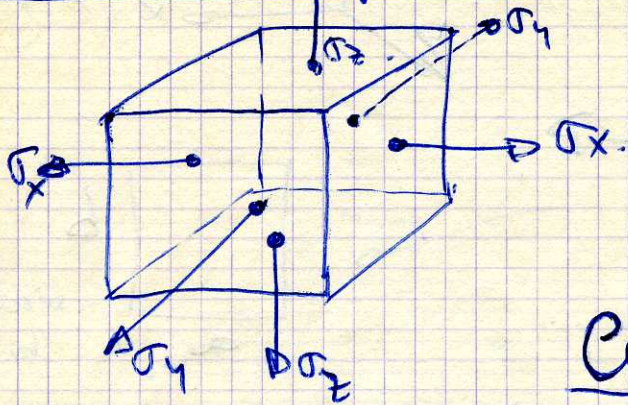
Pero  $\sigma_x = -\frac{P}{Arec} = -\frac{P}{ab}$  (signo - por ser a compresión)

~~Así~~ Alargamiento total en eje  $z = 0$  (por estar empujada la barra)  $\rightarrow \sigma_z = 0$  y por tanto  $\epsilon_z = 0$

Ya tengo 4 ecuaciones con 4 incógnitas  $\epsilon_x \epsilon_z \sigma_x \sigma_z$ .

En el eje  $y$  también habrá alargamiento (y lo veremos más tarde)

# Estado triple de tensiones:



Voy a suponer  
 $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$

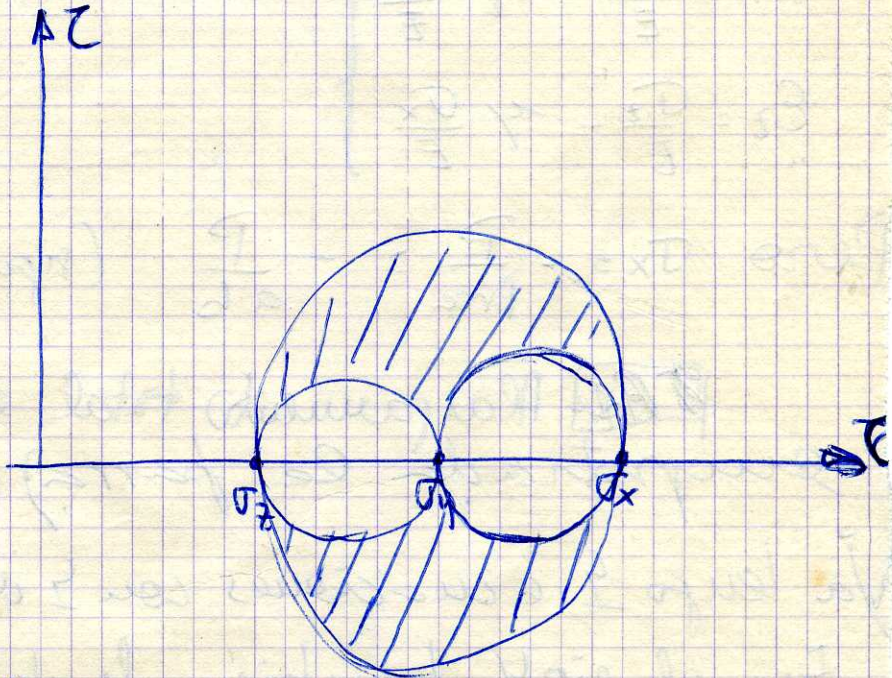
## Círculo de Mohr:

Considero un plano que pasa por el eje x, la normal a ese plano forma con el eje x un ángulo  $90^\circ$ . La  $\sigma_x$  en ese plano no dará ni  $\sigma_n$  ni  $\tau$  porque

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi = 0.$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 180 = 0.$$

La  $\sigma_n$  y la  $\tau$  que existen en ese plano serán debidas a la  $\sigma_y$  y a la  $\sigma_z$



Llevo  $\sigma_z$   $\sigma_y$   $\sigma_x$  sobre su eje

Considero planos que pasan por el eje z, le  $\sigma_z$  no da tensiones en ese plano. Para esos planos el círculo de Mohr será ~~para~~ diámetro  $\sigma_y \sigma_x$  (o sea, como si fuera un esta

O sea como si fuera un estado doble de tensiones

Si considero planos que pasen por el eje  $y$ , ídem de ídem. El círculo será el de diámetro  $\sigma_x \sigma_z$ .

Los planos que pasen por el eje  $x$ , tendrán un círculo de Mohr de diámetro  $\sigma_y \sigma_z$ .

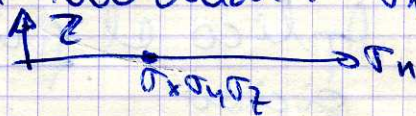
Si considero planos que no pasen por ninguno de los tres ejes, se puede demostrar que el punto representativo del estado de tensiones que actúan en ese plano, es un punto de la zona rayada.

Valor máximo de  $\tau$ :

Será el radio del círculo mayor:  $\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$

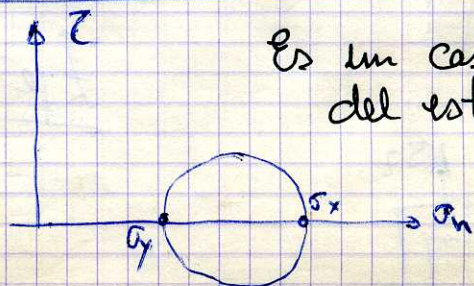
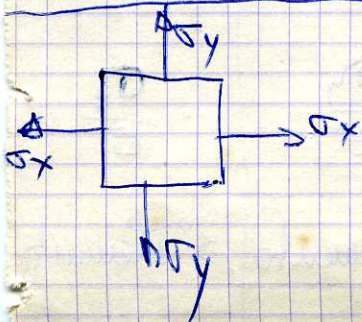
Se produce en un plano que pasa por el eje  $y$  (por ser del círculo grande) y forma  $45^\circ$  con el eje  $x$  (porque  $2\varphi = 90^\circ$ ). También se producirá en el plano perpendicular a éste.

Si  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ , los tres círculos se reducirán a un punto. Esto quiere decir que en ningún plano hay tensión cortante (ordeadas); solo había tensión normal:  $\sigma_n = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$



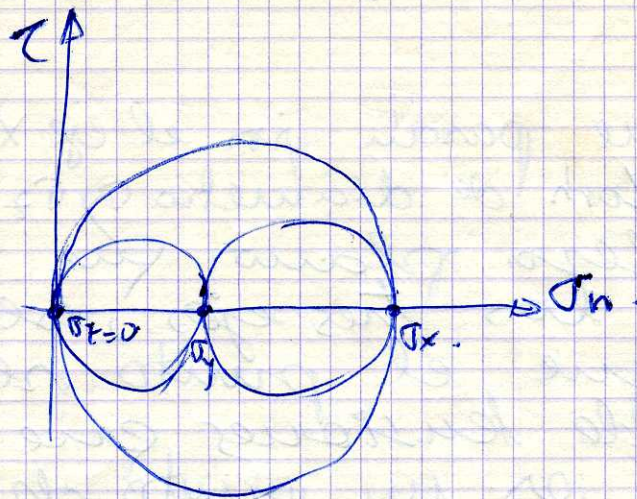
Cualquier plano sería principal (por no haber tensión cortante). Cualquiera dirección sería dirección principal; no habría deslizamiento (que es producido por  $\tau$ ) en ninguna sección.

Cálculo de Mohr para el estado doble de tensiones:



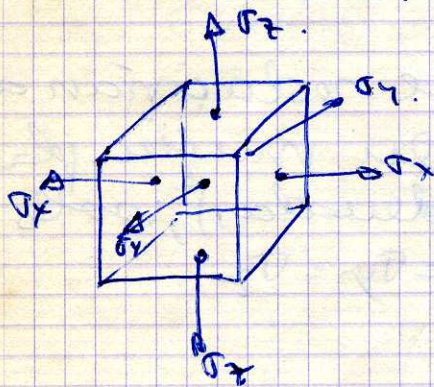
Es un caso particular del estado

do triple, cuando una tensión = 0. En realidad habría 3 círculos de Mohr:



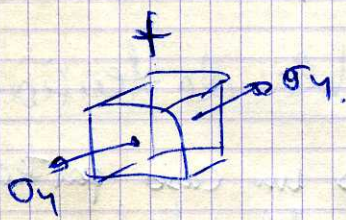
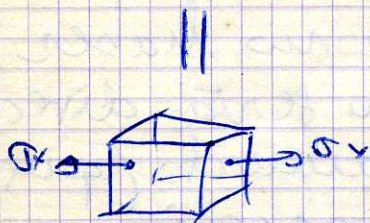
Realmente  $\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$ , pero nosotros seguiremos usando el círculo que habríamos visto antes (el  $\sigma_x$ ) excepto en teoría de la rotura, que usaremos los tres círculos.

DEFORMACIÓN para el estado triple de tensiones:

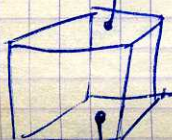


Voy a calcular el alargamiento del elemento en las direcciones de los tres ejes:

Aplico el principio de superposición



+ AS\_z.



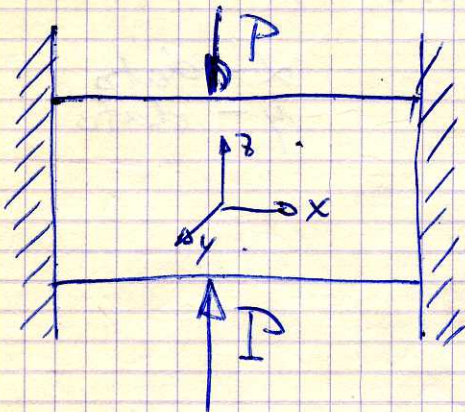
<u>Eje X:</u>	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
<u>Eje Y:</u>	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
<u>Eje Z:</u>	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$
	1º Elemento	2º Elemento	3º Elemento

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \right) \quad (1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{E} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} \right)$$

Problemas: 1). Un cubo de arista unidad está en las siguientes condiciones: según el eje x adosado a dos paredes, según el eje y libre. Se pide: plantear las ecuaciones que ligan a las tensiones con los alargamientos unitarios si, según el eje z sometemos al cubo a fuerzas a compresión de valor P.



Cuando el cubo llegue al equilibrio, estará sometido a  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ . Tendrá unos  $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$

Por las ecuaciones de antes:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \right)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{E} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} \right)$$

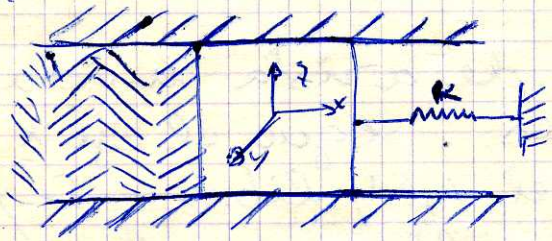
Condiciones:  $\sigma_y = 0$ . Pero se que  $\epsilon_x = 0$  (por estar empotrado)

Según el eje y está libre, luego  $\sigma_y = 0$

Según z está sometido a compresión  $\sigma_z = -\frac{P}{A}$

Lo largo 6 ecuaciones y hallo

2) Un cubo de arista 1 está en las sigs. cond.  
 Según el eje z, entre dos paredes, según y, libre  
 según el eje x por una cara adosado a  
 una pared y por la otra sujeto a un muelle  
 de cd. elástica K en estado inicial de reposo.  
 Se pide: plantear las ecuaciones  
 que ligan  $\sigma$ - $\epsilon$  si el cubo experimenta  
 un  $\Delta t$ .



$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Al final, cuando} \\ \text{el cubo está en equilibrio} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{alarg. unitarias.} \end{matrix}$$

Las alarg. son debidas por una parte a las tensiones y por otras a temperaturas

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \gamma \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \right) + \alpha \Delta t.$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \gamma \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{E} \right) + \alpha \Delta t$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \gamma \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} \right) + \alpha \Delta t.$$

$\alpha$  - dato  
 $\gamma$  - dato.

Pero  $\epsilon_z = 0$  (por estar empotrado en dos paredes)

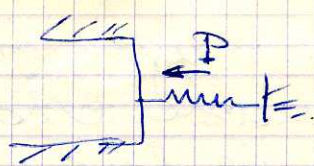
$\sigma_y = 0$  (por estar libre en esta dirección).

El muelle se comprime  $\epsilon_x$  al aumentar la temperatura.  
 Para comprimirlo  $\epsilon_x$ , la fuerza que se hace es  $K\epsilon_x$ . El  
 muelle hará sobre el bloque una fuerza igual  
 y de sentido contrario. Luego  $\sigma_x = - \frac{K\epsilon_x}{A} = - K\epsilon_x$

$A=1$   
 empujaba

Variante. Cuando el muelle, inicialmente, empuja al cubo con una fuerza a compresión de valor  $\bar{\epsilon}$

Futuras. el bloque ejerce sobre el muelle  $P + KE_x$ .



(19)

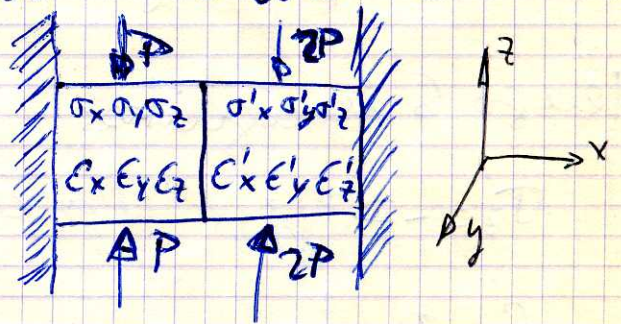
El muelle sobre el cubo, igual y de sentido contrario. Por tanto:

$$\sigma_x = - \frac{(P + KE_x)}{A = 1.}$$

3) Dos cubos de arista unidad están en las siguientes condiciones: según el eje  $x$  adosados por una cara y por las caras opuestas adosados a dos paredes. Según el eje  $y$ , ambos cubos están libres. Se pide: plantear las ecuaciones que ligan a las  $\underline{\sigma}$  con  $\underline{\epsilon}$ . si según el eje  $z$  se le somete a compresión mediante fuerzas  $P$  a uno de los cubos y al otro de valor  $2P$

1º cubo

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\ \epsilon_z &= \end{aligned} \right.$$



2º cubo

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{\sigma'_x}{E} - \nu \frac{(\sigma'_y + \sigma'_z)}{E} \\ \epsilon'_y &= \\ \epsilon'_z &= \end{aligned} \right.$$

no  $\sigma_y = \sigma'_y = 0$  por estar libres los cubos en la dirección  $y$ .

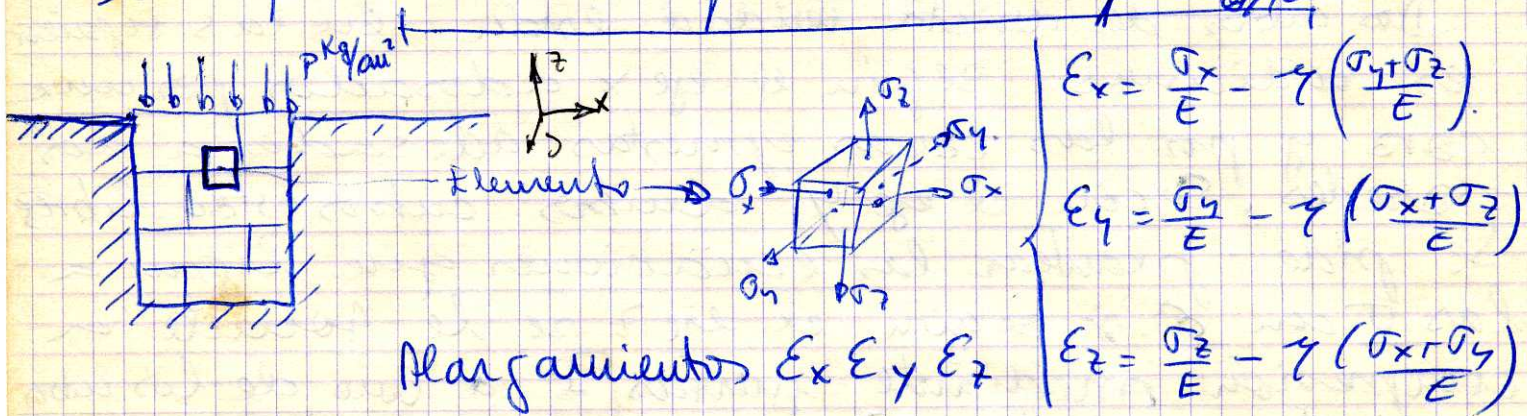
$$\sigma_z = -\frac{P}{A} = -P. \quad \sigma'_z = -\frac{2P}{A} = -2P.$$

$$\epsilon_x + \epsilon'_x = 0 \quad (\text{lo que se alarga uno se acorta el otro})$$

$$\sigma_x = \sigma'_x$$



4) En un agujero de hormigón prácticamente indeformable está introducido un cilindro macizo de ladrillo. Se pide: aislar un elemento cúbico de ladrillo y calcular las tensiones a las que está sometido en el supuesto de que según el eje del cilindro se ejerza una presión de  $p \text{ Kg/cm}^2$ .



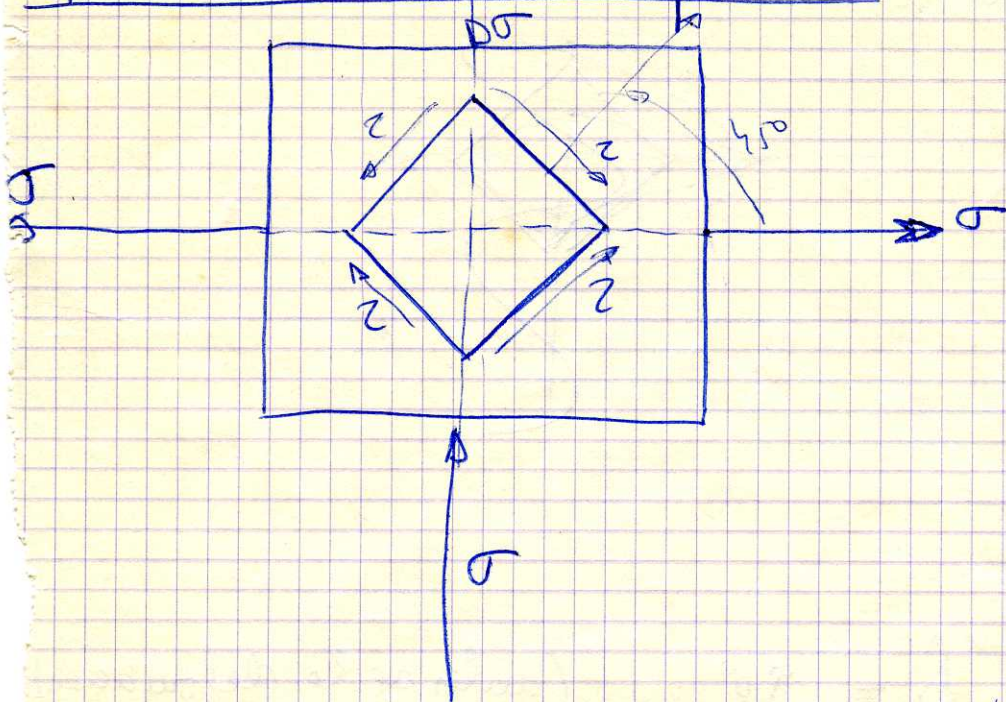
Tengo 6 incógnitas:

$$\sigma_z = -P \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{a compresión}).$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= 0. \\ \epsilon_y &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ por ser indeformable.}$$

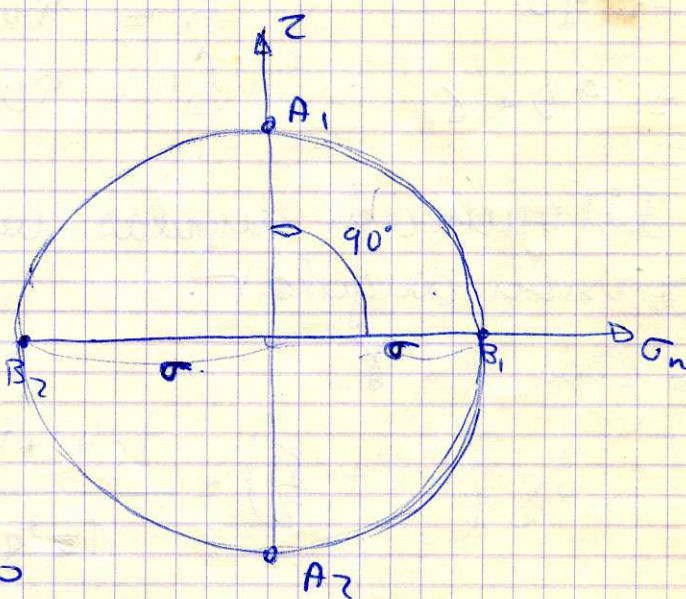
# Tensión cortante pura:

(20)



## Circulo de Mohr:

En dos pto  $A_1$  y  $A_2$   
 $\sigma_n = 0$ , y solo existe  $\tau$   
de valor  $\tau = \sigma$ .



Definen un diámetro del círculo de Mohr; por tanto representan el estado de tensiones en dos caras perpendiculares. Como  $2\varphi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$  (ángulo que forma la normal a la cara con el eje) la  $\tau$  en esa cara será positiva, haciendo que gire en el sentido del reloj. En la cara  $\perp$ , será de sentido contrario.

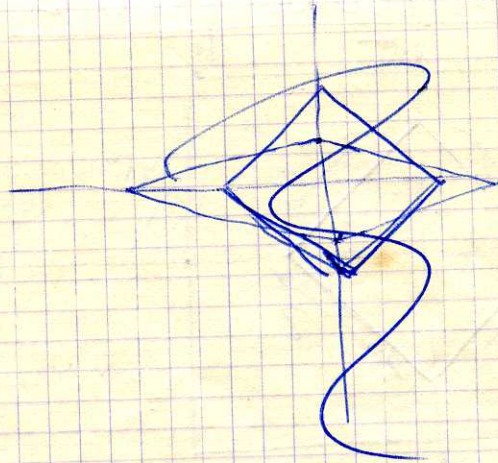
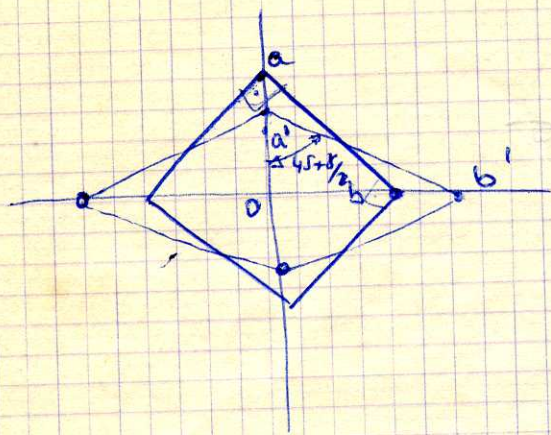
Si el elemento está sometido únicamente a tensiones cortantes. Se dice que trabaja a tensión cortante pura.

Deformación de este elemento: la diagonal vertical

se acortará; sin embargo lo horizontal se alargará después de la deformación el

se alargará también de los máximos el

elemento quedará:



$$\hat{a} \rightarrow 90^\circ$$

$$\hat{a}' = 90 + \gamma$$

$$\hat{b} = 90^\circ$$

$$\hat{b}' = 90 - \gamma$$

(antes de la deformación)

(después de la " ")

$\gamma \equiv$  deformación angular unitaria del elemento, o distorsión angular.

Relación  $\tau - \gamma$

$$\operatorname{tg} \left( 45 + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} 45 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} 45 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2} = \frac{ob'}{oa'} =$$

$$= \frac{ob + bb'}{oa + aa'} = \frac{ob + ob \cdot \epsilon_x}{oa + oa \epsilon_y} = \frac{ob (1 + \epsilon_x)}{oa (1 + \epsilon_y)}$$

$$ob = oa$$

$$\frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2} = \frac{1 + \epsilon_x}{1 + \epsilon_y} \quad (1)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Pero  $\sigma_x = \tau$  (ver círculos).

$$\sigma_y = -\tau$$

$$\epsilon_x = \frac{\tau}{E} + \nu \frac{\tau}{E} = \tau \frac{(1 + \nu)}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\tau}{E} - \nu \frac{\tau}{E} = -\tau \frac{(1 + \nu)}{E}$$

Llevando a (1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + \delta/2}{1 - \delta/2} &= \frac{1 + \tau \left( \frac{1+\nu}{E} \right)}{1 - \tau \left( \frac{1+\nu}{E} \right)} \end{aligned} \right\} \delta/2 = \tau \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$$

Despejando  $\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \delta$  Como  $\nu$  y  $E$  son constantes,

hacemos  $\frac{E}{2(1+\nu)} = G$  (Módulo de elasticidad transversal o módulo

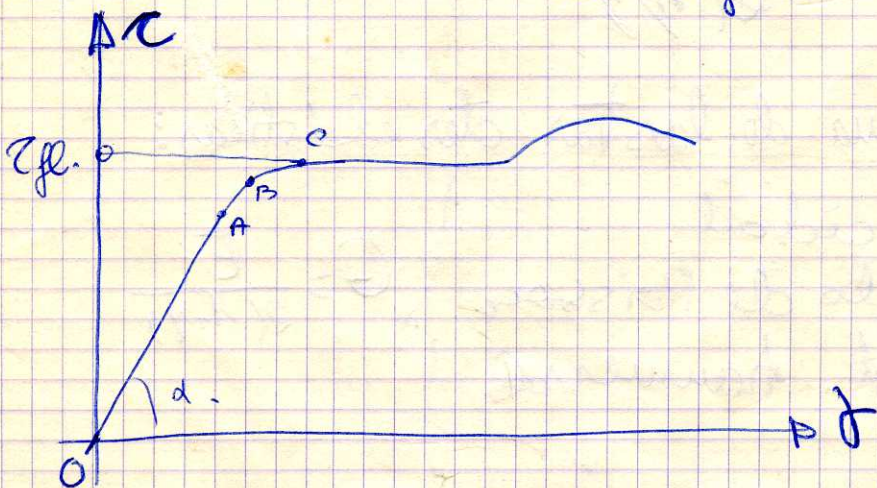
de esfuerzo cortante.)

También módulo de torsión.

$$\boxed{\tau = G \delta}$$

→ fórmula semejante a la  $\sigma = E \cdot \epsilon$ .

ambien para esto hay un diagrama ( $\tau - \delta$ )  
Para el acero tiene la siguiente forma:



A  $\equiv$  límite de proporcionalidad. (desde O a A  $\tau$  y  $\delta$  son proporcionales  $\tau = G \delta$ ) Por tanto  $\tan \alpha = \frac{\tau}{\delta} = G$ .

B  $\equiv$  límite de elasticidad. Hasta B el elemento no quedaria con deformación angular permanente.

C  $\equiv$  al pto de fluencia. La  $\tau$  de C  $\rightarrow$   $\tau$  de fluencia.

Para el acero,  $\tau_{fl.} \begin{cases} 0.55 \sigma_{fl.} \\ 0.65 \sigma_{fl.} \end{cases}$

Interese que el material trabaje dentro de la zona elástica para que no quede con deformación angular permanente. Por tanto le hare trabajar a una  $\tau$  de trabajo  $\tau = \frac{\tau_{fl.}}{n}$  ( $n = \text{coef. de seguridad}$ )

Para el acero,  $n = 2$  (como en  $\sigma$ ).

Las tres ctes elásticas son:

$E \rightarrow$  Módulo de elasticidad.

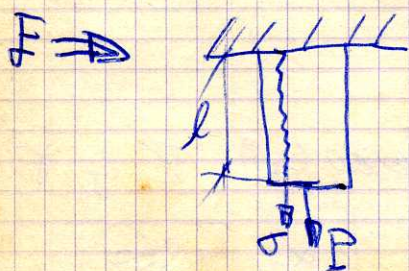
$\nu \rightarrow$  Módulo de Poisson.

$G \rightarrow$  Módulo de elasticidad transversal

Relación:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Definir cada una de las tres ctes elásticas:

$$\left. \begin{array}{l} E = \text{módulo elasticidad.} \\ \nu = \text{coef. o módulo de Poisson} \\ G = \text{mód. de elast. transversal} \end{array} \right\} G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



$\sigma = E \cdot \epsilon$  Haciendo  $\epsilon = 1$ ,  $\sigma = E$ .

$E$  es la tensión que produce un alargamiento unitario = 1.

$G \Rightarrow \tau = G \cdot \gamma$   $\tau =$  tensión cortante.  $\gamma =$  deform. angular unitaria

# ~~Tensiones en Armaduras~~

Haciendo  $\nu = 1$   $\tau = G$ .

$G \equiv$  valor de la tensión cortante que produce una  $\gamma = 1$ .



$\epsilon_x =$  (alarg. unitario axial)

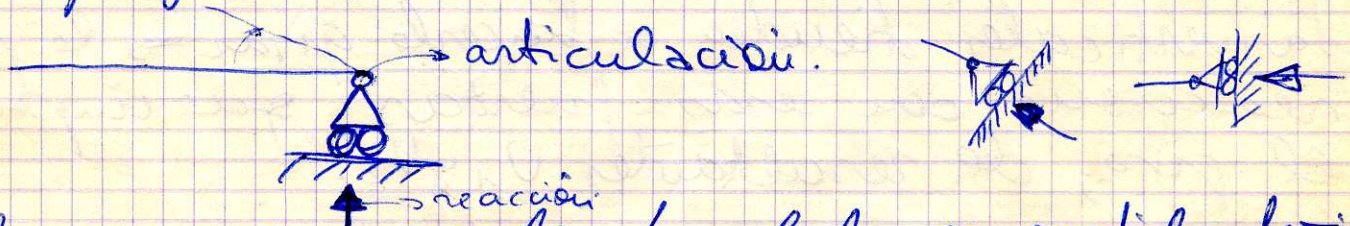
Se comprobaba que en el sentido lateral, la barra experimenta una contracción lateral unitaria que vale  $\mu \cdot \epsilon_x$ , siendo  $\mu$  coef. o mod. de Poisson (ya etc etc definidos)

## LECCIÓN 3:

Momento flector y esfuerzo cortante:

Tipos de apoyos en vigas:

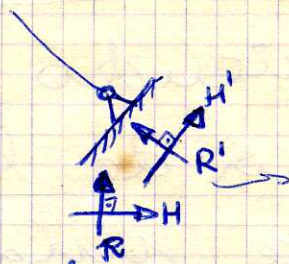
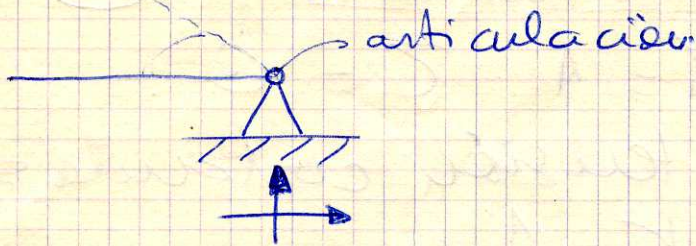
1) Apoyo móvil o articulación móvil.



El carro se puede trasladar en sentido horizontal, pero no puede levantarse del suelo. La barra puede girar alrededor de la articulación.

La única reacción que puede existir es perpendicular al plano de apoyo (hacia arriba o hacia abajo). No hay horizontal porque no hay nada que impida deslizar al carro en sentido horizontal.

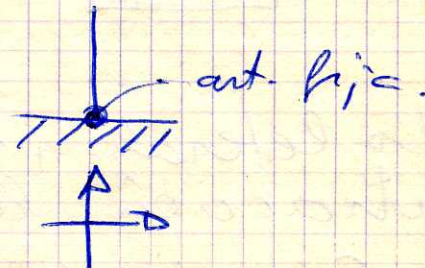
## 2º) Apoyo fijo o articulación fija



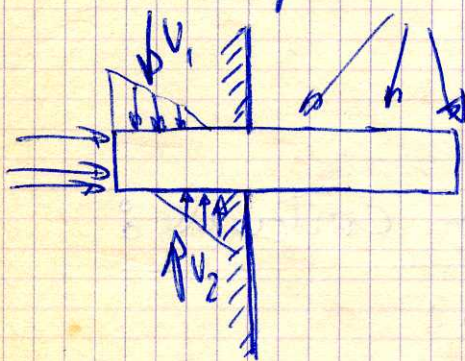
Las partes de las dos fuerzas resultantes iguales.

Puede existir reacción vertical y horizontal, porque el cuerpo está sujeto y no se desplaza en sentido horizontal.

También se suele representar →



## 3º) Empotramiento → está metido en la pared

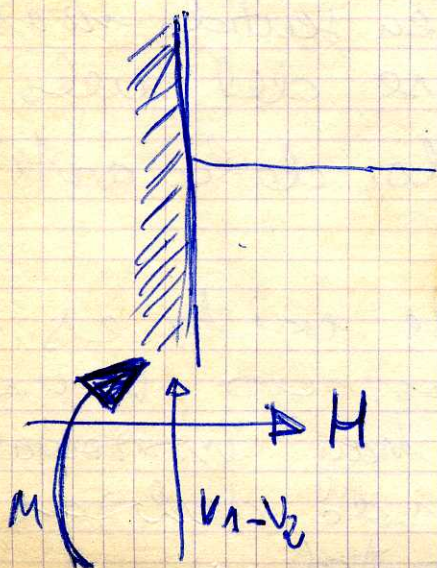


La comp. horizontal de las fuerzas que actúan sobre la barra tienden a meterla (o a sacarla) de la pared. Entonces la pared reacciona hacia afuera.

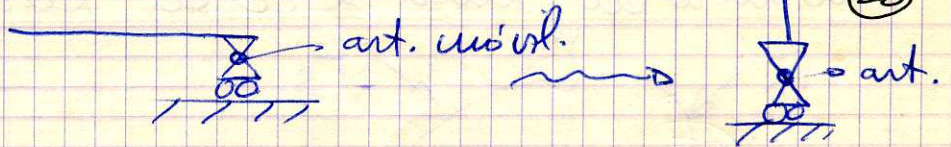
Las verticales tienden a hacerlo girar → la pared reacciona con esas fuerzas que impiden el giro, de resultantes  $V_1$  y  $V_2$ .

Ⓜ → momento (mal llamado por de empotramiento)

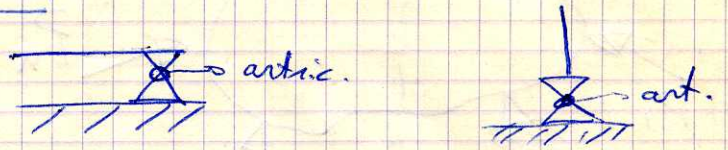
Q sea, tres reacciones: dos fuerzas perpendiculares y un momento llamado por de empotramiento



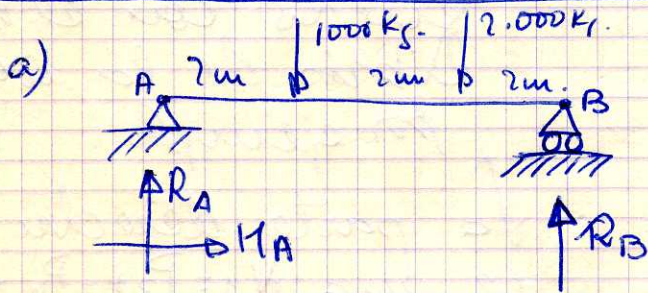
Otra manera de representar una articulación móvil:



Otra de representar la fija:



Cálculo de reacciones en estructuras:



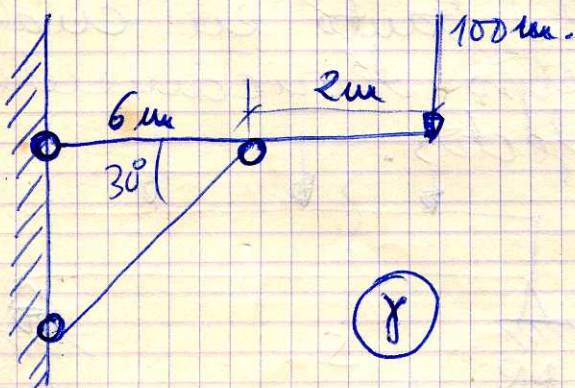
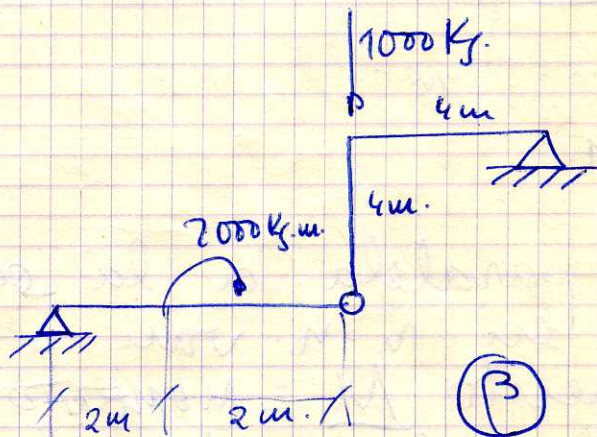
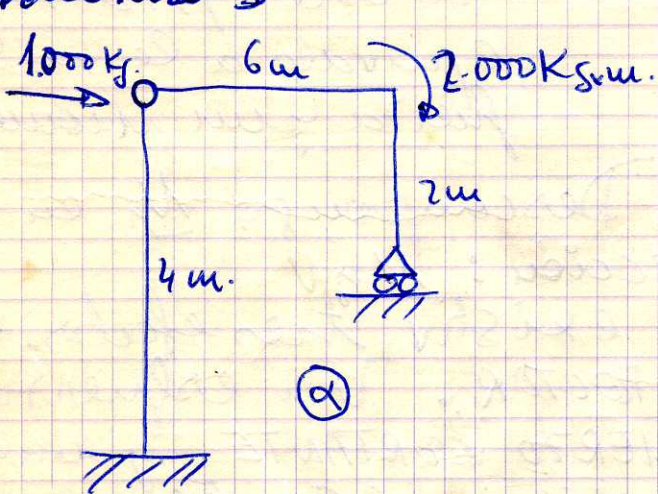
$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_A + R_B - 1000 - 2000 = 0$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

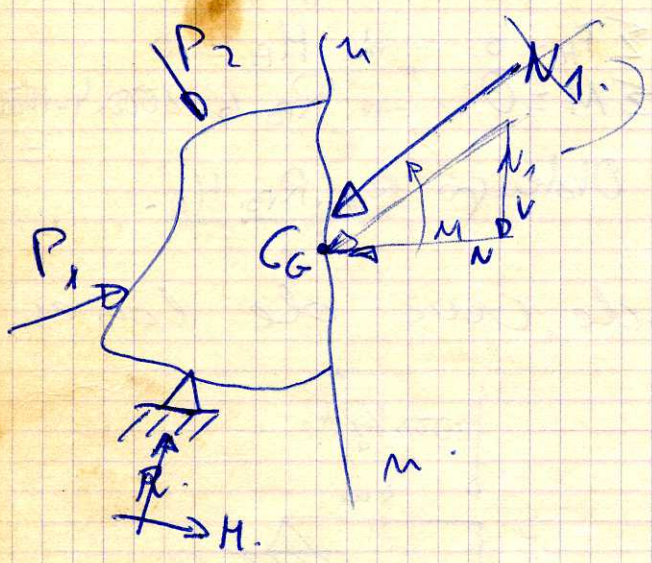
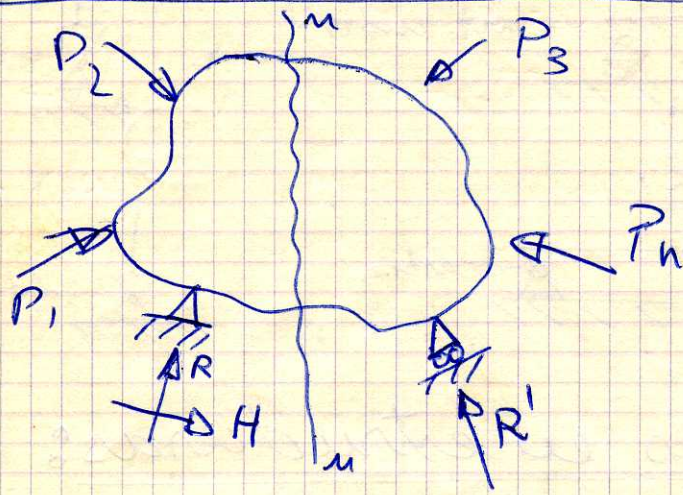
$$\sum M = 0 \rightarrow R_B \cdot 6 - 2000 \cdot 4 - 1000 \cdot 2 = 0$$

Obtengo  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_A$ .

Calcular las reacciones en cada uno de las estructuras:



Momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo normal en una sección cualquiera de un cuerpo



Un cuerpo sometido a las cargas  $P_1, P_2, P_3, P_n$ . Habrá esas reacciones.

Corto el cuerpo por una sección  $n-n$  cualquiera y me quedo con el equilibrio de la izda.

Por ejemplo:

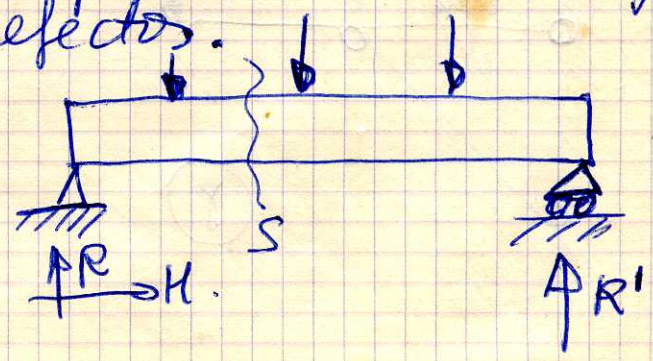
La parte derecha de una  $N_1 = P_3 + P_n + R$ .  $C_G$  es el c.d.g. de la sección: trasladado a este pto  $N_1$  equivale a la misma fuerza y un momento.

Descompongo  $N_1$  en  $N$  y  $V$ .

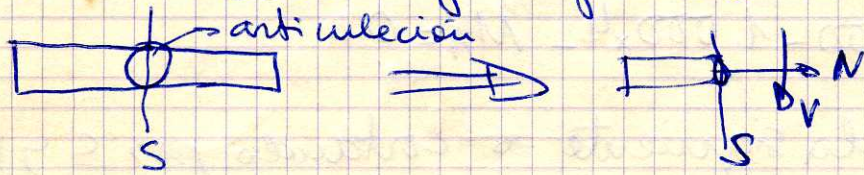
o sea, en  $n-n$  van a existir tres efectos: un momento  $M \equiv$  MOMENTO FLECTOR. Un esfuerzo paralelo a la sección  $\equiv$  ESFUERZO CORTANTE y un esfuerzo  $N$  perpend. a la sección por el  $C_G$  llamado ESFUERZO NORMAL. Por lo tanto en cualquier sección de cualquier cuerpo teóricamente pueden existir estos tres efectos.

Si tengo esta viga:

cortando por  $S$  y me quedo con el equilibrio de la izda, aparecerán (teóricamente) los tres efectos

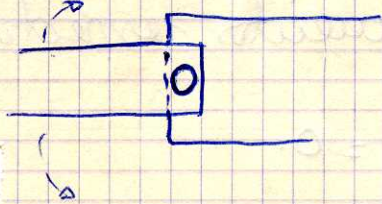


Si en una sección existe una articulación, el momento flector es cero: solo hay esfuerzo cortante y esfuerzo normal. (24)



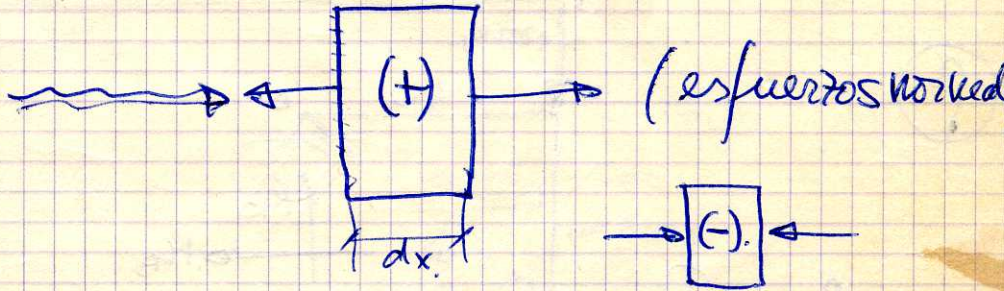
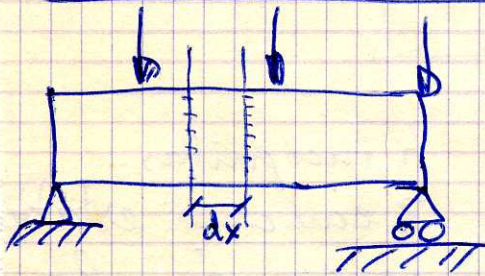
debido a que pueden haber giro.

Vamos a ver cómo se hace esta articulación:



Se realiza un empalme mediante un remache.

### Convención de signos para $M$ , $V$ y $N$

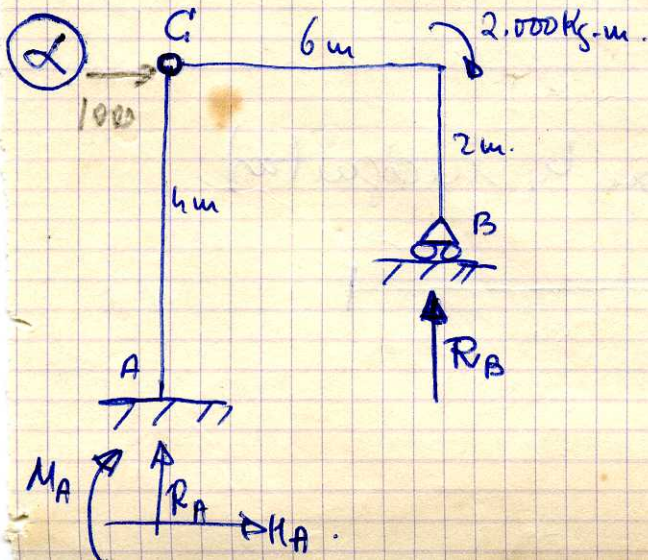


(momentos flectores)



(esfuerzo cortante)  
Hacen girar al elemento en el sentido de las agujas del reloj.

### PROBLEMAS página anterior



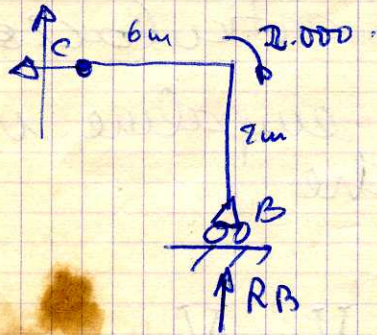
4 incógnitas.  
3 ecuaciones estáticas y además la condición de que el momento en C = 0 por ser una articulación.  
Ecuaciones

$$\sum F_V = 0 ; R_A + R_B = 0$$

$$\sum F_H = 0 ; H_A + 1000 = 0$$

$$\sum M_A = 0 ; R_B \cdot 6 - 2000 - 1000 \cdot 4 - M_A = 0$$

La condición  $M_c = 0$  es la siguiente  $\rightarrow$  cortando por  $\subseteq$  y su dándose con el equilibrio de la parte: habrá en G un esfuerzo cortante y un momento

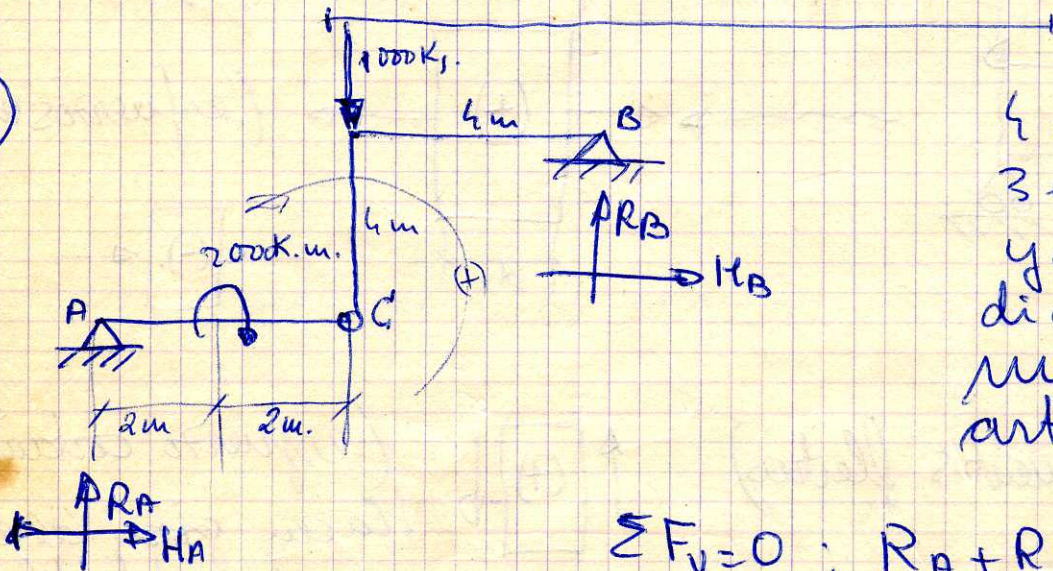


Tomando momentos respecto de G:

$$R_B \cdot 6 - 2000 = 0.$$

Ya tengo 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

(B)



4 incógnitas.

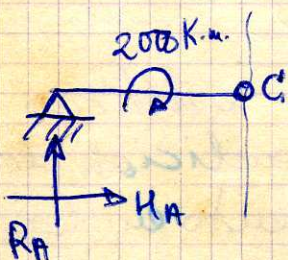
3 ecuaciones estáticas y además, la condición de que el momento en la articulación = 0

$$\sum F_V = 0 ; R_A + R_B - 1000 = 0$$

$$\sum F_H = 0 ; H_A + H_B = 0$$

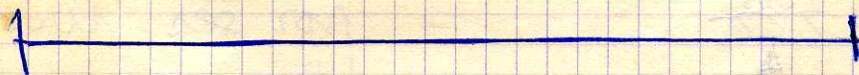
$$\sum M_c = 0 ; R_B \cdot 4 - H_B \cdot 4 - 2000 - R_A \cdot 4$$

$M_c = 0 :$



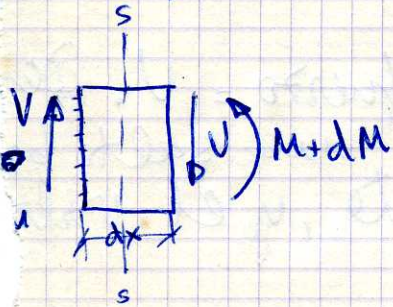
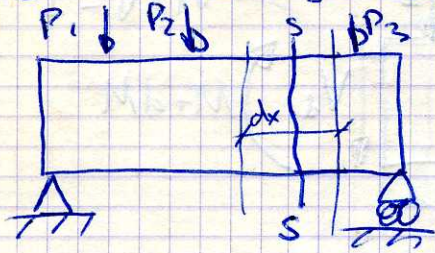
$$R_A \cdot 4 + 2000 = 0$$

(4 ecuaciones con 4 incógnitas)



# Relación esfuerzo cortante - momento flector: (25)

1º Que la sección sea como la de la figura (o sea, no hay momento ext. ni carga ext. en esa sección). Tomo un  $dx$  alrededor de  $S$  y lo aislo



$V \equiv$  esf. cortante en la cara  $i dx$ .

$I$  dem. en la cara dcha. para que haya equilibrio.

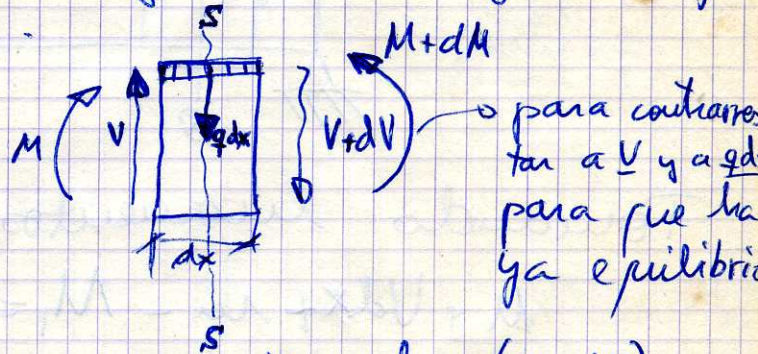
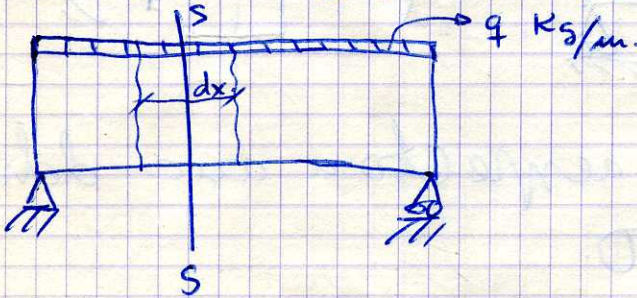
$M \equiv$  momento flector

$M + dM \equiv$  en la dcha. para contrarrestar a  $M$  y al momento del par  $V = M + V dx$

o tanto  $V = \frac{dM}{dx}$

El esf. cort. es la derivada del momento flector respecto de  $x$

2º Que la sección sea de una viga con carga uniformemente distribuida.



para contrarrestar a  $V$  y a  $q dx$  para que haya equilibrio

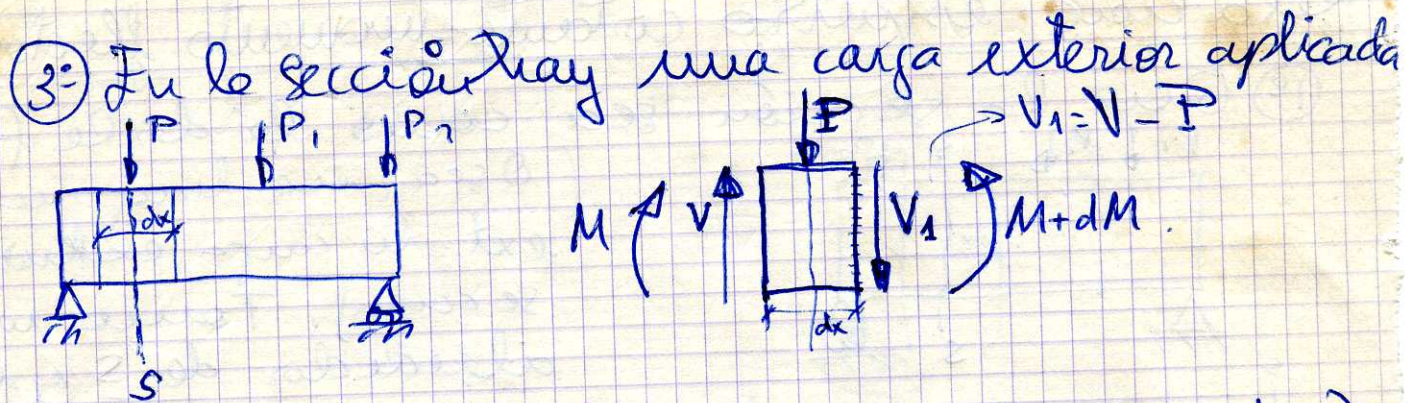
$$V - q dx - (V + dV) = 0$$

$q = - \frac{dV}{dx}$  la carga uniformemente distribuida es la derivada del esfuerzo cortante respecto de  $x$  cambiada de signo.

Tomando momentos respecto a la cara dcha:

$$M + V dx - q dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

$$V dx - dM = 0; \quad V = \frac{dM}{dx} \quad (\text{como antes})$$



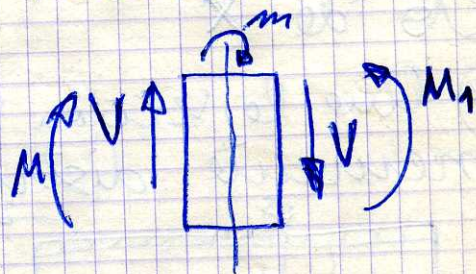
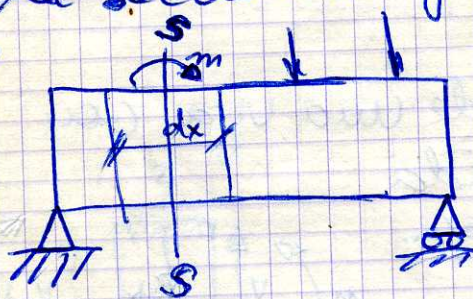
Un momento antes de la sección, el esfuerzo =  $V$ . Después de la sección  $V_1$ . O sea, hay un salto brusco en el valor del esfuerzo cortante, y el valor de ese salto =  $P$

Tomando momentos respecto de la cara derecha

$$M + V dx - P \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

$$\boxed{V \neq \frac{dM}{dx}}$$

4º En la sección hay un momento exterior aplicado



Tomando momentos respecto a cara derecha:

$$M + V dx + m - M_1 = 0.$$

Despreciando  $V dx$  respecto a  $m$ , obtenemos  $\boxed{M_1 = M + m}$

O sea, en la sección hay un salto brusco en el valor del momento flector y ese salto vale  $m$  (momento ext. aplicado).  $V \neq \frac{dM}{dx}$

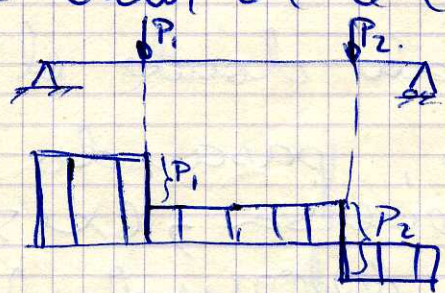
# Diagramas de sollicitaciones. Son tres. (26)

- diagrama de momentos flectores.
- diagrama de esfuerzos cortantes.
- diagrama de esfuerzos normales

Estos diagramas me dan el valor de  $M$ ,  $V$  y  $N$  que actúan en una sección cualquiera de la estructura.

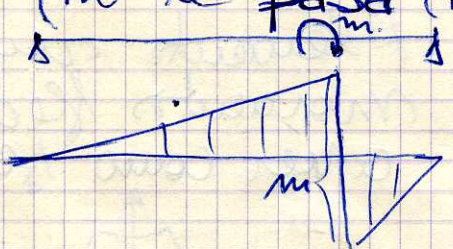
## Normas para dibujar los diagramas:

- 1<sup>o</sup>) Se calculan las reacciones de la estructura.
- 2<sup>o</sup>) En la sección donde hay una carga exterior aplicada, hay un salto brusco en el valor del esfuerzo cortante. Valor del salto = valor de la carga exterior aplicada.



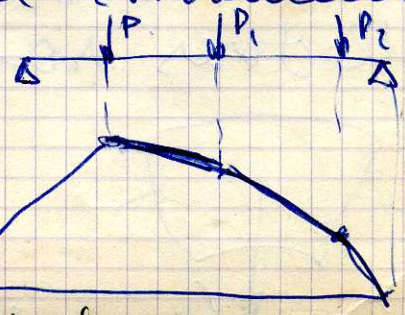
(diagrama de  $V$ )

- 3<sup>o</sup>) En la sección donde hay un momento exterior aplicado hay un salto brusco en el momento flector, pero al esfuerzo cortante no le pasa nada

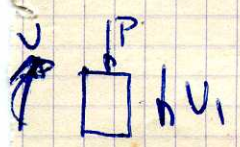


(diagrama de  $M$ )

- 4<sup>o</sup>) En la sección donde hay una carga exterior aplicada, la línea de momentos cambia de pendiente.



(diagrama de  $M$ )

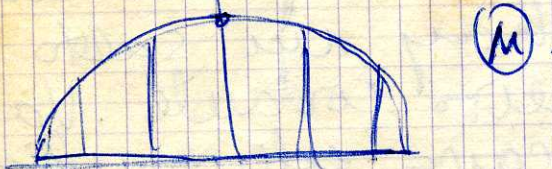
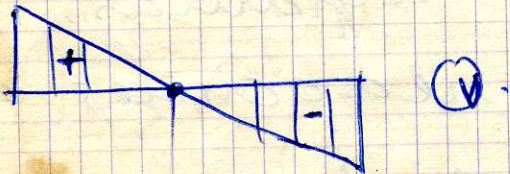
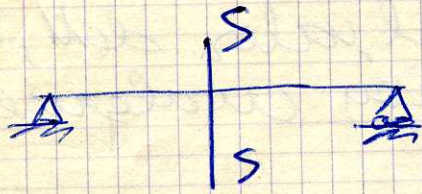


Después de la sección  $\frac{dM}{dx} = V$

Antes de la sección:  $\frac{dM}{dx} = V$ . distinta distinta pendiente

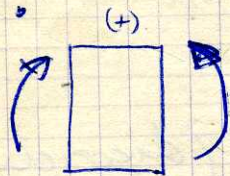
5) En la sección donde el  $V = 0$ , el momento flector es máximo.

Caso  $V = \frac{dM}{dx}$ , si  $V = 0$ ;  $\frac{dM}{dx} = 0$  (máximo).



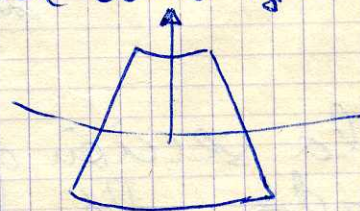
6) En la sección donde el momento flector se hace nulo, pasando de positivo a negativo o viceversa, existe un punto de inflexión en la deformada de la viga.

Deformada o elástica de una viga: es la forma que adopta el eje de la viga después de deformarse.



Elemento sometido a momentos flectores +. Ver cómo se deforma.

El eje adoptaría concavidad hacia arriba. Si los momentos flectores son (-).



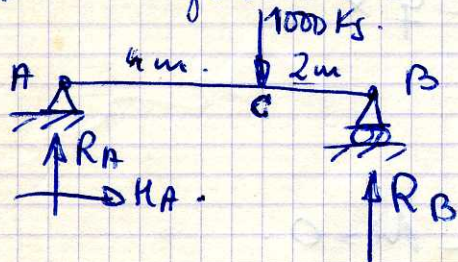
CONCAVIDAD HACIA ARRIBA



(concauidad hacia abajo)

Si sea, la barra se deformará así  $M(+)$  y así  $M(-)$ . Por tanto, cuando el momento cambie de  $(+)$  a  $(-)$  habrá un pto. de inflexión (27)

Dibujar los diagramas de sollicitaciones y la deformada de la viga.



1º) Cálculo de las reacciones:

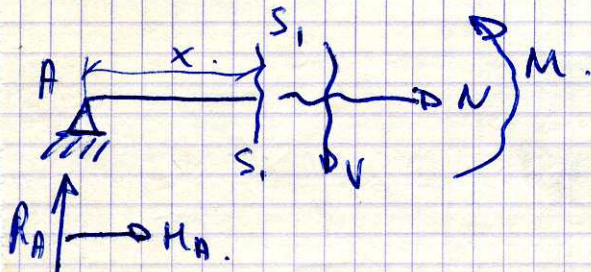
$$R_A + R_B = 1.000$$

$$H_A = 0.$$

$$1.000 \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0.$$

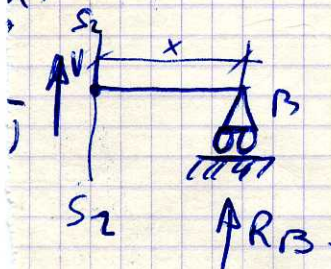
Resulta:  $R_B = \frac{4.000}{6}$        $R_A = \frac{2.000}{6}$        $H_A = 0.$

En C hay un cambio brusco, por haber carga exterior aplicada.



Corto la barra por una sección  $S_1$ , situada a una distancia  $x$  del apoyo A y calculo esfuerzos cortante y momento flector.

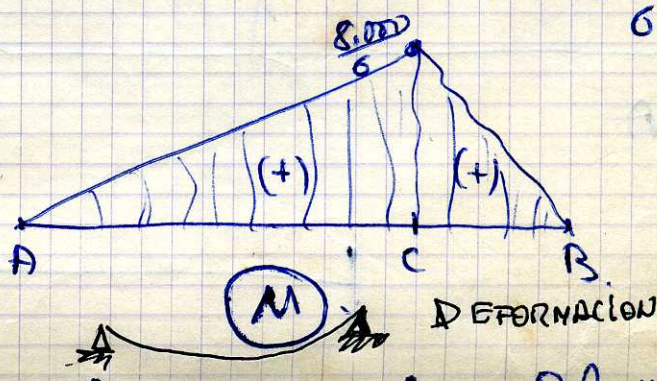
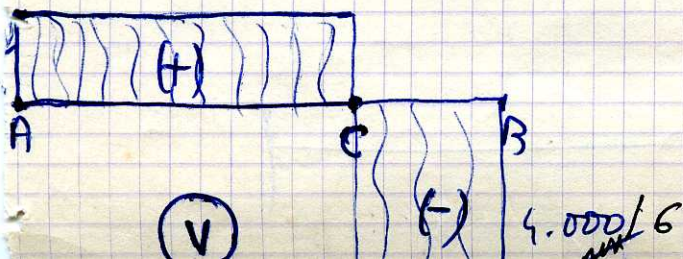
$$\frac{2.000}{6} \cdot x - M = 0; \quad M = \frac{2.000}{6} \cdot x; \quad N = -H_A = 0; \quad V = \frac{2.000}{6}$$



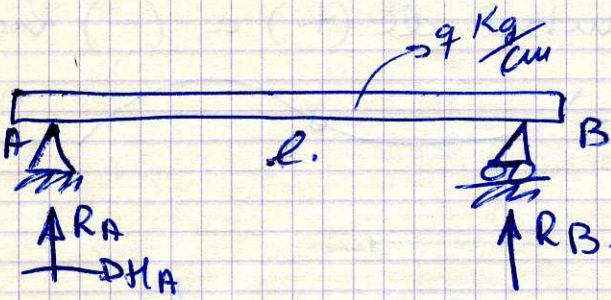
$$V = -\frac{4.000}{6}$$

$$N = 0. \quad \frac{4.000}{6} \cdot x - M = 0$$

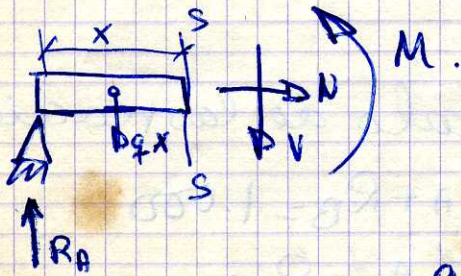
$$M = \frac{4.000}{6} x$$



# Diagramas de la viga de la figura:



$$\left. \begin{aligned} R_A &= q \cdot \frac{l}{2} \\ R_B &= q \cdot \frac{l}{2} \\ H_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Reacciones apoyo}$$

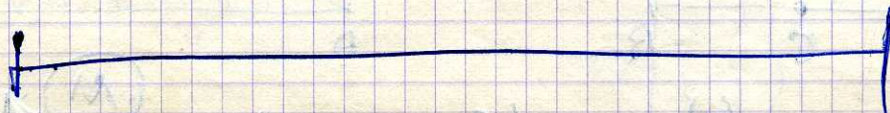
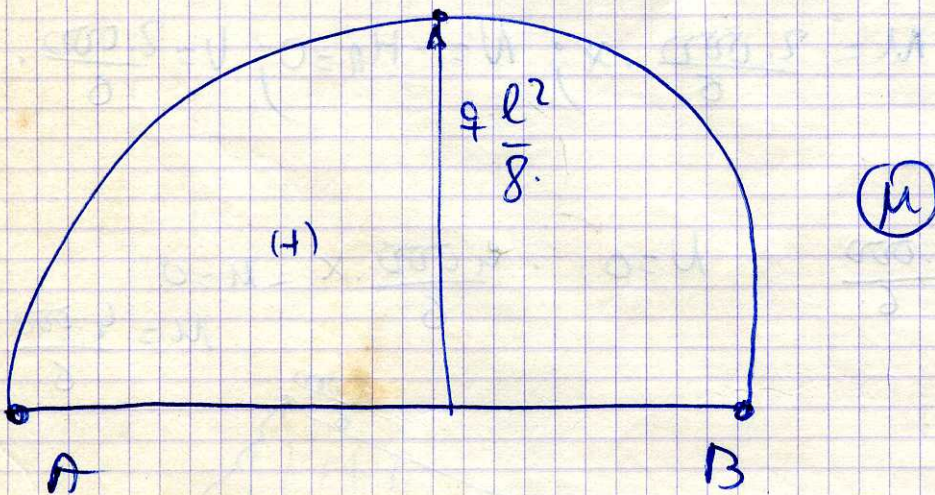
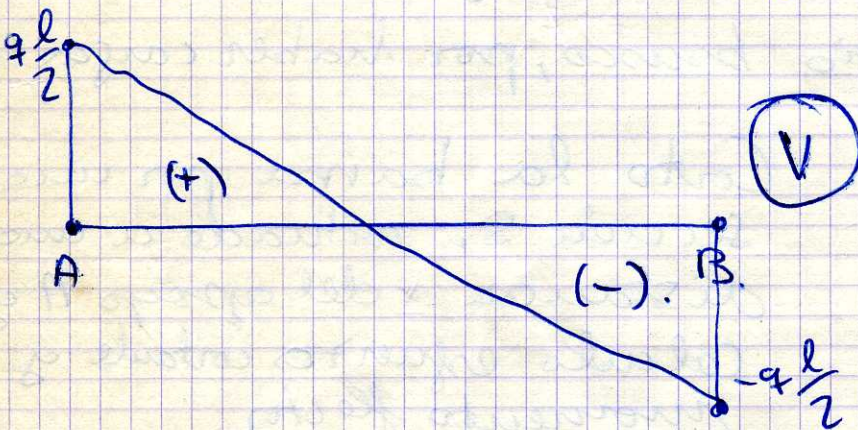


$$V = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x$$

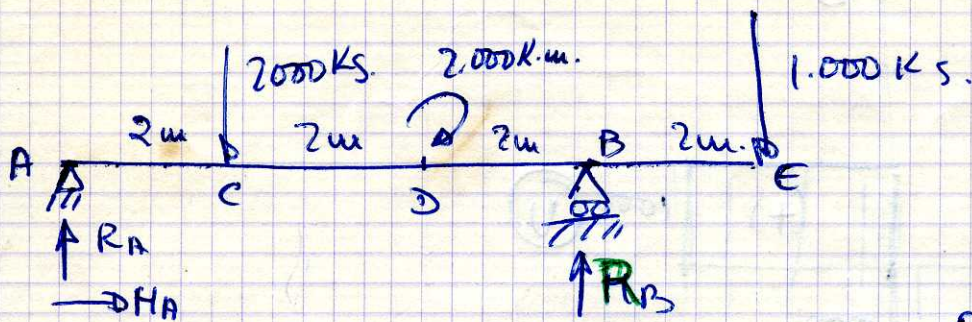
$$N = 0$$

$$q \cdot \frac{l}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M = 0$$

$$M = q \cdot \frac{l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$



# Diagrams:



$$R_A + R_B = 3000 \quad (28)$$

$$H_A = 0$$

$$1000 \times 8 - R_B \times 6 + 2000 + 2000 \times 2 = 0$$

$$R_B = \frac{14000}{6}$$

$$R_A = \frac{4000}{6}$$

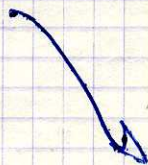
$$H_A = 0$$

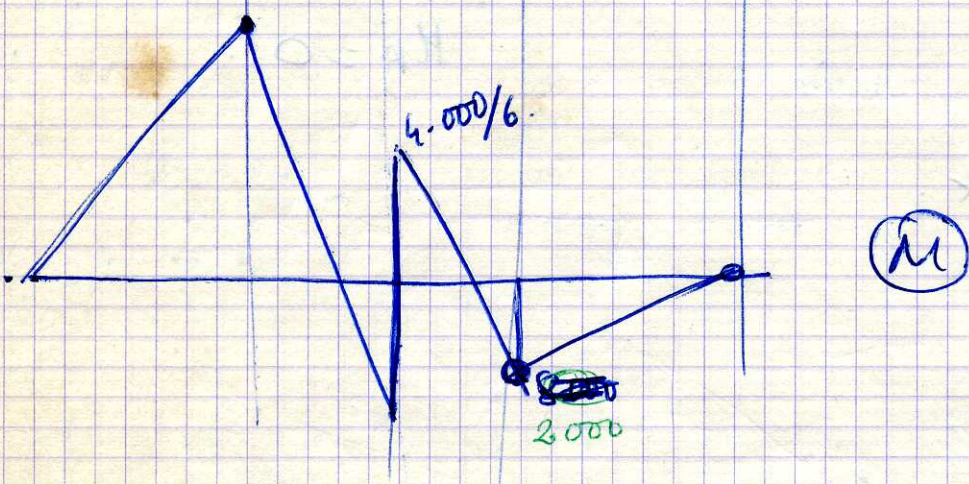
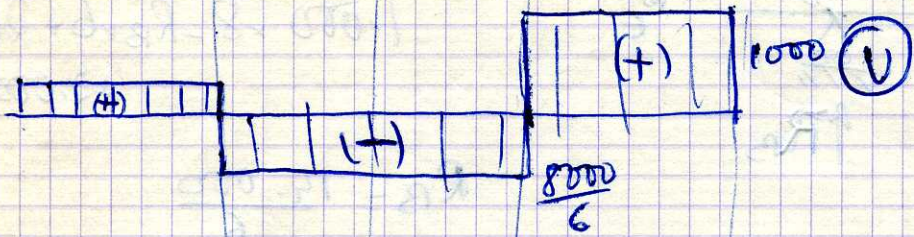
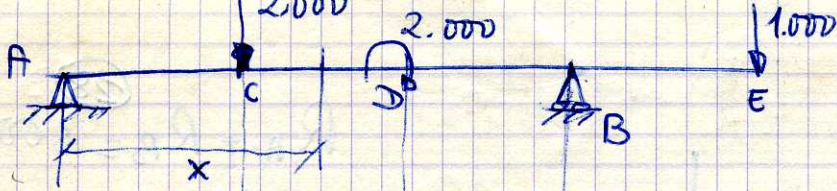
$$+C \left\{ \begin{array}{l} V = \frac{4000}{6} \\ N = 0 \\ M = \frac{4000}{6} \cdot x \end{array} \right.$$

$$+D \left\{ \begin{array}{l} V = -\frac{8000}{6} \\ N = 0 \\ \frac{4000}{6} x - 2000(x-2) - M = 0 \end{array} \right.$$

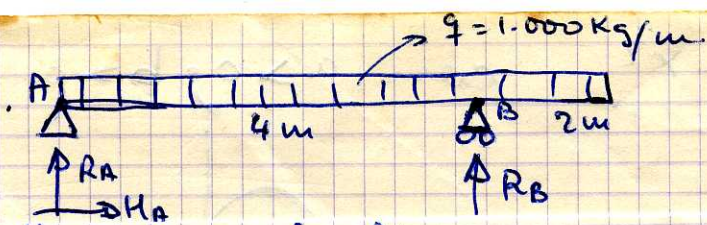
$$+B \left\{ \begin{array}{l} V = -\frac{8000}{6} \\ N = 0 \\ 1000x - \frac{14000}{6}(x-2) + M = 0 \end{array} \right.$$

$$+E \left\{ \begin{array}{l} V = 1000 \\ N = 0 \\ M = \frac{1000}{6}x - 2000 + 1000x \end{array} \right.$$





# Problema:



(29)

Cálculo de las reacciones:

$$R_A + R_B = \text{peso total} = 6.000$$

$$H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 4 - 6.000 \cdot 3 = 0$$

→ sustituyendo la carga de la viga por el peso <sup>total</sup> aplicado en la mitad.

$$R_B = 4.500$$

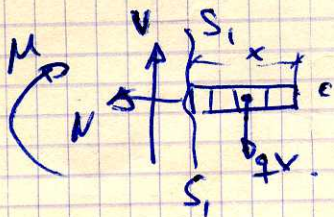
$$R_A = 1.500$$

$$H_A = 0$$

NOTA: la carga de un trazo de viga no se puede sustituir por el peso resultante para calcular efectos, no para hacer el diagrama.

- Desde A a B no hay carga ext. ni mom. ext. aplicado. Luego  $V$  y  $M$  tendrían ecuación única.

- En B hay carga exterior = la reacción. Considero una sección entre B y C a una distancia  $x$  de C:

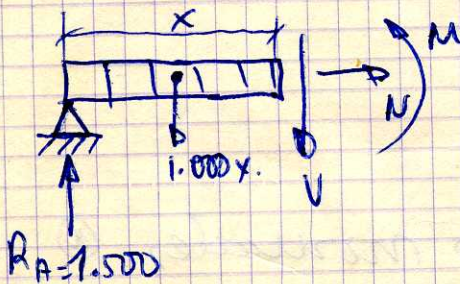


$$\sum F_V = 0 \rightarrow V = 1.000x$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\sum M_{S_1} = 0 \rightarrow 1.000x \cdot \frac{x}{2} + M = 0 \rightarrow M = -500x^2$$

- Tomo una sección del trazo AB, a una dist  $x$  de A:



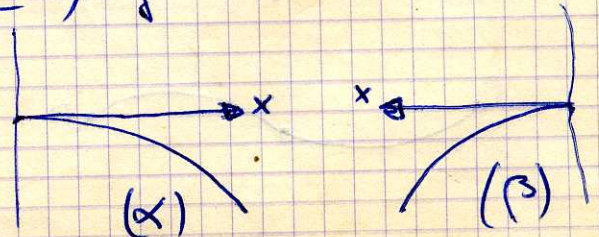
$$\sum F_V = 0 \rightarrow V = 1.500 - 1000x$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M = 1500x - 500x^2$$

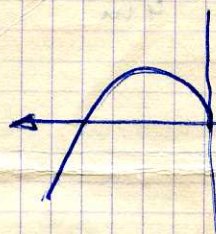
Representación de curvas a)  $y = -ax^2$  siendo  $a > 0$

la represent. de esta curva es según se tome la  $x$  a la dcha o la izda.

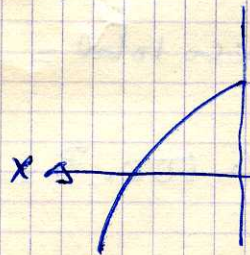
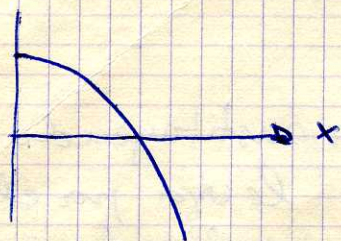


P.ej. en este problema, en el extremo A cuento  $x$  hacia la dcha (a) y en C, hacia la izda (b).

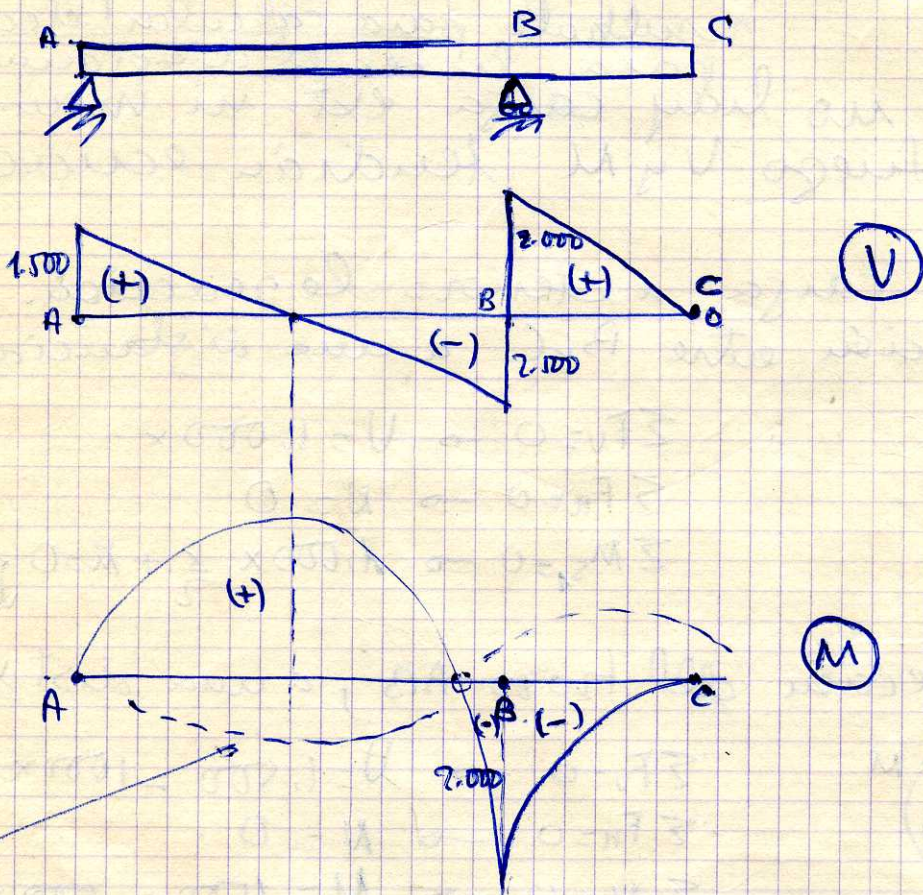
b)  $y = bx - ax^2$  con  $a > 0; b > 0$



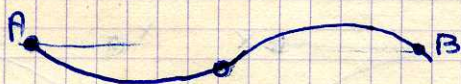
c)  $y = bx - ax^2 + c$



Volviendo al problema, voy a dibujar el diagrama

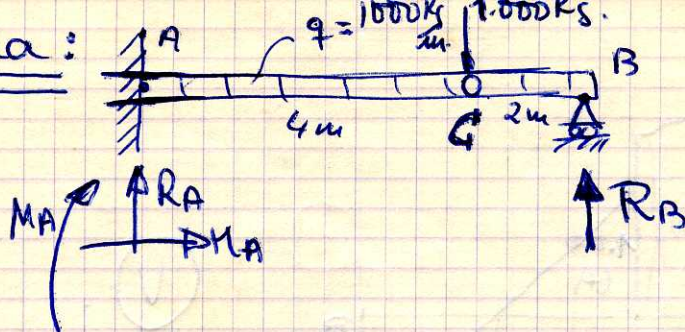


No tiene diagramas de esfuerzos normales <sup>(N)</sup>  
Deformada: para siempre por los apoyos.



El pto. de inflexión no tiene que estar en el eje

# Problema:



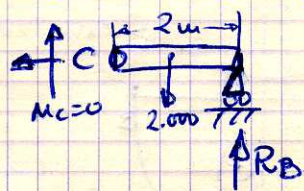
(30)

$$\sum F_v = 0 \quad R_A + R_B = 1.000 + 6.000$$

$$\sum F_H = 0 \quad H_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot 6 - 1.000 \cdot 4 - 6.000 \cdot 3 - M_A = 0$$

h = ecuación: el momento en C = 0, por ser una articulación  $\rightarrow$



$$\rightarrow R_B \cdot 2 - 2.000 \cdot 1 = 0.$$

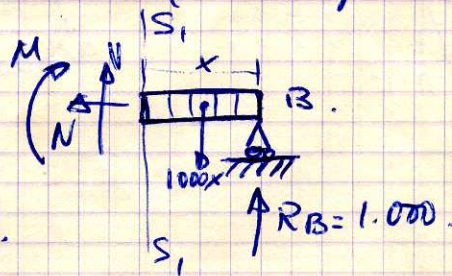
$$\boxed{R_B = 1.000}$$

$M_A = -16.000$  (sentido contrario al de la figura).

$$R_A = 6.000$$

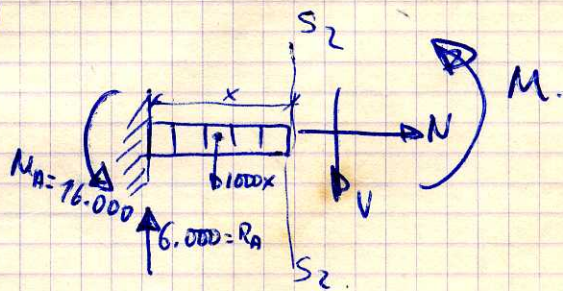
Desde A a C no hay carga ni mom. ext. aplicados. Ecuación única de  $V$  y  $M$ . En C hay un salto brusco y cambian de ecuación por haber carga exterior aplicado (no por haber articulación)

- Sección en el trazo CB

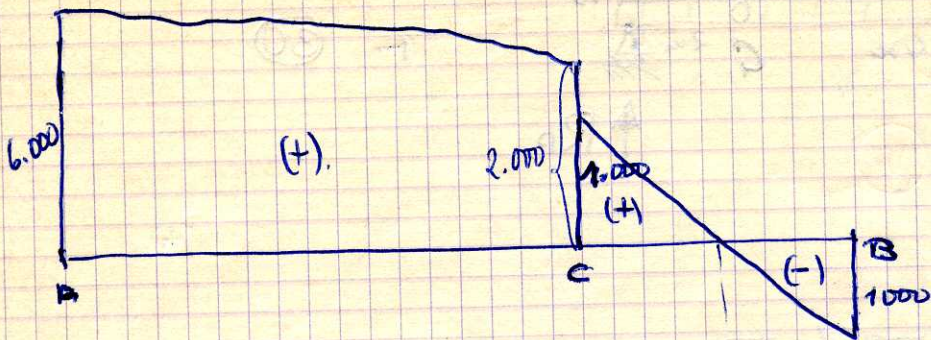


$$BC \begin{cases} V = 1.000x - 1.000 & (\sum F_v = 0) \\ N = 0 & (\sum F_H = 0) \\ M = 1.000x - 500x^2 & (\sum M_{S_1} = 0) \end{cases}$$

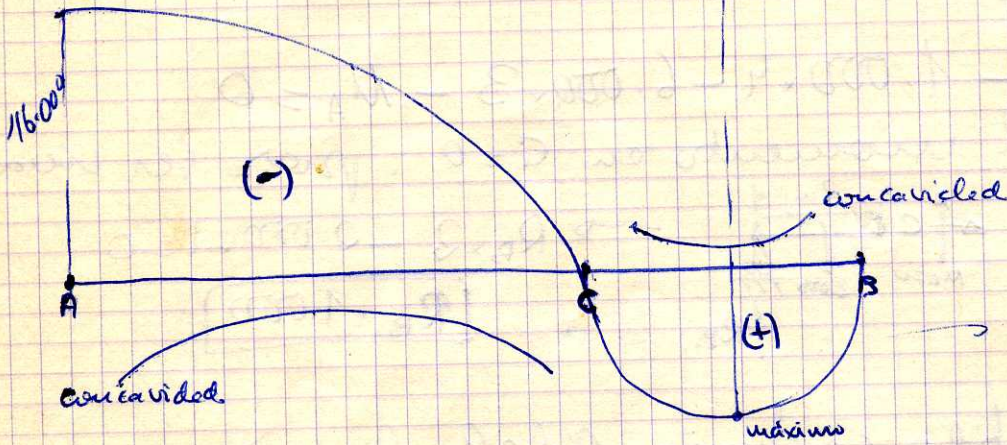
- Sección en el trazo AC



$$AC \begin{cases} V = 6.000 - 1.000x & (\sum F_v = 0) \\ N = 0 & (\sum F_H = 0) \\ M = 6.000x - 500x^2 - 16.000 & (\sum M_{S_2} = 0) \end{cases}$$



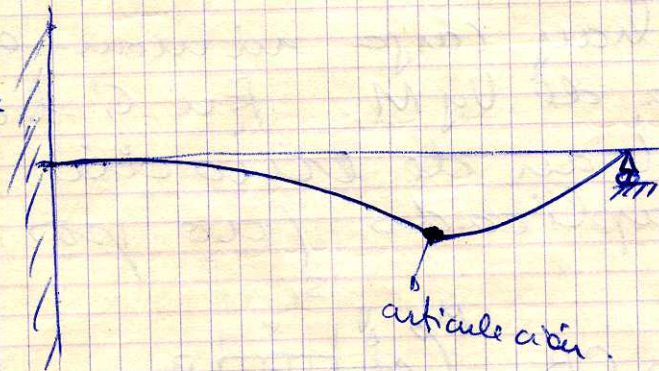
(V)



(M)

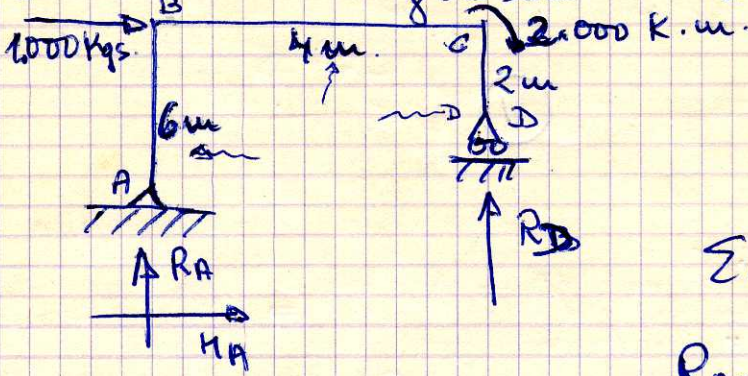
es positivo - se puede representar arriba o abajo con tal de ponerle el signo.

Definición:



Problema. Diagrama de solicitaciones y defor-  
da de la siguiente estructura

(31)



$$R_A + R_D = 0$$

$$H_A + 1000 = 0$$

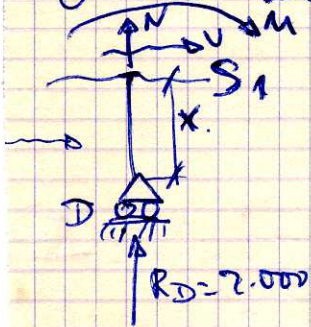
$$\sum M_A = 0; R_D \cdot 4 - 2000 - 1000 \cdot 6 = 0$$

$$R_A = -2000$$

$$R_D = 2000$$

$$H_A = -1000$$

Observo el pórtico desde dentro.

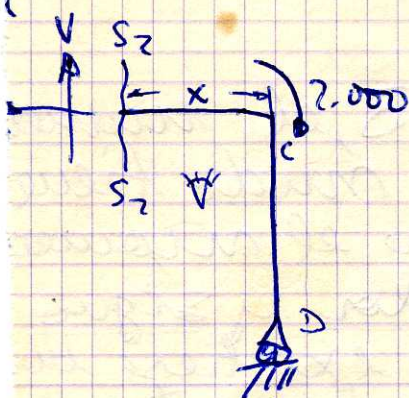


$$\sum F_H = 0; V = 0$$

$$\sum F_V = 0; N = 2000$$

$$\sum M_{S1} = 0; M = 0$$

DC

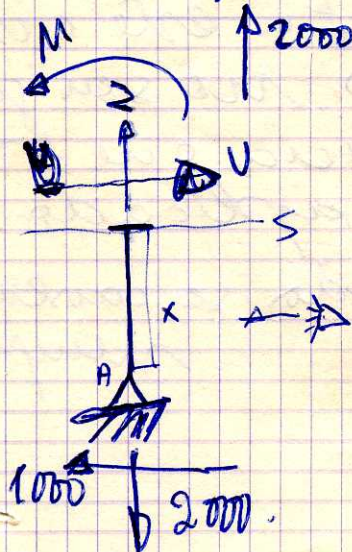


$$\sum F_V = 0; V = -2000$$

$$\sum F_H = 0; N = 0$$

$$\sum M_{S2} = 0; M = 2000x - 2000$$

CB



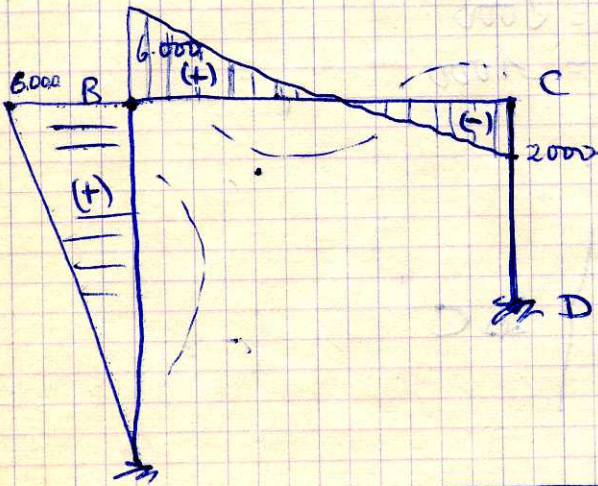
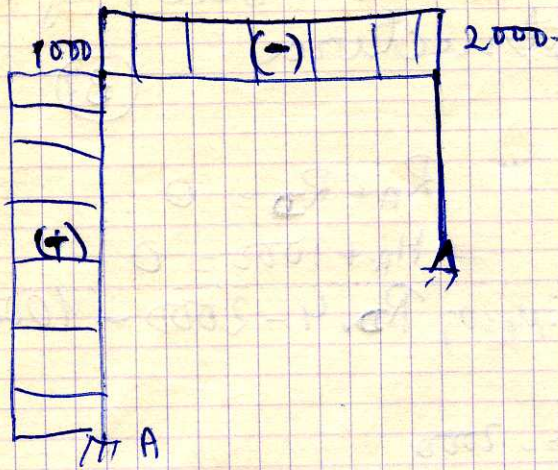
$$\sum F_H = 0; V = 1000$$

$$\sum F_V = 0; N = 2000$$

$$\sum M_S = 0; M = 1000x$$

AB

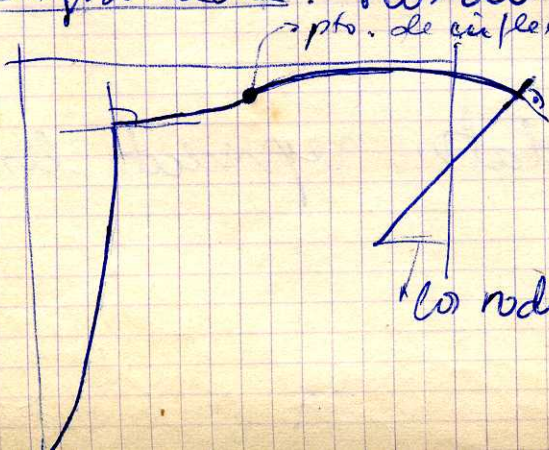
Con estos datos represento los dia-  
gramas.



**IMPORTANTE**

En un nudo rígido tal como el B, el momento flector de una barra en ese nudo tiene que ser exactamente igual que el momento flector de la otra barra en valor y signo a no ser que en el nudo existiese un momento exterior aplicado. En este caso los momentos de las dos barras no son iguales sino que existe una diferencia que es el valor del momento exterior aplicado.

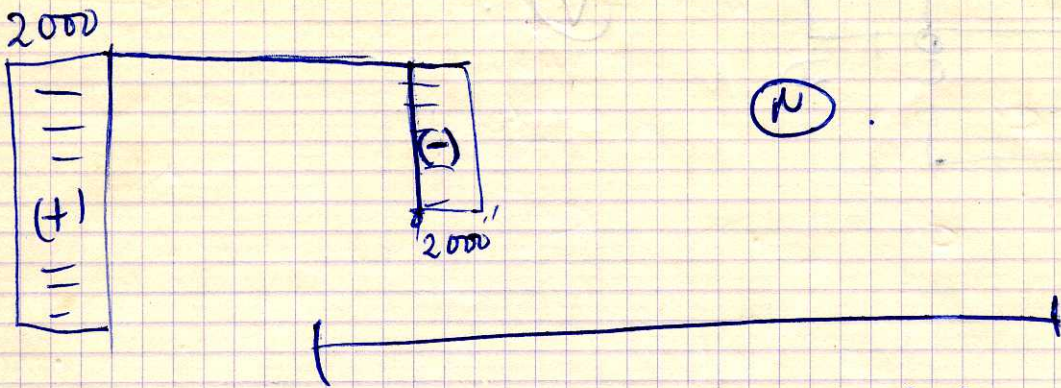
Deformada: los ángulos de los nudos se conservan siempre



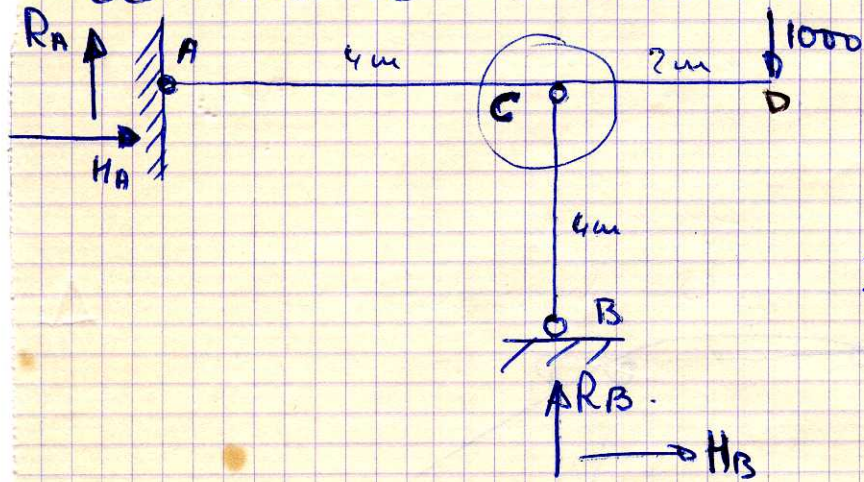
Los rodillos pueden moverse.

# Diagrama de esfuerzos normales.

(32)



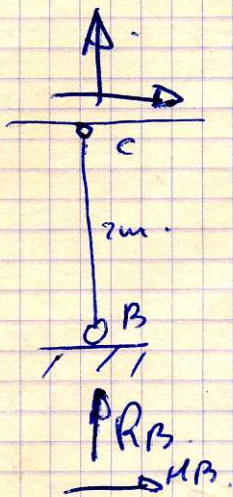
Problema: diagrama de solicitaciones y deformada de la estructura de la figura.



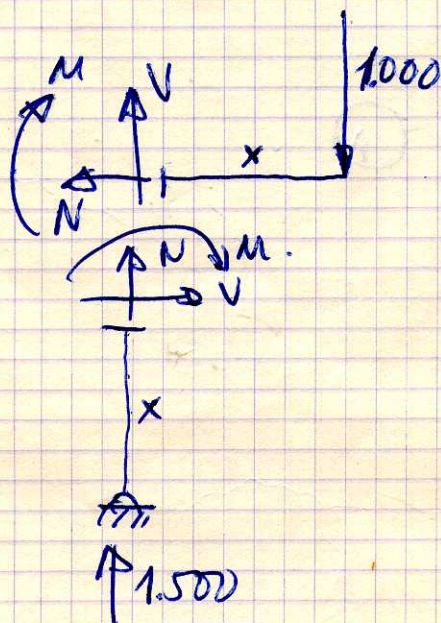
$$R_A + R_B = 1000$$

$$H_A + H_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot 4 + H_B \cdot 4 - 1000 \cdot 6 = 0$$

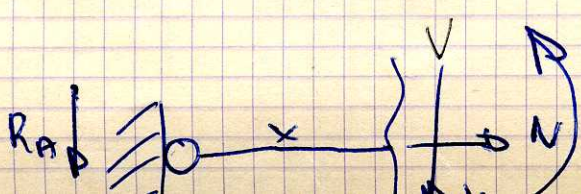


En C hay articulación y no puede haber momento flector. Por tanto  $\rightarrow H_B \cdot 4 = 0 \rightarrow H_B = 0$ .

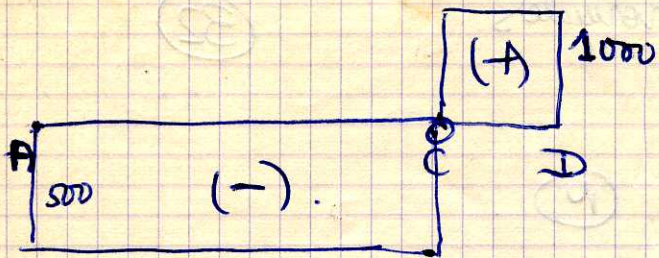


$$CD \left\{ \begin{array}{l} V = 1000 \\ N = 0 \\ M = -1000x \end{array} \right.$$

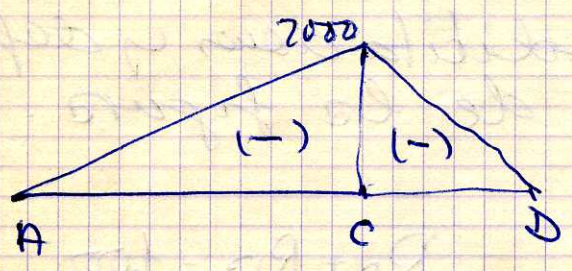
$$CB \left\{ \begin{array}{l} V = 0 \\ N = -1500 \\ M = 0 \end{array} \right.$$



$$AC \left\{ \begin{array}{l} V = -500 \\ N = 0 \\ M = -500x \end{array} \right.$$

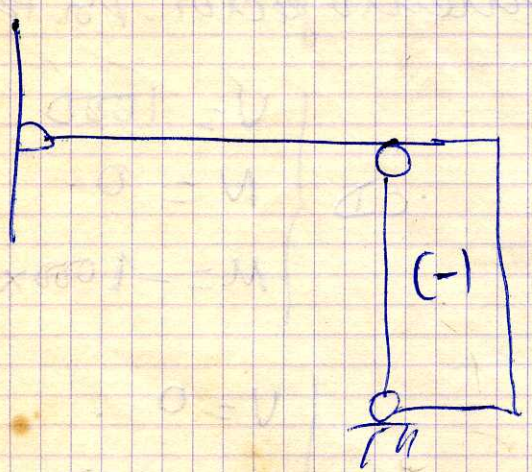
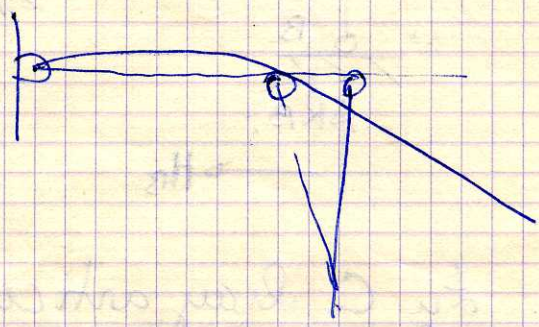


(V)

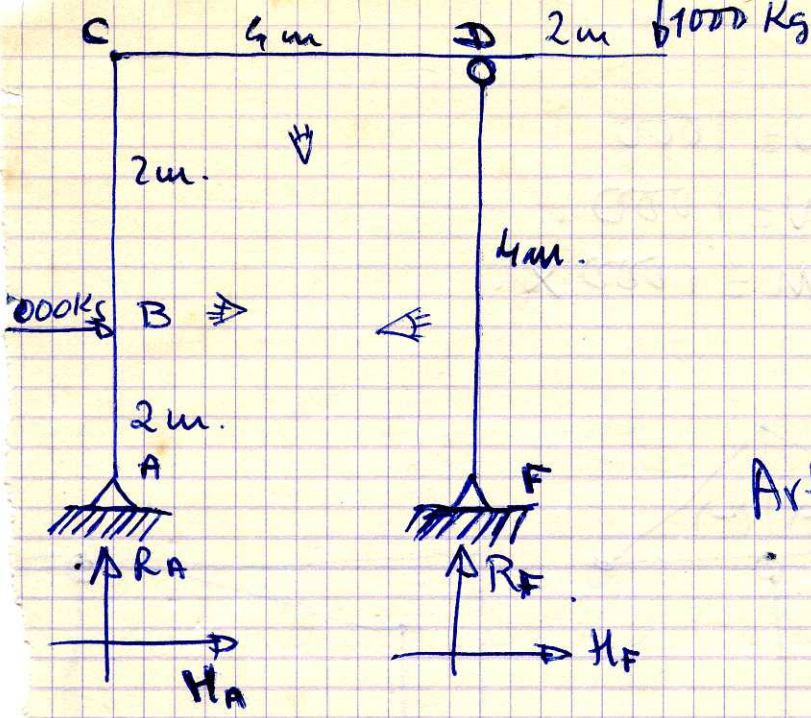


(M)

Deformed :

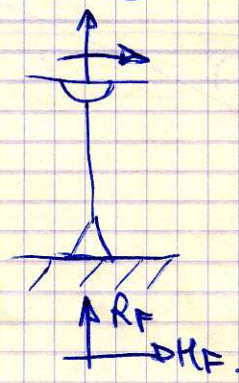


(N)

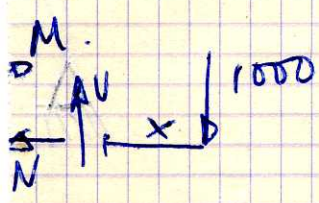


$$\begin{cases} R_A + R_F = 1000 \\ H_A + H_F + 1000 = 0 \\ R_F \cdot 4 - 1000 \cdot 6 - 1000 \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

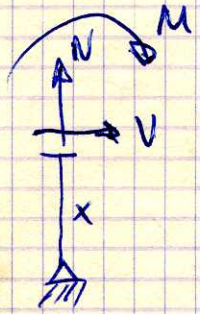
Articulación J:



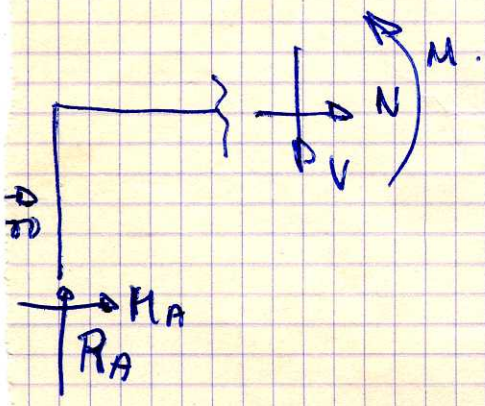
$$H_F \cdot 4 = 0 \rightarrow H_F = 0$$



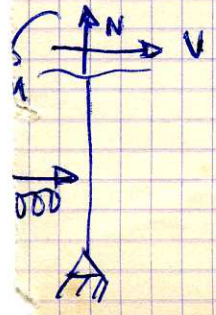
$$DE \begin{cases} V = 1000 \\ N = 0 \\ M = -1000x \end{cases}$$



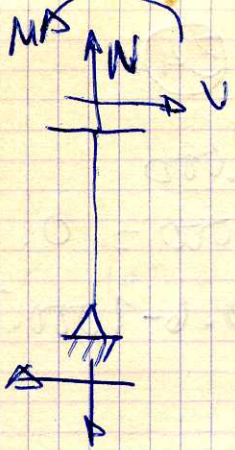
$$DF \begin{cases} N = -2000 \\ V = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$



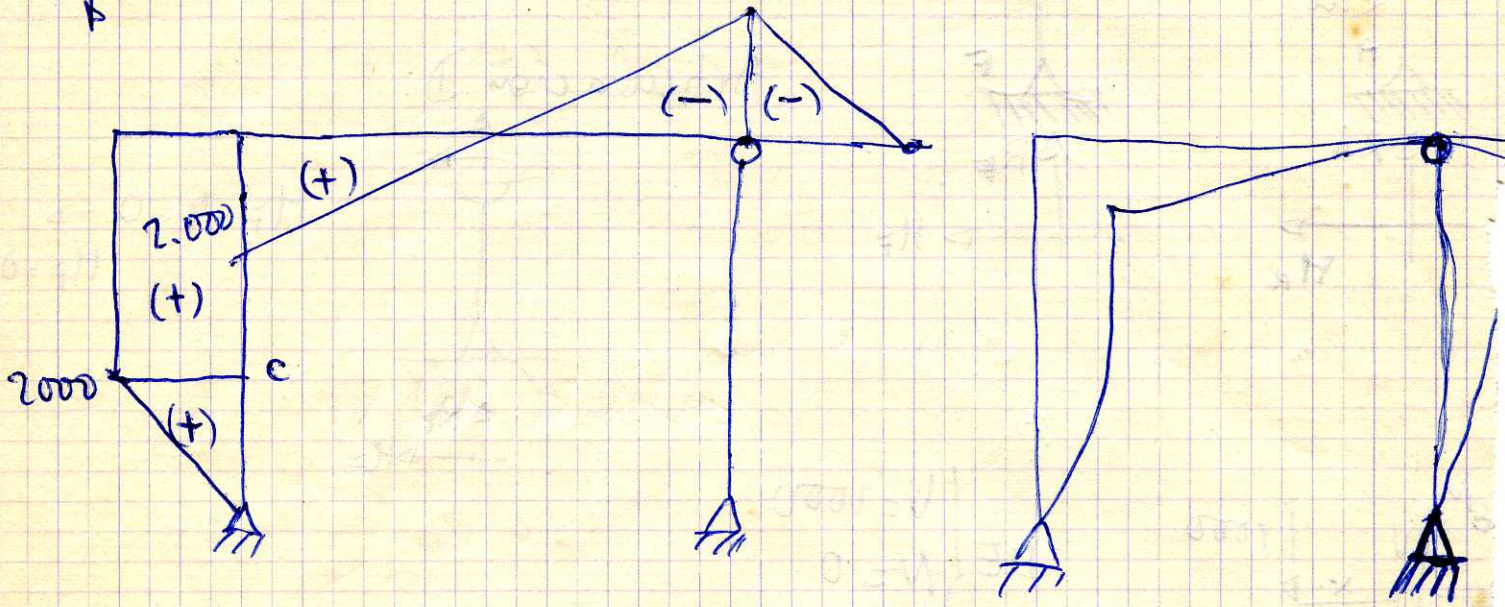
$$CD \begin{cases} V = -1000 \\ N = 0 \\ M = 2000 - 1000x \end{cases}$$

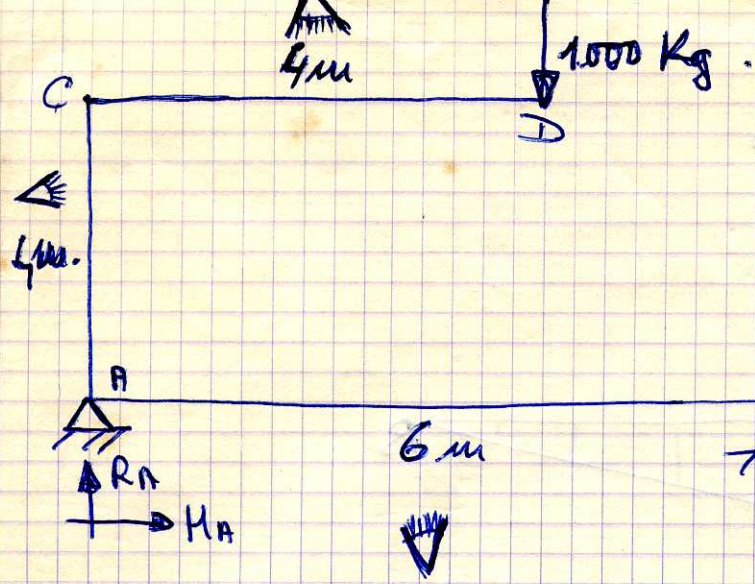


$$BC \begin{cases} V = 0 \\ N = 1000 \\ M = 2000 \end{cases}$$



$AB \left\{ \begin{array}{l} U = 1000 \\ N = 1000 \\ M = 1000 \times \end{array} \right.$



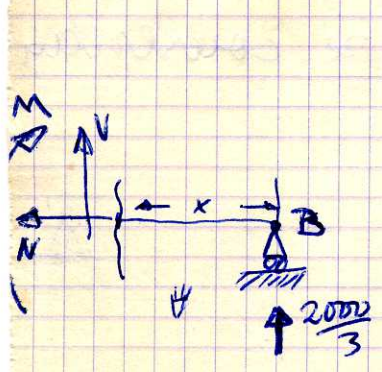


$$\left. \begin{aligned} R_A + R_B &= 1000 \\ H_A &= 0 \\ 1000 \times 4 &= R_B \times 6 \end{aligned} \right\}$$

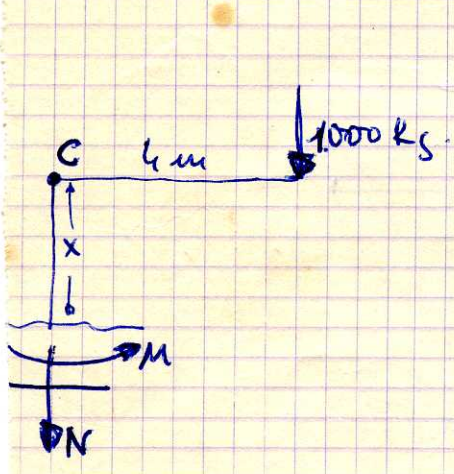
$$R_B = \frac{2000}{3}$$

$$R_A = \frac{1000}{3}$$

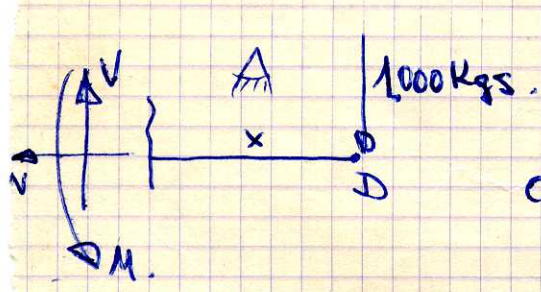
$$H_A = 0$$



$$\left. \begin{aligned} V &= -2000/3 \\ N &= 0 \\ M &= \frac{2000}{3} x \end{aligned} \right\} AB$$

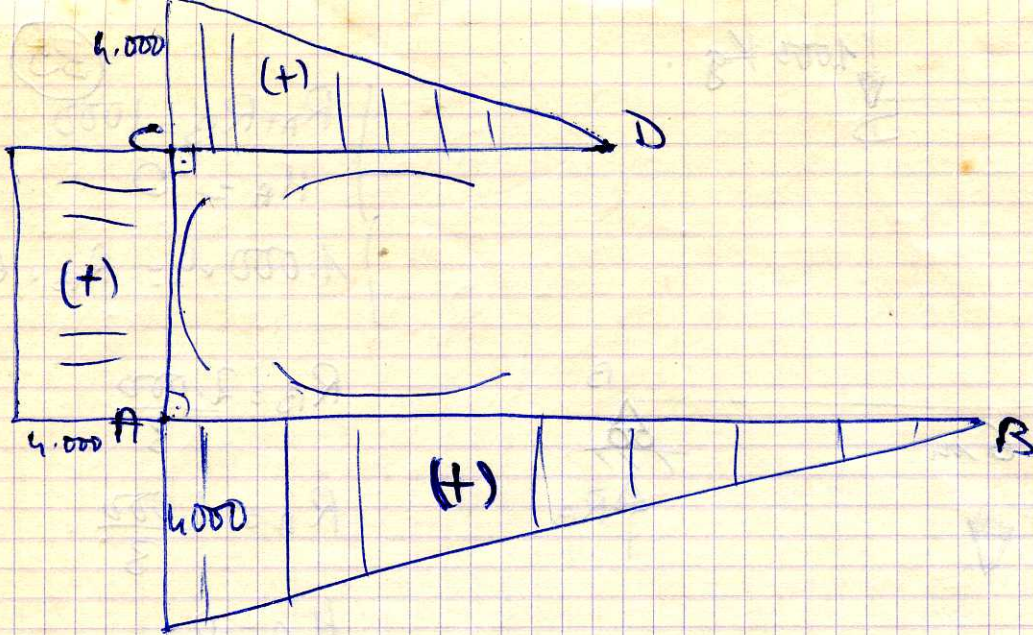


$$\left. \begin{aligned} V &= 0 \\ N &= -1000 \\ M &= 4000 \end{aligned} \right\} AC$$

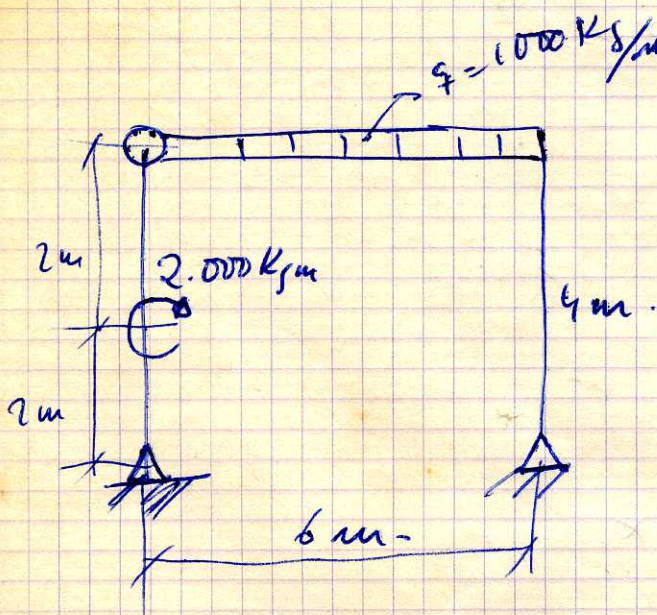
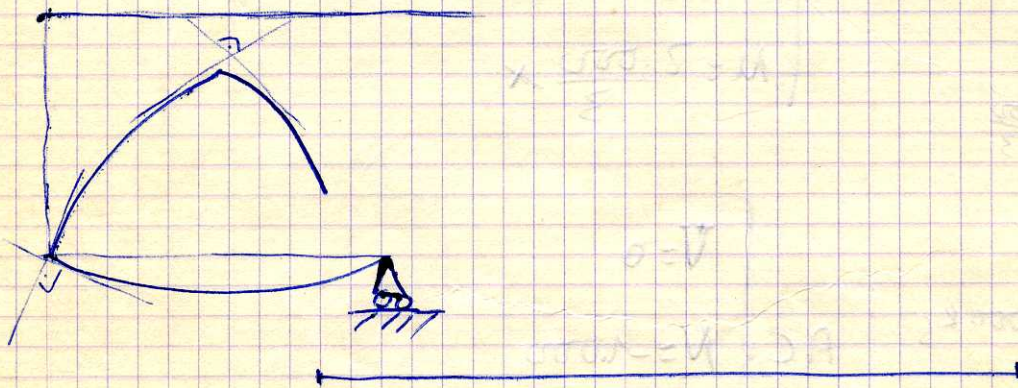


$$\left. \begin{aligned} V &= 1000 \\ N &= 0 \\ M &= 1000 x \end{aligned} \right\} CD$$

Diagram



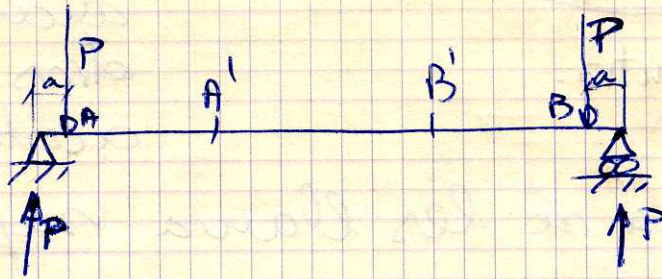
deformada: los ángulos  $\theta$  en C y A se conservan por ser nudos rígidos.



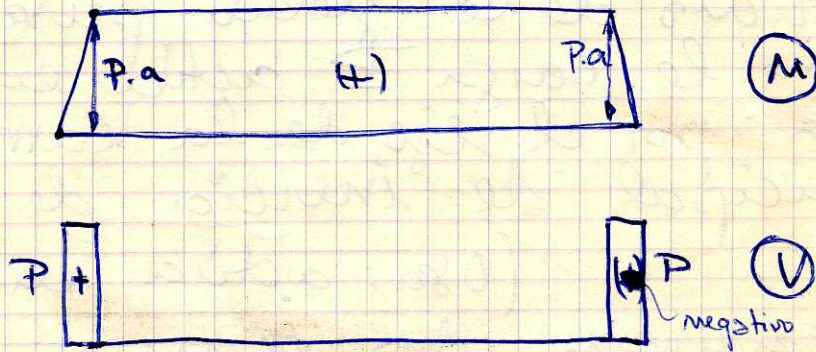
# LECCIÓN 4ª

36

## FLEXIÓN PURA.



Las fuerzas  $P$  actúan sobre la viga  $\rightarrow$  por tanto aparecerán unas reacciones  $P$ .



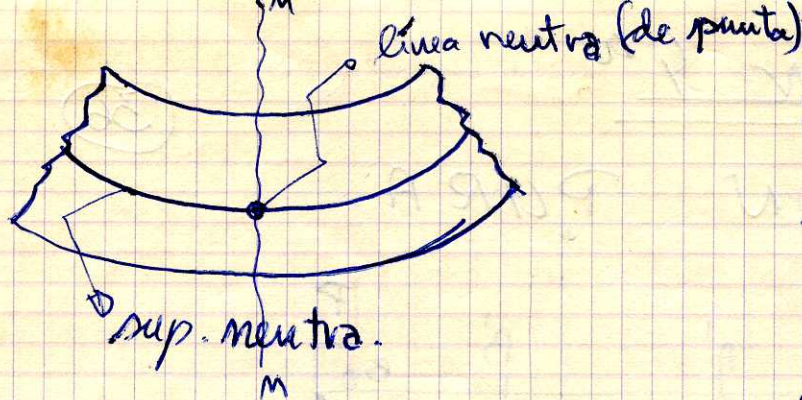
O sea, en una sección cualquiera de  $AB$  solo existe momento flector. Dire' que ese trozo  $AB$  trabaja a flexión pura.

Flexión simple: una viga trabaja a flexión simple cuando en una sección cualquiera de la viga existe momento flector y esfuerzo cortante.

Flexión compuesta: una viga trabaja a flexión compuesta cuando en una sección cualquiera de la viga existe momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo normal.

Estudio de la flexión pura:

Tomamos un trozo  $A'B'$  y voy a ver como se deforma  $\rightarrow$



Las fibras de arriba se acortan y las de abajo se alargan. Habrá otras que ni se acortan ni se alargan.

A estas últimas se les llama superficie neutra de la viga.

Línea neutra es la intersección de la superficie neutra con una sección normal al eje de la barra.

En el estudio de la flexión pura voy a suponer que la carga  $\vec{P}$  actúa en un plano que pasa por el eje de la barra y por un eje principal de inercia de la sección.

(O sea, actúa en uno de esos dos planos)

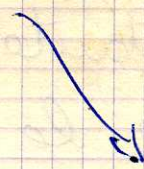


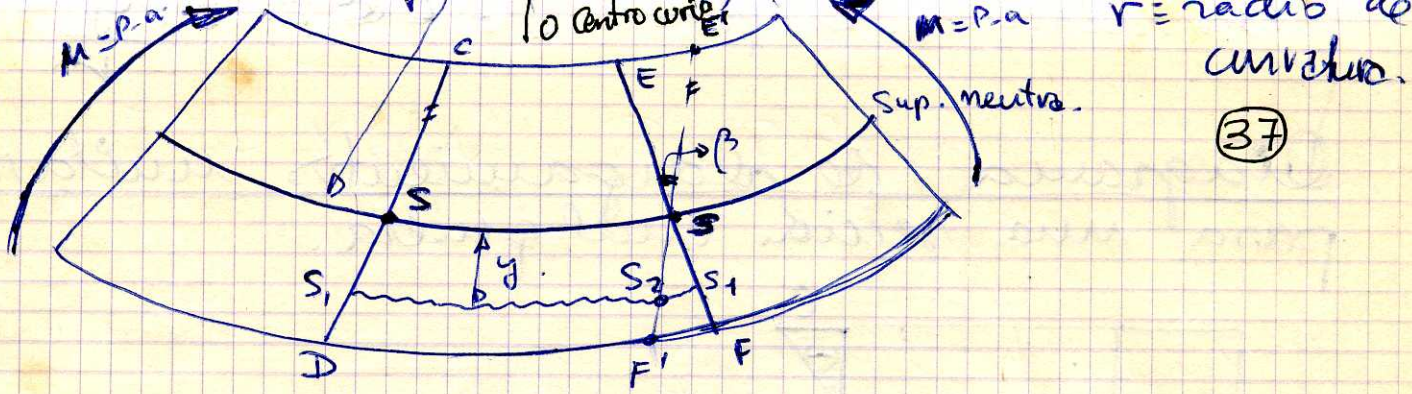
Si se cumple esto, en la flexión pura se cumple la hipótesis de NAVIER

secciones planas y perpendiculares al eje de la barra, antes de la deformación continúan siendo planas y perpendiculares al eje después de la deformación.

Se cumple tanto si el material sigue la ley de Hooke, como si no la sigue.

Cálculo del alargamiento unitario de una fibra





Tomo dos secciones cualquiera  $CD$  y  $EF$  perpendiculares al eje. Antes de la deformación eran paralelas.  $\beta =$  ángulo girado por una sección respecto de otra.

Tomo la fibra  $S_1 S_2$  situada a  $y$  de la superficie neutra. Voy a calcular su alargamiento unitario.

$$\Delta \text{SSN} \sim \Delta \text{SS}_1 \text{S}_2$$

$$\frac{S_1 S_2}{SS} = \frac{y}{r}$$

$S_1 S_2$  tenía la misma longitud inicial  $SS$  luego  $S_1 S_2 =$  alargamiento total de la fibra y  $SS =$  long. primitiva.

Entonces.  $\epsilon = \frac{y}{r}$  (alarg. unitario de una fibra cualquiera)

El alargamiento unitario es proporcional a la dist. de la fibra a la superficie neutra. Única condición: que se cumpla la hipótesis de Navier. No importa si el material es rígido o no la ley de Hooke.

Si el material rigiera la ley de Hooke, la tensión a que estaría

sometida la fibra  $\sigma = E \epsilon = E \cdot \frac{y}{r}$

Diagrama de alargamientos unitarios  
para una sección cualquiera.

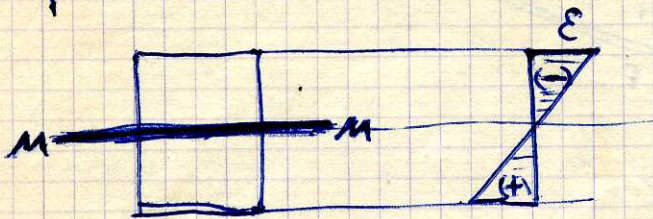
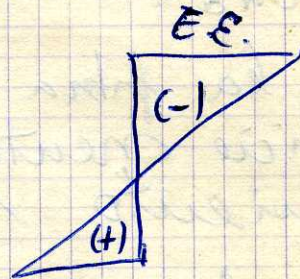
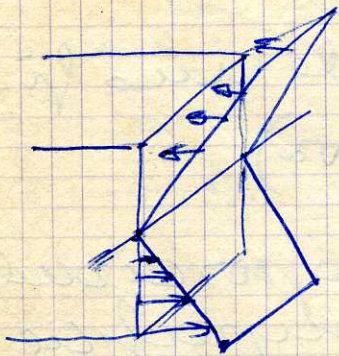
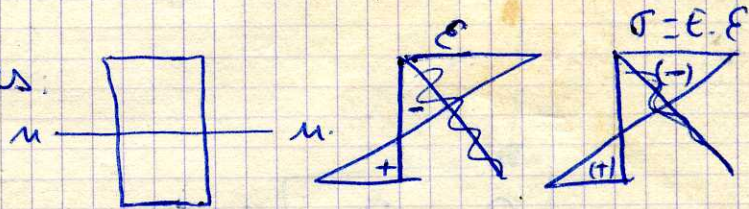


Diagrama de tensiones (si cumple ley de Hooke)  
Será el mismo a escala E ( $\sigma = E \cdot \epsilon$ ).



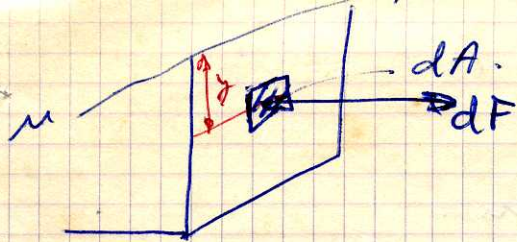
La línea neutra de la sección pasa por el c.d.g. (solo si el material sigue la ley de Hooke)

Diagrama de tensiones:



En flexión pura solo existe un momento flector. la resultante de las tensiones a tracción tiene que ser igual y contraria a la resultante de las tensiones a compresión ya que si fueran distintas, la

resultante daría un N en la sección. O sea la resultante de todas las tensiones tiene que valer cero.



Vamos a calcular la resultante. Tomamos un elemento  $dA$  sobre el que se ejerce un  $dF = \sigma dA$ . (38)

si el material sigue Hooke  $\sigma = E \epsilon \rightarrow$

$$dF = E \epsilon dA = E \frac{y}{r} dA$$

En toda el área:

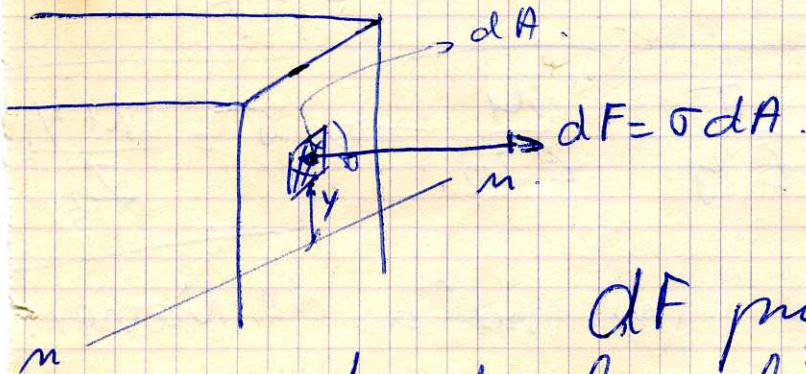
$$\int_A E \frac{y}{r} dA = 0 ; \frac{E}{r} \int_A y dA = 0 \Rightarrow \int_A y dA = 0$$

$y dA \equiv$  diferencial del momento estático respecto a la línea neutra.

Luego la  $\int$  representa el momento estático de toda el área respecto a la línea neutra.

Sabemos que cuando el mom. estát. de un área respecto a un eje es cero, ese eje pasa por el c.d.g. de la sección; luego la línea neutra pasa por el c.d.g. de la sección.

Cálculo de la curvatura de la viga en función de M:



Si el material sigue Hooke:

$$dF = E \epsilon dA = E \cdot \frac{y}{r} dA$$

$dF$  produce un  $dM$  respecto de la línea neutra:

$$dM = dF \cdot y = E \frac{y^2}{r} dA$$

En toda el área:

$$M = \frac{E}{r} \int_A y^2 dA = \frac{E}{r} I_m.$$

Mom. inercia  
de toda el  
área

$$\rho = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_m} = \frac{M}{EI_z}$$

A la línea neutra se le suele llamar eje.  
Las condiciones de esa fórmula son:  
Se tiene que cumplir la hipótesis de Navier  
ya que para demostrarlo he partido de  $\epsilon = \frac{y}{r}$   
Se tiene que cumplir Hooke, ya que he  
supuesto  $\sigma = E\epsilon$ .

A  $EI_z$  se le llama rigidez a la flexión de la viga  
porque cuanto mayor es, menos se curva  
la viga.

Fórmula de Navier. Me da la tensión  
normal que actúa en un pto de una  
sección de una viga en función del mo-  
mento flector que actúa en esa sección  
y de la distancia del punto a la  
línea neutra:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon}{y} = \frac{\sigma}{Ey}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\frac{\sigma}{Ey} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$

Signo para la fórmula de Navier:

El signo de  $\sigma$  depende del signo de  $y$   
y del de  $y$ .

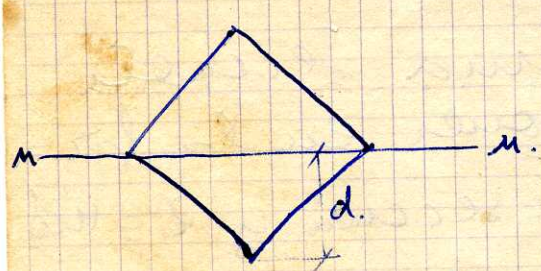


# Secciones ideales en la flexión

- 1) Si el material trabaja lo mismo a tracción que a compresión p.ej. acero, el mejor tipo de sección sería una simétrica respecto de la línea neutra.
- 2) Si el material trabaja más a tracción (hormigón) entonces la mejor sección sería asimétrica respecto de L.N. para que los pto. que van a trabajar a tracción estén poco distanciados de la L.N.
- 3) Es conveniente que la sección tenga el máximo módulo resistente posible ya que  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M}{Z}$ ;  $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_t$  (tens. de trabajo)

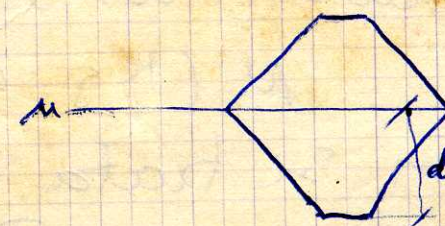
Dada  $\sigma_t$ , cuanto mayor sea  $Z$  más será el  $M$  que puede resistir.

Vamos a ver como se mejora  $Z$  de algunas secciones:



$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M \cdot d}{I_z} = \frac{M}{\frac{I_z}{d}} \quad Z = \frac{I_z}{d}$$

Si a esta sección le quitamos material por ambos extremos quedaría.



$$Z' = \frac{I_z'}{d'}$$

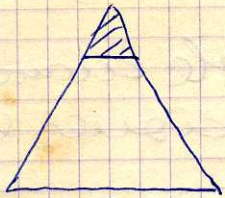
$$I_z' < I_z$$

$$d' < d$$

$d$  disminuye en mayor proporción que lo que disminuye  $I_z$ ; por lo que  $Z' > Z$  hasta un cierto límite.

Otra sección en la que ocurre lo mismo es

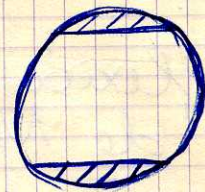
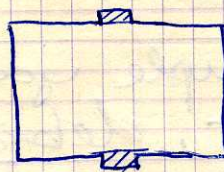
(40)



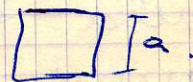
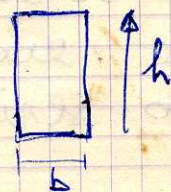
También se puede demostrar que

$Z$  aumentaría si quitase el material del vértice.

Si la sección fuese



Vamos a ver quien tiene mayor  $Z \rightarrow$  si una sección rectangular o una cuadrada de la misma superficie



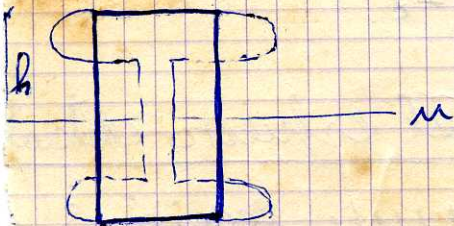
$$Z_{\text{red}} = \frac{1}{6} b h^3 = \frac{1}{6} A h.$$

$$Z_{\text{cuad}} = \frac{1}{6} \cdot a a^2 = \frac{1}{6} A \cdot a.$$

$Z_{\text{rect}} > Z_{\text{cuad}}$  siempre que los ponga en la posición del dibujo

Lo ideal serían secciones de  $h$  grande (a igualdad de área).

Vamos a ver como se mejoraría el módulo resistente de una sección conservando la misma altura y el área.



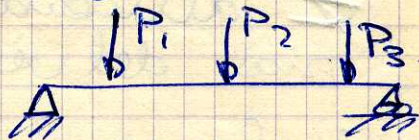
$$Z = \frac{2I_z}{h} \quad h = \text{cte. luego}$$

me que aumentar  $I_z$  conservando el área.

Con la sección de pto, aumenta  $I_z$ . A igualdad de pero tiene mayor módulo resistente

# ESTUDIO DE LA FLEXIÓN SIMPLE.

Una viga trabaja a flexión simple cuando en una cualquiera de sus secciones existen  $M$  y  $V$ .

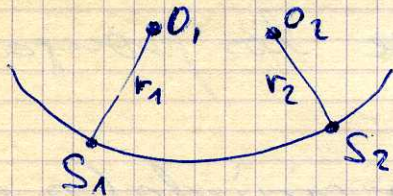


En flexión simple ya no se cumple la ley de Navier, debido a que el esfuerzo cortante produce alabeamiento en la sección.

Para calcular la curvatura de la viga en una sección, se utiliza la misma fórmula que en el caso de flexión pura aunque no sería rigurosamente cierto:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$$

En el caso de flexión simple la curvatura permanece constante pues  $M$  no es cte.



$$\frac{1}{r_1} = \frac{M_{S_1}}{EI_z}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{M_{S_2}}{EI_z}$$

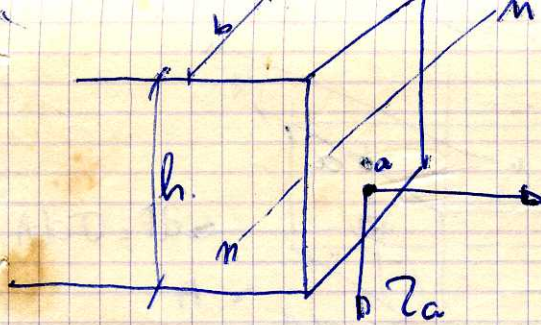
$M_{S_1}$   $M_{S_2}$  → momentos flectores en las secciones.

Para calcular la tensión normal en un punto de una sección de flexión simple utilizar la fórmula de Navier  $\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$ .

## Tensión cortante originada por el esfuerzo cortante

En la flexión simple, en una sección  $S$ , cualquiera de la viga, existe un  $M$  y un  $V$ . El  $M$  origina tensiones normales que se calculan por la fórmula de Navier.

El  $V$  origina tensiones cortantes  $\tau$ .



$$\sigma_a = \frac{M \cdot y}{I_z} \quad \sigma_a = \frac{M \cdot y}{I_z} \quad (4)$$

$\sigma_a$  (tens. normal)

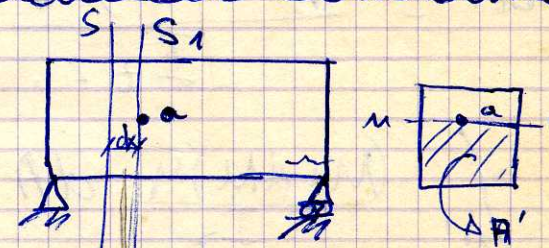
$$z_a = y (V)$$

Cálculo de  $z_a$ :

Supongamos que la sección de la viga es rectangular y vamos a establecer dos hipótesis:

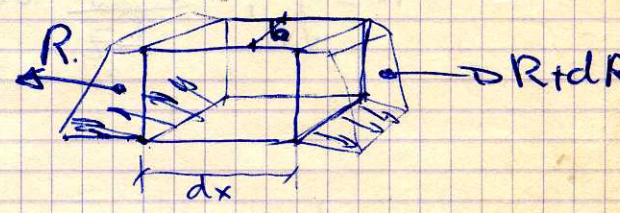
- 1) La tensión cortante va a tener el mismo sentido que el esfuerzo cortante.
- 2) La tensión cortante a lo largo de toda la sección va a permanecer constante.

Voy a calcular la  $z$  en  $a$  de la sección  $S_1$ .



Tenemos una sección  $S$  separada de  $S_1$  un  $dx$ :

$$\begin{aligned} \text{En } S &\rightarrow M \\ \text{En } S_1 &\rightarrow M + dM \end{aligned}$$



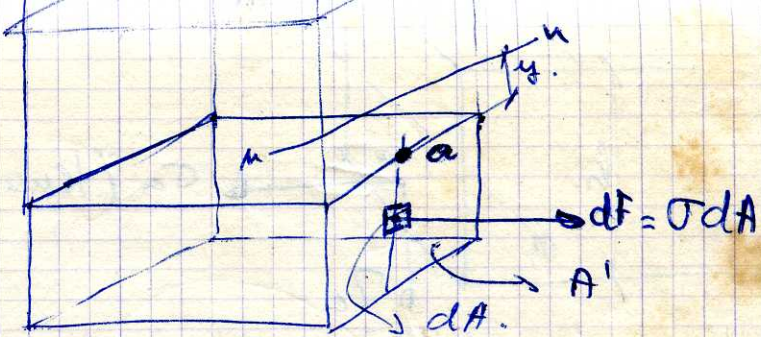
Las tensiones de la dicha son distintas de las de la otra, pues son distintos los momentos flectores. Cada grupo de tensiones tiene una resultante  $R$  y  $R+dR$ . Pero el elemento tiene que estar en equilibrio; en la cara superior que es la que está en contacto con el resto de la viga tendrían que aparecer unas fuerzas por unidad de superficie igual a  $dR$ , a las que se llama tensión cortante  $z$ . Como el elemento tiene una longitud  $dx$ , el reparto de las  $z$  en la cara será uniforme.

$$z = \frac{dR}{b \cdot dx}$$

Calculo de  $dR$ :

Calculo de  $dR$ :

Calculamos la resultante de las tensiones a la derecha



$\sigma$  = tensión normal a una distancia  $y$ .

$$\sigma = \frac{(M + dM) y}{I_z}$$

$I_z$  = mom. de inercia de toda la sección respecto a la L.N.

$$dF = \frac{(M + dM) y}{I_z} dA$$

$$\int_{A'} \frac{(M + dM) y}{I_z} dA = R + dR$$

Al tener las dos caras la misma área, tenemos:

$$R = \int_{A'} \frac{M y}{I_z} dA \rightarrow dR = \int_{A'} \frac{dM \cdot y}{I_z} dA = \frac{dM}{I_z} \int_{A'} y dA$$

$\int_{A'} y dA$  = momento estático de  $A'$  respecto a  $M$

$$dR = \frac{dM}{I_z} M_e$$

$$\text{luego: } z = \frac{dR}{b dx} = \frac{dM}{dx} \frac{M_e}{b I_z} = \boxed{V \frac{M_e}{b I_z}}$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

La  $z$  calculada es esa y me interesa hallar  $z_a$ .



Sabemos que las  $\tau$  que actúan en

dos caras perpendiculares entre sí son iguales y opuestas. Por tanto: (42)

$$\tau_a = \frac{V M_e}{b I_z}$$

En resumen:

$$\tau_a = \frac{V M_e}{b I_z} \text{ cuando}$$

$V$  = esfuerzo cortante que actúa en  $S_1$ , donde está el punto a

$M_e$  = momento estático del área  $A'$  respecto de n-n.

$b$  = ancho de la sección.

$I_z$  = momento de inercia de toda la sección respecto de la línea neutra.

Signo de  $\tau_a$  → el mismo que el de  $V$ .

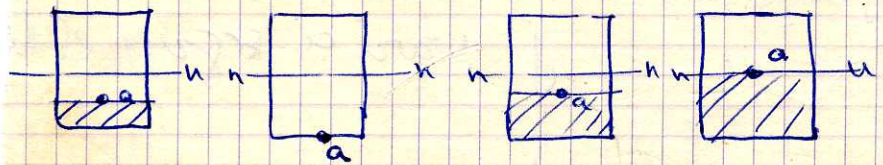
DIAGRAMA de tensiones cortantes para una sección de la viga:

Para una sección dada  $V = cte$   $b = cte$ .

$$I_z = cte.$$

La única variable es  $M_e$ . O sea  $\tau = K \cdot M_e$ .

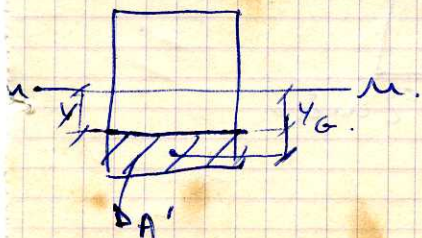
La variación de  $\tau$  es la misma que la del  $M_e$ .



Para hallar el  $M_e$  podemos tomar el área de arriba o la de abajo. Se

suma el área menor por comodidad.

Cálculo del  $M_e$  de un área:



$$M_e = A' y_g \left\{ \begin{array}{l} \text{Es igual al área } A' \\ \text{por la distancia de} \\ \text{su c.d.g. respecto a n-n.} \end{array} \right.$$

$$A' = b \left( \frac{h}{2} - y \right)$$

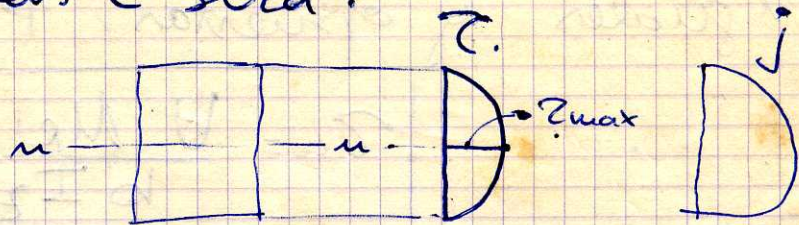
$$y_g = y + \left( \frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2}$$

operando sale el valor de una

Parabola

El diagrama de las  $\tau$  serd:

de forma que  $\tau_{\max}$  ocurre en  $n-n$  y en los pto. más lejos de  $n-n$ ,  $\tau=0$ .

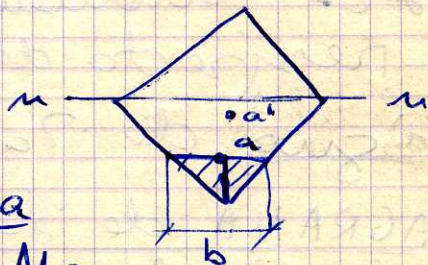


$j = \tau b$ . (Esfuerzo de desgarramiento unitario)

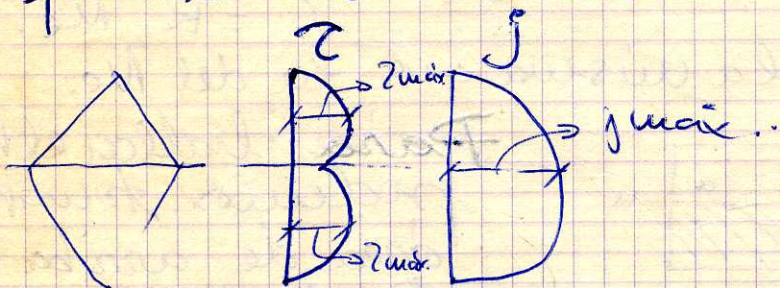
El diagrama de  $j$  es igual al de  $\tau$ , a esa la  $b$  (pues  $b = ct$  en sección rectangular)

No siempre la  $\tau$  es máxima en los puntos situados en  $n-n$ . Si me dan una sección.

la  $\tau_a$  sería  $\tau_a = \frac{V M_e}{b I_z}$



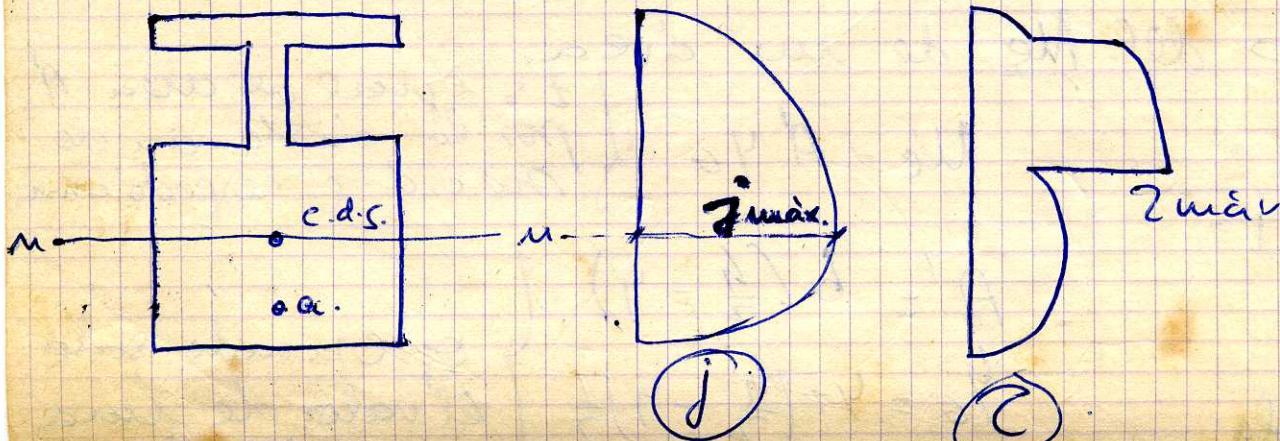
Si vamos subiendo el punto  $a$  hacia la línea neutra, el  $M_e$  aumenta y la  $b$  también crece. Cuando llegamos a la línea neutra,  $M_e = m$  y  $b$  también es  $\max$ , luego puede suceder que la  $\tau$  no sea máxima en la línea



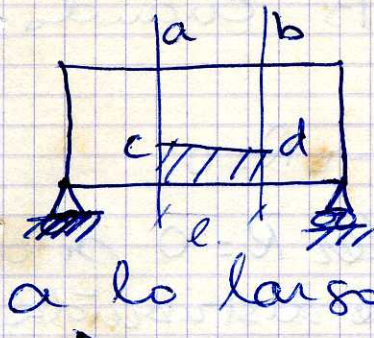
$$j = \tau b = \frac{V M_e}{I_z}$$

$j$  varía según el  $M$

Veamos el diagrama de  $\tau$  para:



# CALCULO DE ESFUERTOS DE DESGARRAMIENTO: (43)

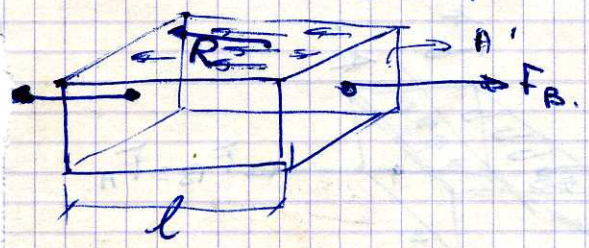


a lo largo de la superficie cd.

La viga soporta una serie de cargas y nos piden calcular el esfuerzo de desgarramiento para el tramo ab de la viga.

En a actúa un  $M_a$  y en b un  $M_b$

Aislando el trozo rayado:



En el área  $A'$  hay tensiones normales que darán una resultante  $\rightarrow F_B$ .

Lo mismo en la cara opuesta  $\rightarrow$  result.  $F_A$ .

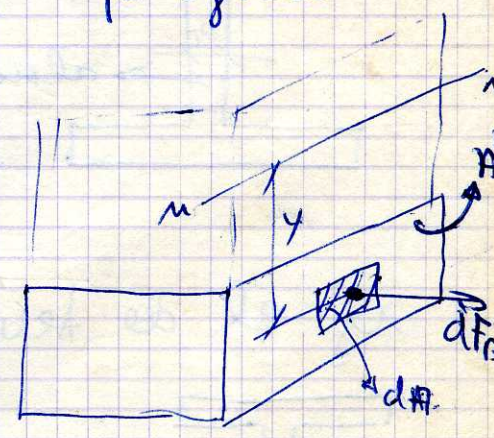
$F_B \neq F_A$  debido a que son distintos los momentos flectores:  $M_A \neq M_B$ .

Para que el elemento esté en equilibrio tiene que haber unas fuerzas por unidad de superficie llamadas tensiones cortantes o de desgarramiento que no tienen que ser de reparto uniforme, pues la longitud es  $l$  y no  $dl$ . Estas tensiones no dan una resultante, llamada esfuerzo de desgarramiento a lo largo de la superficie cd para el tramo ab.

$$R = F_B - F_A$$

$$dF_B = \sigma dA = \frac{M_B \cdot y}{I_z} dA$$

$$F_B = \int_{A'} \frac{M_B \cdot y}{I_z} dA = \frac{M_B}{I_z} \int y dA = \frac{M_B \cdot M_e}{I_z}$$



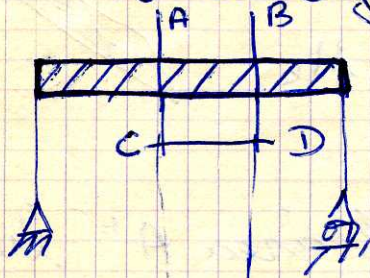
$$F_A = \frac{M_A}{I_z} M_e ; \quad R = \frac{M_B - M_A}{I_z} M_e$$

en problemas, demostrar siempre la fórmula

$R$  será máxima en el tramo AB cuando el  $M$  sea máximo

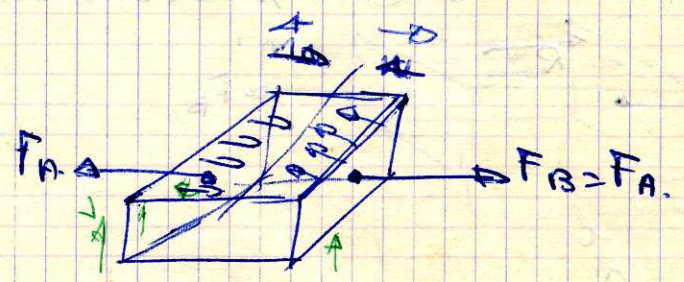
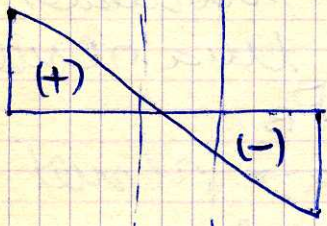
- En flexión pura  $M_A = M_B = M = \text{cte} \rightarrow R = 0$

- En flexión simple puede suceder  $R = 0$  si una viga con carga uniformemente distribuida



Al cambiar  $V$  de signo justo en la mitad.

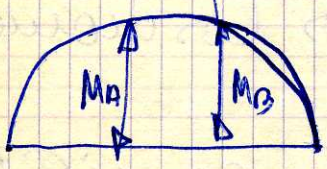
(V)



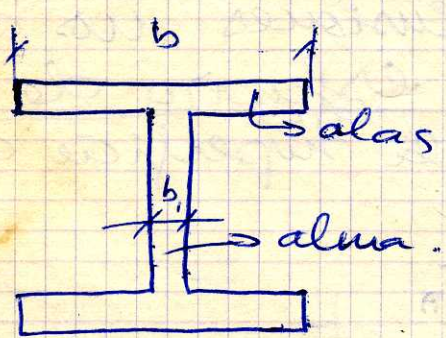
$dR$ : es un esfuerzo de de garramiento para un  $dx$ .

$$\frac{dR}{dx} = j = 2 \cdot b$$

(M)



### ESTUDIO DE LA DOBLE T.

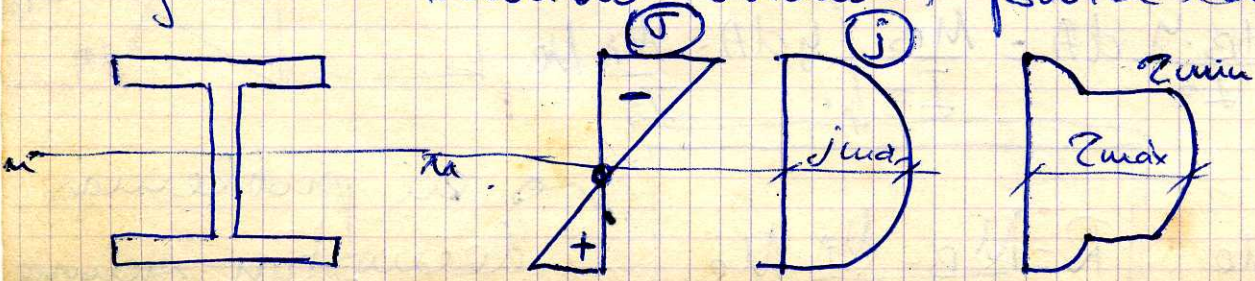


$b_1$  es muy pequeña en comparación con  $b$

Supongamos que en esta sección hay un  $M_y$  y un  $V_y$

Dibujamos el diagrama de tensiones normales

y el de tensiones cortantes para la sección



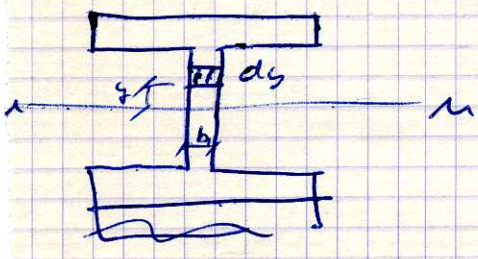
$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{I_z}$$

$\tau$  es función de  $y$ .

Antes de dibujar el diagrama de  $\tau$  dibujamos el de  $j = \tau \cdot b = \frac{V M_x}{I_z}$ . Variará con el valor de  $M_x$ .

$\tau_{m\acute{a}x} \rightarrow$  se produce en el alma, en la línea neutra y le  $\tau_{m\acute{i}nimo}$  en el alma será prácticamente el mismo que  $\tau_{m\acute{a}x}$ , siempre que el ancho del alma sea despreciable respecto al ancho del ala; por lo tanto el reparto de tensiones cortantes en el alma es uniforme. Además, el alma absorbe casi todo el  $\tau$  que actúa en la sección.

Calculemos el  $\tau$  absorbido por el alma:



Tomamos un  $dA$  a una distancia  $y$  de la línea neutra  
 $dA = b \cdot dy$ .

$dA$  absorberá un esfuerzo cortante que será:

$dV_1 = \tau dA = \tau b \cdot dy$ . ahora tendré que poner la  $\tau$  en función de  $y$ .

El esfuerzo cortante absorbido por el alma será:  $V_1 = \int_{-h_1}^{h_1} \tau b \cdot dy = V$  siendo  $V$  el esfuerzo cortante que actúa en la sección.

Resumiendo: el esfuerzo cortante, prácticamente es absorbido por el alma y además el reparto de tensiones cortantes en el alma es prácticamente uniforme, luego la tensión cortante en cualquier pto. del alma será:

$$\tau = \frac{V}{\text{área del Alma}} \quad \tau = \frac{V}{\text{área del Alma}}$$

Si en un problema piden la  $Z$  en un pto. del alma, utilizaría la fórmula

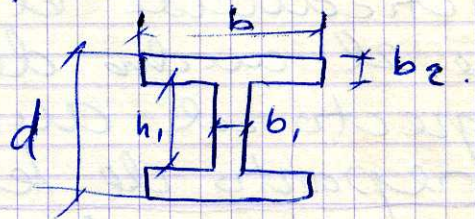
$$Z = \frac{V M e.}{b_1 I_z} \sim \frac{V}{\text{area alma}} \quad \text{y lo explican}$$

En una doble T, el  $M$  es prácticamente absorbido por las alas.

Para diseñar una doble T.

$$V = \sigma_{\text{trabajo}} \cdot b_1 \cdot h_1$$

$$M = \sigma_{\text{trabajo}} \cdot b \cdot h_2 \cdot d$$



Si en un problema piden la  $Z$  en un pto del alma, utilizaría la fórmula

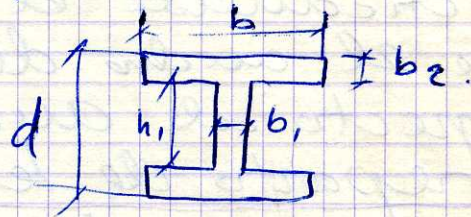
$$Z = \frac{V M e.}{b_1 I_z} \approx \frac{V}{\text{area alma}} \text{ y lo explica}$$

En una doble T, el  $M$  es prácticamente absorbido por las alas.

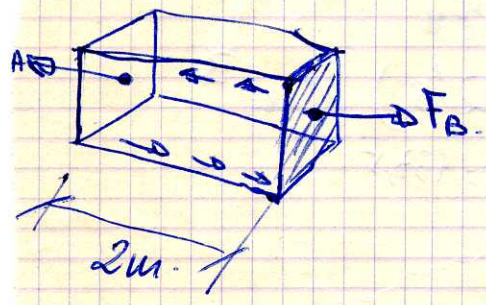
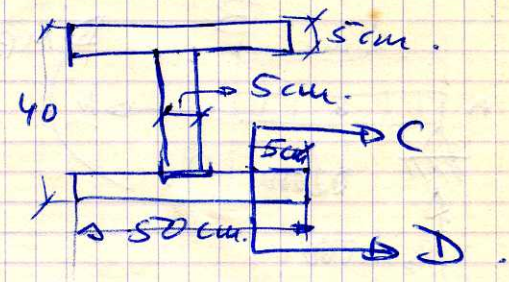
Para diseñar una doble T.

$$V = \tau_{\text{trabajo}} \cdot b_1 \cdot h_1$$

$$M = \sigma_{\text{trabajo}} \cdot b \cdot h_2 \cdot d$$



Problema. Calcular el esfuerzo de desgarramiento longitudinal para el tramo AB de la viga a lo largo de la superficie CD. (45)

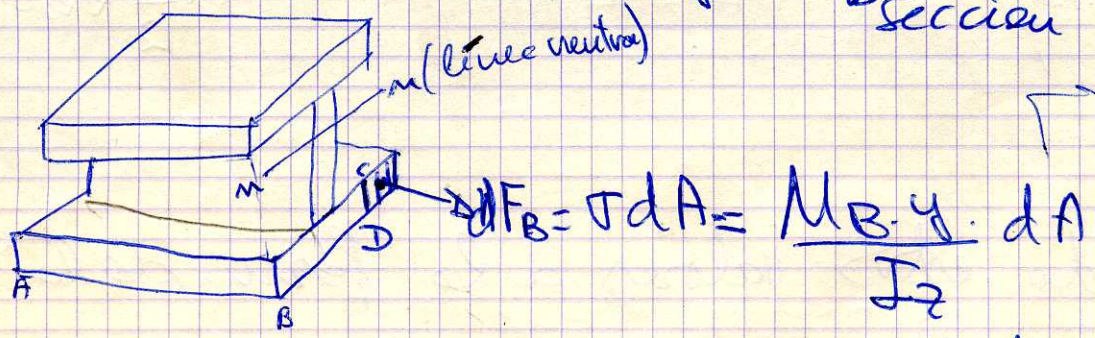


$F_B \rightarrow$  result. de las tens. normales  
 $F_A \rightarrow$  idem en la otra cara  
 Son dist. porque el mom. flector en B  $\neq$  mom. flector en A

En la sup. lateral tienen que parecer unas  $\tau$  para que haya equilibrio.

La resultante  $R = F_B - F_A$ .

Vamos a calcular  $F_A$  y  $F_B$   $\rightarrow$  sección en perspectiva



Y entonces

$$F_B = \int \frac{M_B \cdot y}{I_z} \cdot dA = \frac{M_B}{I_z} \int y \cdot dA$$

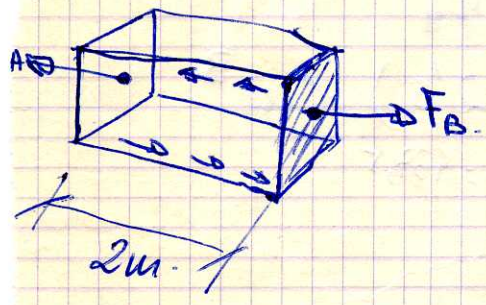
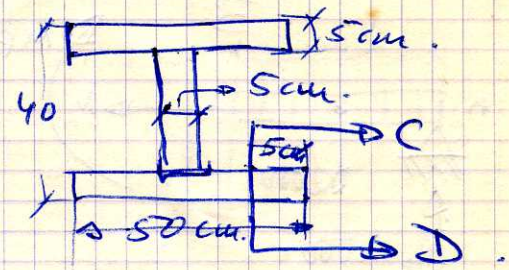
$M_e$  (mom. estático) respecto a la línea neutra.

$$F_B = \frac{M_B}{I_z} M_e$$

$$F_A = \frac{M_A}{I_z} M_e$$

$$R = \frac{M_B - M_A}{I_z} M_e$$

Problema. Calcular el esfuerzo de desgarramiento longitudinal para el tramo AB de la viga a lo largo de la superficie CD. (45)

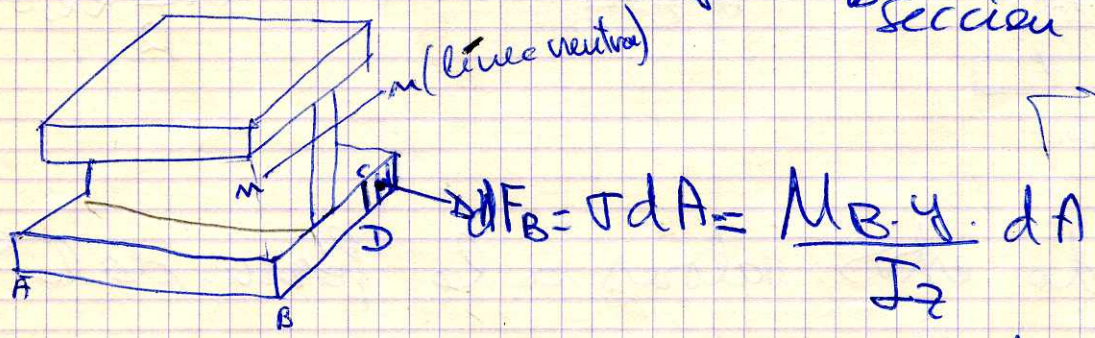


$F_B \rightarrow$  result. de las tens. normales  
 $F_A \rightarrow$  idem en la otra cara  
 Son dist. porque el mom. flector en B  $\neq$  mom. flector en A.

En la sup. lateral tienen que parecer unas  $\tau$  para que haya equilibrio.

La resultante  $R = F_B - F_A$ .

Vamos a calcular  $F_A$  y  $F_B$   $\rightarrow$  sección en perspectiva



Y entonces

$$F_B = \int \frac{M_B \cdot y}{I_z} \cdot dA = \frac{M_B}{I_z} \int y \cdot dA$$

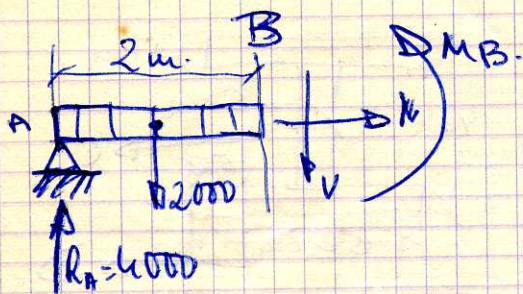
$M_e$  (mom. estático) respecto a la línea neutra.

$$F_B = \frac{M_B}{I_z} M_e$$

$$F_A = \frac{M_A}{I_z} M_e$$

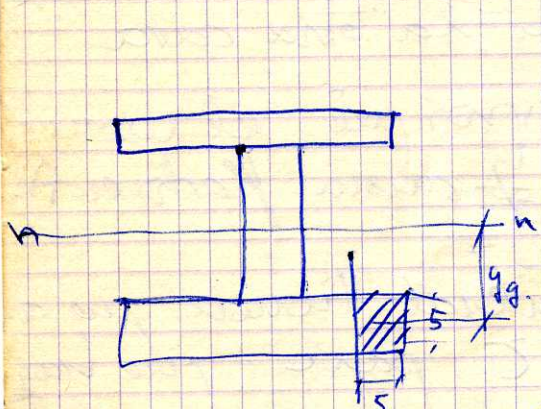
$$R = \frac{M_B - M_A}{I_z} M_e$$

$M_A = 0$  (porque al estar en A articulada, no hay momento flector).



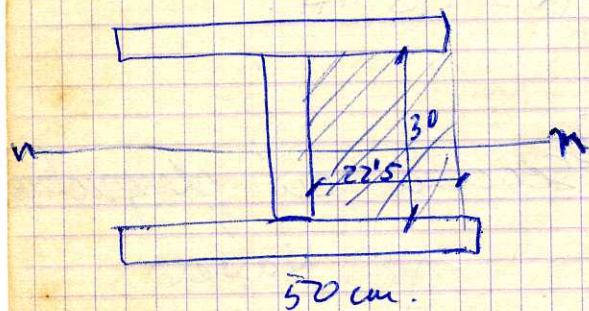
$$4.000 \cdot 2 - 2000 \cdot 1 - M_B = 0.$$

$$M_B = 6.000 \text{ K} \cdot \text{m} = 6.000 \cdot 10^2 \text{ Kg} \cdot \text{cm}.$$



$$M_c = \overbrace{5 \times 5}^{\text{área}} (20 - 2'5) \text{ cm}^3$$

$$25 \times 17'5 = 437,5$$



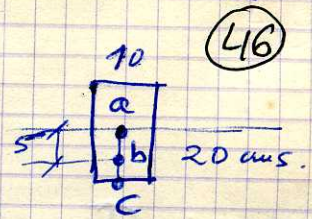
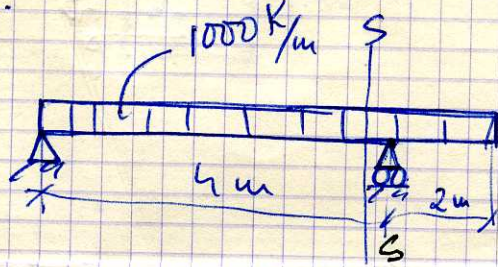
$I_z$  → hallo el de todo el rectángulo y le resto dos veces el del rectángulo rayado

$$I_z = \frac{1}{12} 50 \cdot 40^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} 22,5 \times 30^3$$

Llevando estos valores a la fórm. de la R hallo R en Kfs.

$$R = \frac{0 \cdot 6000 \text{ kg cm} - 0}{\frac{1}{12} [(520 \cdot 10^4) - (135 \cdot 10^3)] \text{ cm}^3} \cdot 437,5 \text{ cm}$$

Problema. Calcular las tensiones en los pto A B C de la sección S de la viga de la figura.



Primero se calculan los efectos que actúan en la sección S de la viga  $\rightarrow$  N, V, M.



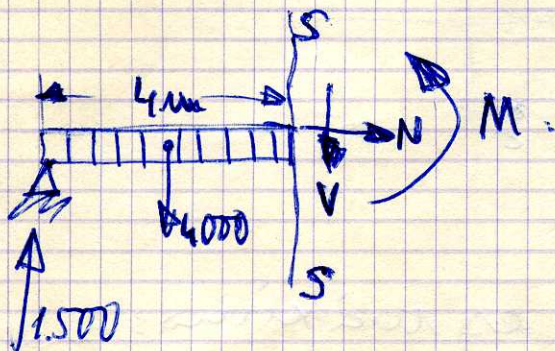
$$R_A + R_B = 6.000$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \times 4 - 6.000 \times 2 = 0$$

$$R_A = 1.500 \text{ Kgs}$$

$$R_B = 4.500 \text{ Kgs}$$



$$N = 0$$

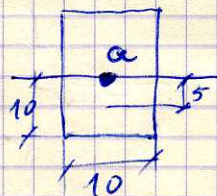
$$V = 2.500 \text{ Kgs (en el otro sentido)}$$

$$1.500 \times 4 - 4.000 \times 2 - M = 0$$

$$M = 2.000 \text{ K}\cdot\text{m (sent. contrario)}$$

$$= 2.000 \times 10^2 \text{ K}\cdot\text{cm}$$

Tensiones en el pto. A:

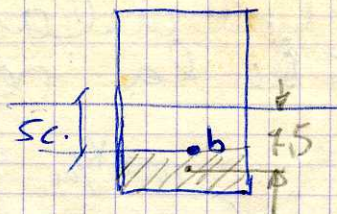


$\sigma_a$  originada por el momento flector  
 $\tau_a$  originada por el esf. cortante

$$\sigma_a = \frac{M \cdot y}{I_z} = 0 \text{ (porque a está situado en n-n } y=0)$$

$$\tau_a = \frac{V M_e}{b I_z} = \frac{2.500 (10 \cdot 10 \cdot 5)}{10 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3} \text{ Kgs/cm}^2$$

Tensiones en el pto. b

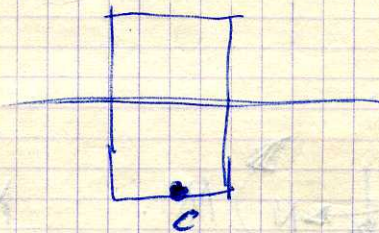


Habrá  $\sigma_b$  y  $Z_b$

$$\sigma_b = \frac{M \cdot y}{I_z} = \frac{(-2000 \cdot 10^2) \cdot 5}{\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3} \text{ Kg/cm}^2$$

$$Z_b = \frac{V \cdot M_e}{b I_z} = \frac{-2500 \cdot \overbrace{10 \cdot 5 \cdot 75}^{\text{área}} \cdot \overbrace{y_g}^{\text{dist. c.d.g. línea neu}}}{10 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3} \text{ Kg/cm}^2$$

Tensiones en el punto c.



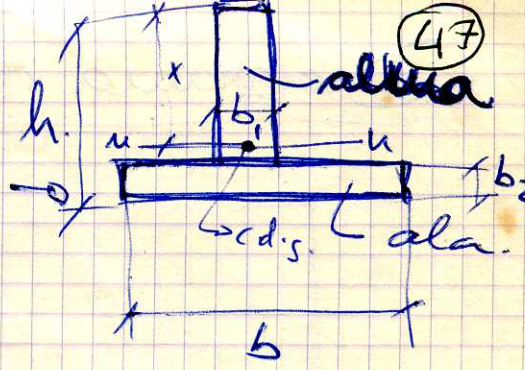
$\sigma_c$  y  $Z_c$

$Z_c = 0$  (porque  $M_e = 0$ )  $\sigma_c$  es máximo.

$$\sigma_c = \frac{M \cdot y}{I_z} = \frac{(-2000 \cdot 10^2) \cdot 10}{\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3}$$

# ESTUDIO DE LA SIMPLE T

Es un perfil como éste



## Determinación de la línea neutra de la sección:

Si se cumple la hipot. de Navier y el material sigue Hooker, la línea neutra pasa por c.d.s. de la sección. Por tanto, en cuanto calcule  $x$  puede determinarla  $n-n$ .

El mom. est. respec. de la línea neutra es 0 o sea, el mom. est. del área de arriba = al del área de abajo.

Del área de arriba:  $(b_1 - x) \frac{x}{2}$

Del área de abajo:  $b \cdot b_2 \left( h - x - \frac{b_2}{2} \right) + \frac{(h - x - b_2) b_1 x}{2}$

↳ descompongo el área de abajo en dos áreas

el del ala.

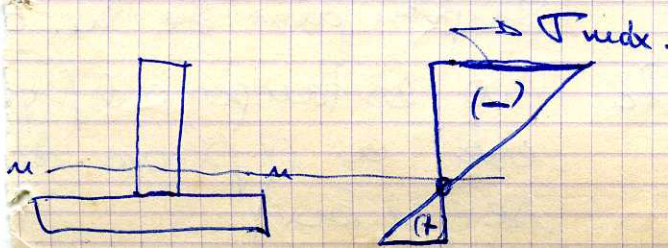
área

x h - x - b

Igualmente, se calcula  $x$ . (solo siempre una ecuación de 1<sup>er</sup> grado).

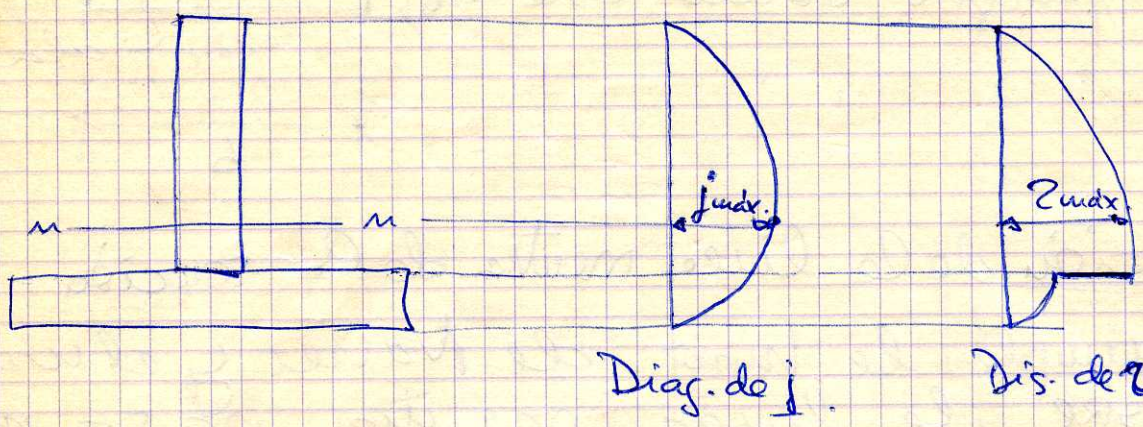
## Diagrama de tensiones normales para la simple T

La  $\sigma$  la calcula por Navier  $\sigma = \frac{M y}{I_z}$



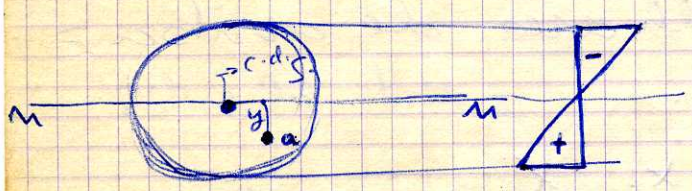
# Diagrama de tensiones cortantes.

desg. uni  
 $j = 2 \cdot b = V$



Salto brusco porque las  $b$  distintas.

## ESTUDIO DE LA SECCIÓN CIRCULAR

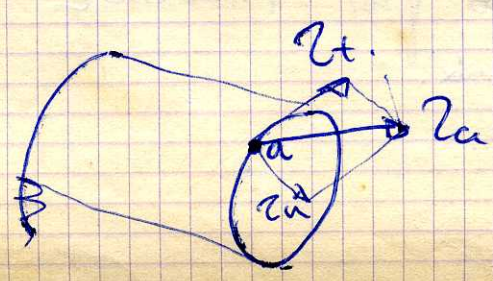
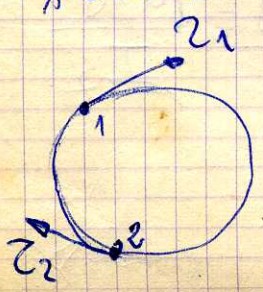


Si quiero calcular la tensión normal en el pto  $a$  que dista  $y$  de  $nn$ , sera

$$\sigma_a = \frac{M \cdot y}{I_z} \quad (\text{Navier})$$

Las tensiones cortantes: no se pueden emplear la fórmula  $\tau_a = \frac{V k_e}{b I_z}$  porque solo vale

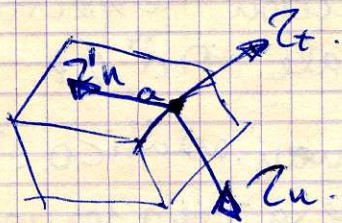
para secciones rectangulares. Lo primero que voy a demostrar es que la flexión cortante en un punto de la periferia tiene sentido tangencial:



Supongamos que en  $a$  no es tangencial (si está en el plano de la sección).

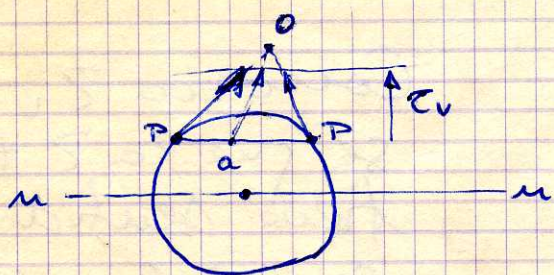
La  $Z_u$  puede descomponerse en  $Z'_u$  y  $Z''_u$  y en normal y voy a demostrar que  $Z_u$  no puede existir.

Si solo un elemento cúbico alrededor del punto  $a$ .



Si existe  $Z_u$  debe existir  $Z'_u$ , porque en planos perpendiculares las  $Z$  son iguales y contrarias.

Pero  $Z'_u$  no puede existir porque actuaría en la superficie libre de la viga. Como  $Z'_u = 0$ , también  $Z_u = 0$ . O sea solo la comp. tangencial.



Vamos a demostrar que la  $Z$  de un pto  $a$  cualquiera de la línea  $PP'$  para por  $o$ . Además voy a suponer que la componente vertical de las tensiones es constante a lo largo de la línea  $PP'$  es la

misma. ( $Z_v$ ).

La  $Z_v$  cumple las dos condiciones siguientes:

- (1) Tiene el mismo sentido que  $V$  (esfuercio cortante).


- (2) Permanece constante a lo largo y lo ancho de la sección.

Entonces puedo decir que la  $Z_v$  cumple las mismas condiciones que cumplía la  $Z$  en una viga de sección rectangular.

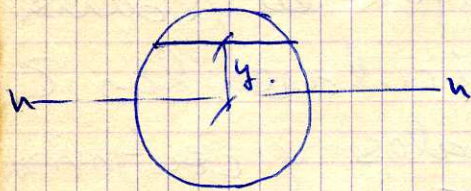
regular. Para calcular la  $Z_v$  puedo, y  
 tanto utilizar la misma fórmula que  
 para la  $Z$  de una viga de sección recta  
 regular

$$Z_v = \frac{V M_e}{b I_z}$$

$V$ : esf. cort. en la sección  
 $I_z$ : mom. inerc. de toda la  
 sección respecto a  $n-n$   
 vale  $\pi d^4/64$ .

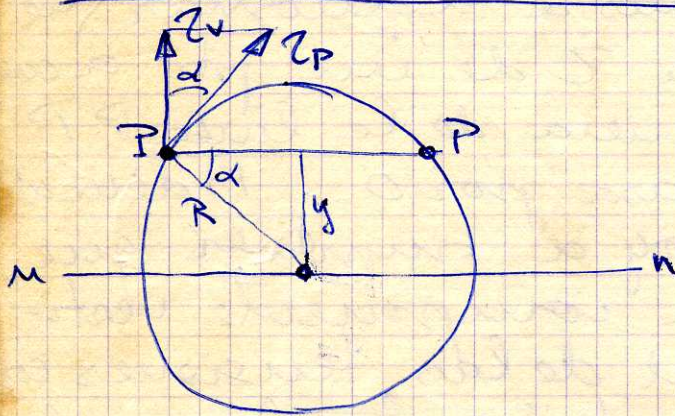
$M_e$ : mom. estático.   
 de la zona rayada.

$b$  = disto.  $P-P$



Si calculo  $M_e$  en  
 función de  $y$  y  $b$  en función, obtengo la  
 siguiente fórmula  $Z_v = \frac{V(R^2 - y^2)}{3 I_z}$   $R$  = radio de la  
 sección

## Cálculo de la flexión cortante total del punto



Como  $Z_v$  y  
 si que la  $Z$  total  
 tiene sentido to  
 general, a se  
 que puedo dib  
 jarlo.

$$Z_p = \frac{Z_v}{\cos \alpha} = \frac{V(R^2 - y^2)}{3 I_z \cos \alpha} \quad (1)$$

Pero  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}$  llevando a (1),

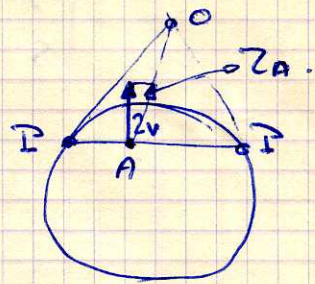
reobtiene:

$$Z_p = \frac{VR \sqrt{R^2 - y^2}}{3 I_z}$$

Si pidiésemos el  $Z$  total en un pto. A cualquiera de la línea  $PP$ : (49)

La componente vertical es la misma que antes y se a demás que el  $Z$  total está dirigida hacia 0:

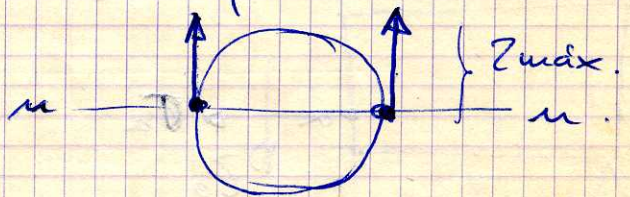
La  $Z$  total de  $P > Z_A$ .  
 porque el ángulo  $\alpha$  es mayor en  $I$  que en  $A$ .



Cálculo de la tensión cortante máxima de la sección.

En la fórmula se ve que es máxima cuando  $y = 0$

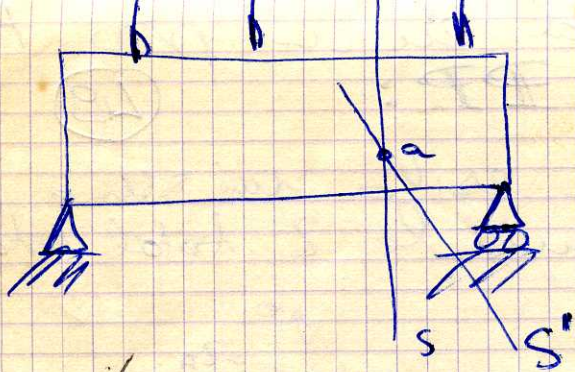
Cuando se cortan en el  $\infty$ , las  $Z$  de los pto. de la línea neutra son siempre verticales.



su valor se calcula en la fórmula haciendo  $y = 0$ :  $Z_{max} = \frac{VR^2}{3I_z} = \frac{4V}{3 \text{ Area círculo}}$  (sustituye

de  $I_z$  por su valor.

Círculo de Mohr de un punto de una sección. Tensiones principales de dicho punto y direcciones principales



$S \rightarrow$  secc. normal  
al eje de la v  
 $a \rightarrow$  pto. de di  
sección.

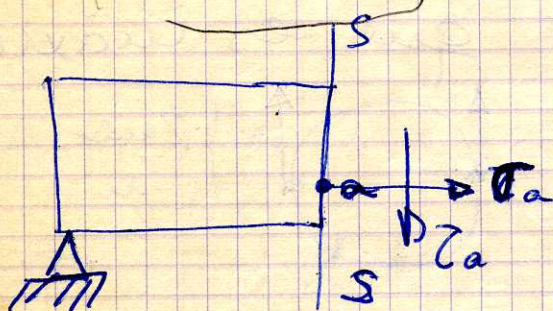
En  $S$  habrá  
 $M$  y un  $V$

Por tanto en  $a$

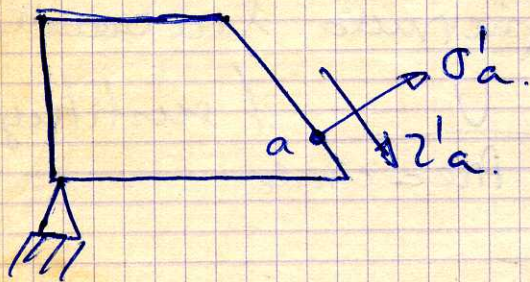
habrá una  $\sigma_a$  y una  $\tau_a$ .

$$\sigma_a = \frac{M y}{I_z} \quad (\text{Navier}).$$

$$\tau_a = \frac{V k_e}{b I_z}$$



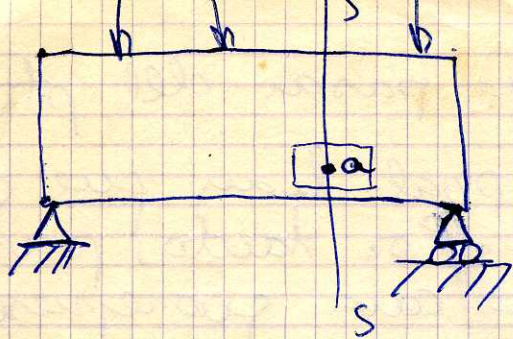
Si ahora consider  
otra  $s'$  que pasa  
por  $a$ , quedará  
dame con el eq  
librio de la par  
izquierda y habr  
también una  $\sigma'_a$  y  
 $\tau'_a$  (normal a la  
superficie). No s  
pueden calcular



por las fórmulas de antes.

El círculo de Mohr del pto  $a$  se define  
así  $\rightarrow$  un círculo en el que las coord  
nadas de los pto. de su circunferen  
cia dan la tensión normal y la tensión  
cortante que actúan en el punto  $a$  al  
considerar distintas secciones que pa  
san por él.

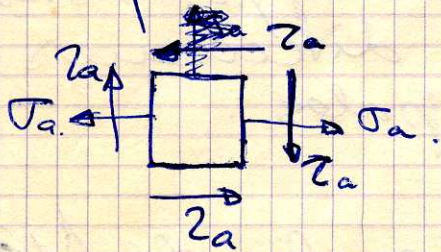
El punto  $a$  es como se traza el círculo  $\rightarrow$



$$\sigma_a = \frac{My}{I_z} \quad (50)$$

$$\tau_a = \frac{VMe}{BI_z}$$

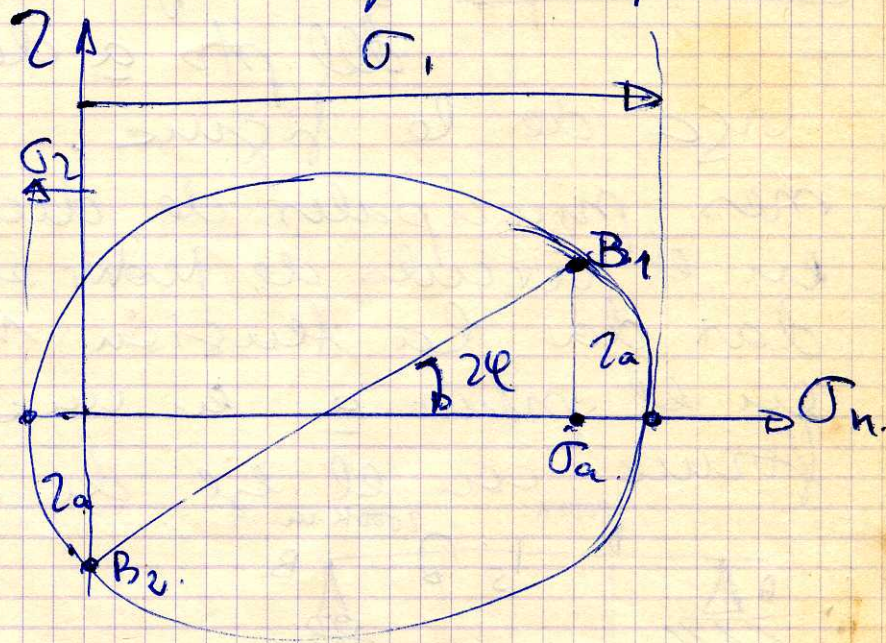
Hago un elemento infinitesimal alrededor del punto  $a$ . y voy a ver a que tensiones está sometido.



El círculo de Mohr del punto  $a$  es el de este elemento, puesto que todas sus caras pasan por  $a$ .

Llevo  $\sigma_a$  y  $\tau_a$  y hallo el pto  $B_1$  que define el estado en una cara. Hallo el  $B_2$  que define la de la cara perpendicular.

Como los pto de las dos caras perpend. definen un diámetro del círculo, lo dibujo.



Existen dos tensiones ppales:  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Vamos a calcularlas.

Aplico la fórmula (ecuación 2).  $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$

$\sigma_y = 0$  en este caso y  $\sigma_x = \sigma_a$ .

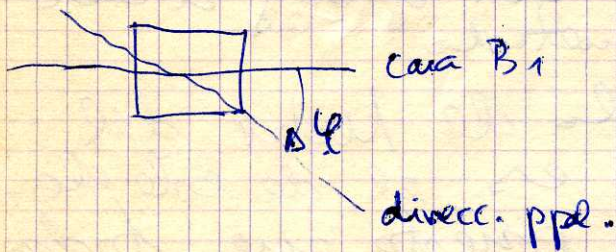
Por tanto: 
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_a}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2}$$

Direcciones principales: para pasar del pto

$B_1$  al que de la flexión ppal hay que girar un ángulo  $2\varphi$  (ver figura). Por tanto, para pasar de la dirección de la cara que representa

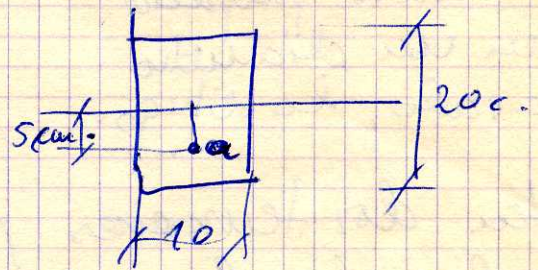
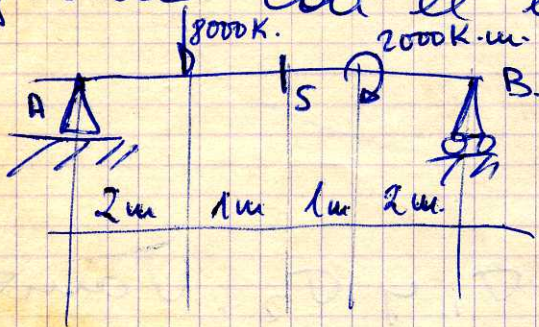
$B_1$  hay que girar  $\varphi$  en el mismo sentido.



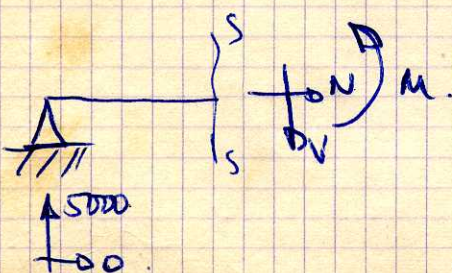
Las caras ppales serán las  $\perp$  direcciones principales.

Problema: Dibujar el círculo de Mohr del pto a de la sección S de la

viga de la figura. Calcular las tensiones principales de dicho punto y dibujar en el círculo de Mohr el pto cuyas coordenadas da la tensión normal que actúa en el punto a en una sección cuya normal forme con el eje de la barra  $30^\circ$ .



Calculo las reacciones  $\rightarrow$  salen  $R_A = 5000$   
 $R_B = 3000$



$$N = 0$$

$$V = -3000$$

$$\sum M_S = 0; 5000 \times 3 - 8000 \times 1 - M = 0; M = 7.000 \text{ K} \cdot \text{m} = 7.000 \times 10^3 \text{ K} \cdot \text{m}$$

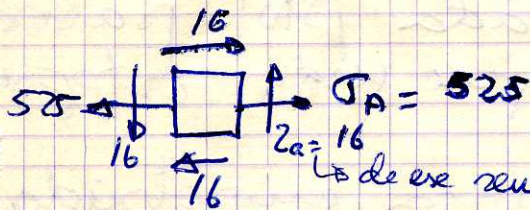
Tensiones del pto a:

Tensiones del punto a:

Habría  $\sigma_a = \frac{M y}{I_z} = \frac{7.000 \cdot 10^2 \cdot 5}{\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3} \approx 525 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  (51)

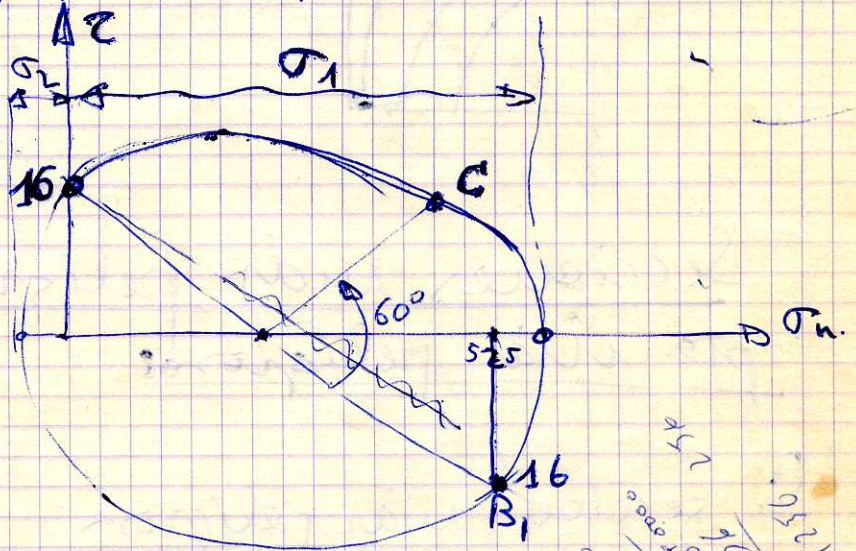
$\tau_a = \frac{V M_e}{b I_z} = \frac{3.000 (5 \cdot 10 \cdot 7,5)}{10 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3} = -16 \text{ Kg/cm}^2$

Hizo un elemento infinitesimal alrededor del punto a y veo las tensiones a que está sometido:



Los de ese sentido, por eso sale negativo.

Circulo de Mohr

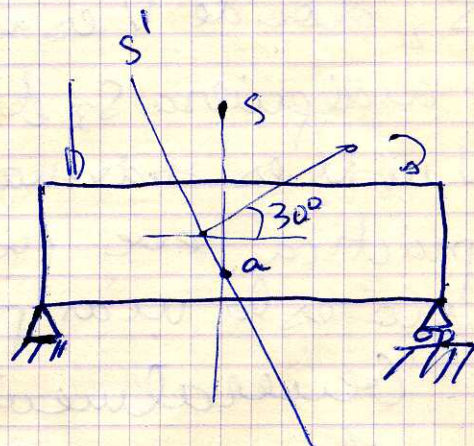


Tensiones principales:  
 $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ :

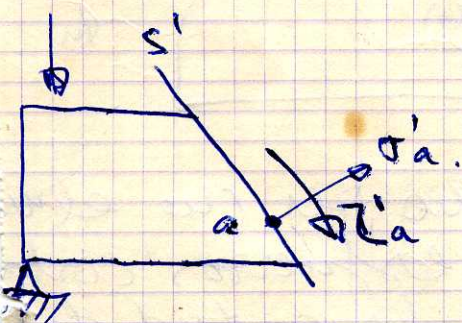
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2} = \frac{525}{2} + \sqrt{\left(\frac{525}{2}\right)^2 + 16^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_a}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2}$$

Sección a 30° →



Pto. cuyas coordenadas son  $\sigma'_a$  y  $\tau'_a$ .



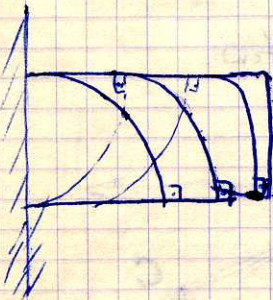
Para pasar de s a s' giro 30° sent. contrario al reloj. Por tanto,

tendré que pasar de B1 60° en el mismo sentido. El punto C, que resulta no da LAS TENSIONES PEDIDAS

TEORIA Todo punto de una viga tiene dos direcciones principales, perpendiculares entre si.

Líneas isotáticas (o direcciones de las fatiga)

Una línea isotática es una curva tal que la tangente en un pto. cualquiera de esa curva señala la dirección ppal. de ese pto. Por tanto, por cada pto. pasará dos líneas isotáticas, que serán ortogonales.



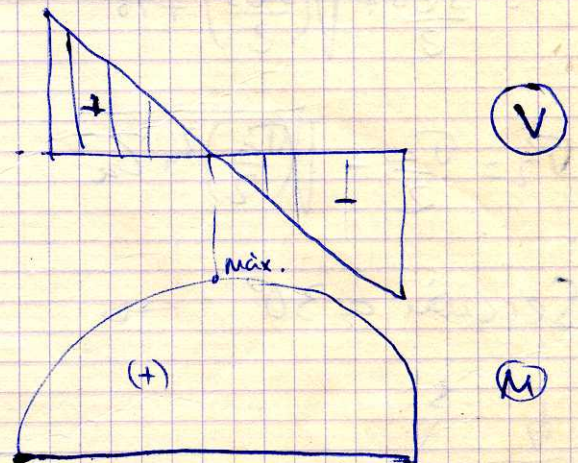
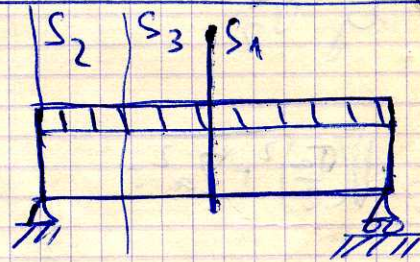
→ caso de viga empotrada

Secciones más peligrosas de una viga y pto. más peligrosos:

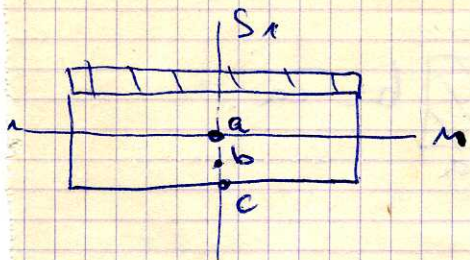
La sección más peligrosa es la  $S_1$  donde  $M$  es máx.  
o es  $S_2$  donde  $V$  es máx.,  
o una cualquiera  $S_3$  donde ni  $V$  ni  $M$  es máximo

En la práctica, se ve que le  $S_3$  no es la más peligrosa. Generalmente la más peligrosa es  $S_1$ .

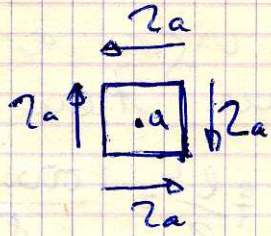
donde mom. flect. es máximo a no ser que el material resista muy poco los esfuerzos cortantes. Cuanto mayor sea la longitud de la viga, mayor es la influencia del momento flector.



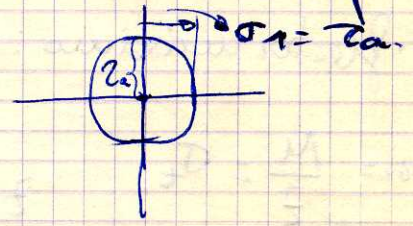
Punto más peligroso de  $S_1$ : considero aquel que tiene una tensión principal máxima. Puedo ser  $a, b$  o  $c$ . (52)



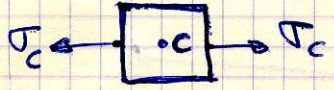
a)  $\sigma_a = 0$  (por estar en n-n)  
 $\tau_a = \text{máx.}$



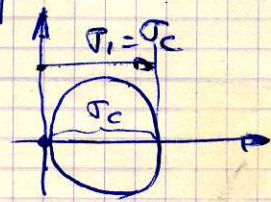
o sea, trabaja a tensión cortante pura.



c)  $\sigma_c = \text{máx.}$   
 $\tau_c = 0$

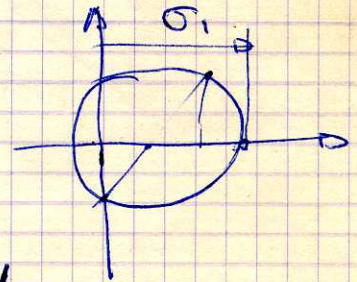
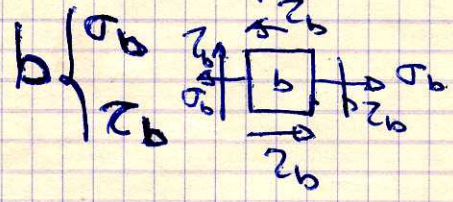


Trabaja a extensión simple.

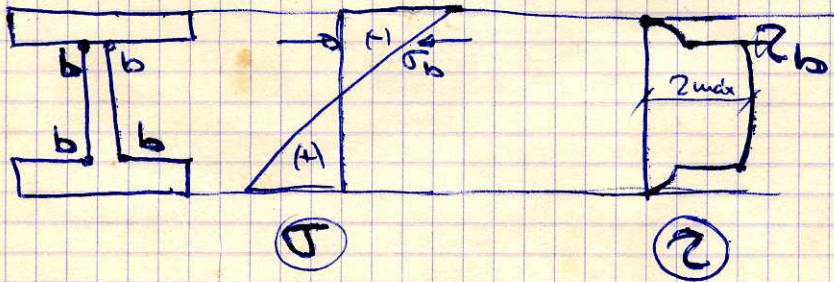


El pto c suele ser más peligroso porque en qual  $\sigma_c > \tau_c$

A veces el pto. más peligroso es un pto. b. cualquiera



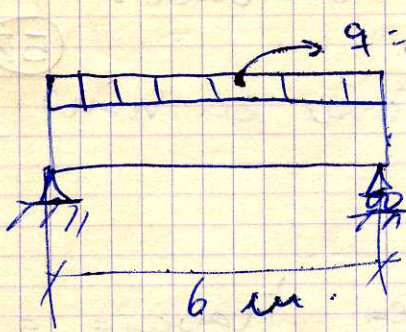
y puede suceder que esta  $\sigma_1$  sea la mayor de todas. Esto ocurre en la doble T




$\sigma_b \approx \text{máx.}$   
 $\tau_b \approx \text{máx.}$

La  $\sigma_{ppal}$  de b es la máxima.

Problema: calcular las dimensiones de la sección de la viga de la figura



Sección  $\rightarrow$    $b = 2a$ .

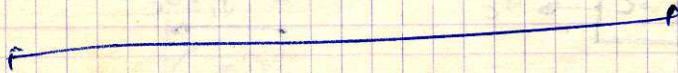


La viga es de un material que tiene  $\sigma_{trabajo} = 1000 \text{ Ks/cm}^2$   
Máx. flector máximo:  $M_{\max} = q \frac{l^2}{8} = \frac{1000 \cdot 36}{8} 10^2 = 4.500 \cdot 10^2 \text{ K} \cdot \text{cm}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \sigma_t$$

$$Z = \frac{M}{\sigma_t} = 450 \text{ cm}^3 \text{ como } Z = \frac{1}{6} a(2a)^2 \rightarrow \underline{a}$$

Mod. resist. de la sección



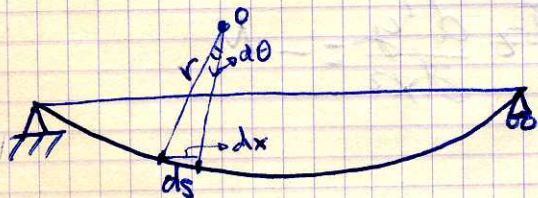
# ELÁSTICA DE VIGAS lección 53

Elastica de una viga  $\rightarrow$  forma que adopta el eje de la viga después de deformarse.

Al proyectar una viga, generalmente se diseña para resistir la carga, pero a veces hay que poner una limitación a la flecha de la elástica.



Ecuación diferencial de la elástica de una viga



$$ds = r d\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \quad \text{flect (curvatura)}$$

Como la curvatura siempre +

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

$d\theta$  y  $ds$  son de sentidos contrarios, luego  $\frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{ds}$ .

Puedo sustituir  $ds$  por  $dx$  y  $\tan \theta$  por  $\theta$ .

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{dx}$$

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Por otra parte sabemos que  $\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$ .

Sea:

$$\frac{M}{EI_z} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\rightarrow$

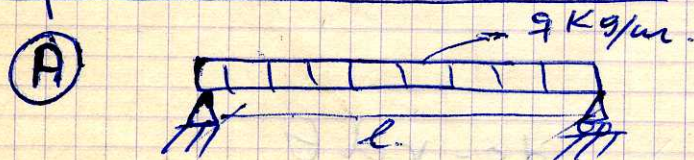
$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

Esta es la ec. dif. aprox. de la elástica

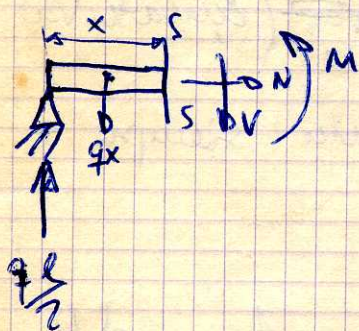
Es válida si considero que la deformación de la viga es producida solo por el momento flector, o sea, despreciando la deformación debida al esfuerzo cortante. También el material tiene que seguir la ley de Hooke

Para obtener la elástica de una viga, hay que integrar esta ecuación diferencial (poniendo  $M$  en función de  $x$ ) la elástica tendrá tantas ecuaciones como ecuaciones de  $M$  haya a lo largo de la viga. Si  $I_z$  es variable, hay que ponerlo en función de  $x$

### Ejemplos de elásticas:



$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$



$$M = q \frac{l}{2} \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

Llevando a la ecuación

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -q \frac{l}{2} x + q \frac{x^2}{2}$$

Integrando:  $EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{q l x^2}{4} + \frac{q x^3}{6} + C_1$

" la 2ª vez:  $EI_z y = -\frac{q l x^3}{12} + \frac{q x^4}{24} + C_1 x + C_2$

Para calcular  $C_1$  y  $C_2$  hacen falta dos ecuaciones de condición.

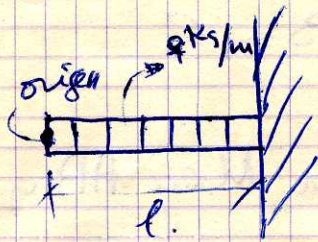
(1) Para  $x=0$   $y=0$ .

(2) En el pto más bajo lo frente es horizontal:

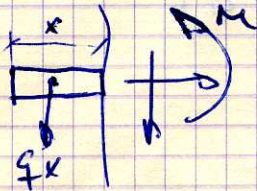
Para  $x = l/2$   $\frac{dy}{dx} = 0$  -

(54)

(B)



$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$



$M = -\frac{qx^2}{2}$  . Llevo a la ecuación diferencial.

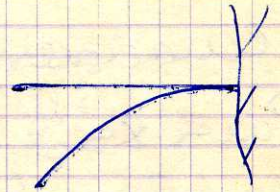
$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}$$

$$EI_z \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C_1, \quad EI_z y = \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

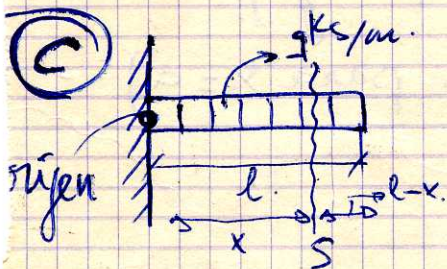
Ecuaciones de condición.

1º) para  $x=l$   $y=0$

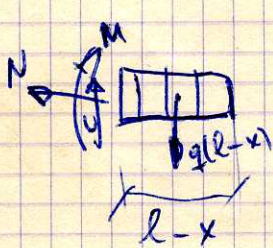
2º) para  $x=l$   $\frac{dy}{dx} = 0$



(C)



$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$



$$M = -\frac{q(l-x)^2}{2}$$

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q(l-x)^2}{2} \rightarrow y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

1º) Para  $x=0$   $y=0$

2º) Para  $x=0$   $\frac{dy}{dx} = 0$

(D)



La elástica tendrá dos ecuaciones → desde A hasta y otra de B a C.

Voy a calcular M en AB y en BC

$$M_{AB} = R_A \cdot X.$$

$$M_{BC} = R_A \cdot X - P(X-a)$$

Tramo AB	Tramo BC
$EI_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -R_A x.$ $\theta = f(x c_1)$ $y = \psi(x c_1, c_2)$	$EI_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -R_A x + P(x-a).$ $\theta = F(x c'_1)$ $y = \Psi(x c'_1, c'_2).$

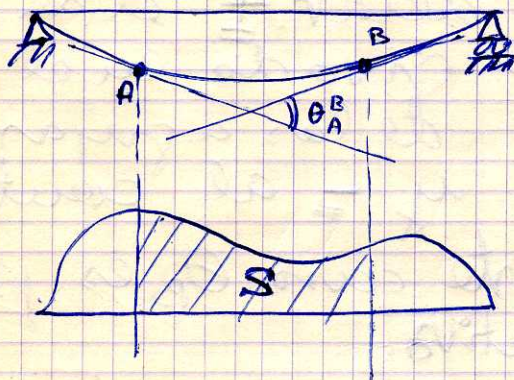
4 ecuaciones de condición.

- 1ª) Para  $x=0, y=0$
- 2ª) Para  $x=a+b, y=0$
- 3ª) Para  $x=a, \psi(x|c_1, c_2) = \Psi(x|c'_1, c'_2)$ . (Hay flecha única)
- 4ª) La tange en B es única (0 sea. para  $x=a$ )  
 $f(x|c_1) = F(x|c'_1)$ .

# TEOREMAS DE MOHR.

(55)

1<sup>er</sup> teorema: el ángulo que forma la tangente en A con la tangente en B siendo A y B dos pts. de la elástica de una viga es igual al área del diagrama de momentos flectores comprendida entre las verticales de A y de B dividida por la rigidez a la flexión de la viga ( $EI_z$ )

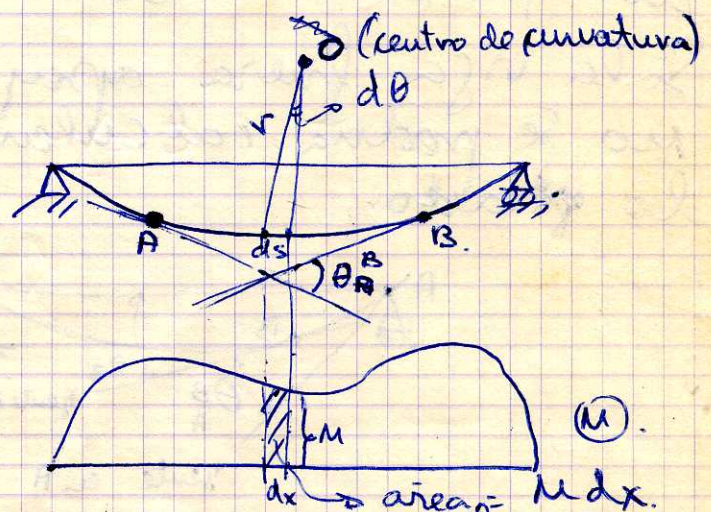


$$\theta_{A}^{B} = \frac{S}{EI_z}$$

(M)

$$ds = r d\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z}$$



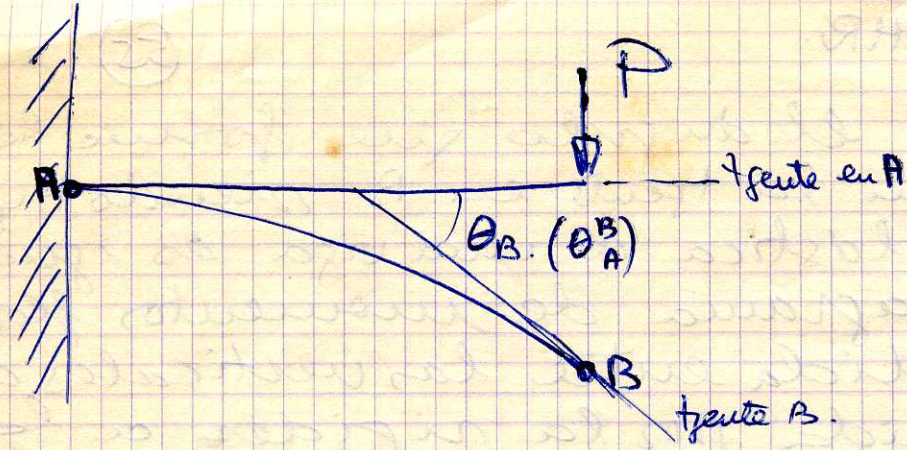
$$d\theta = \frac{M dx}{EI_z}$$

(también es el ángulo que forman las tangentes en los extremos de  $ds$ )

$$\theta_{A}^{B} = \int_A^B \frac{M dx}{EI_z} = \frac{S}{EI_z} \quad \left[ S = \text{área comprendida entre verticales de A y B} \right]$$

Sirve el teorema para calcular el giro de una sección respecto de otra. En ocasiones (caso de una viga empotrada) sirve para calcular el ángulo total girado por una sección.

Me piden calcular el giro en B  $\rightarrow$  traizo la tgente en A y uso el  $\theta$ .



$$\theta_A^B = \frac{S}{EI_z}$$

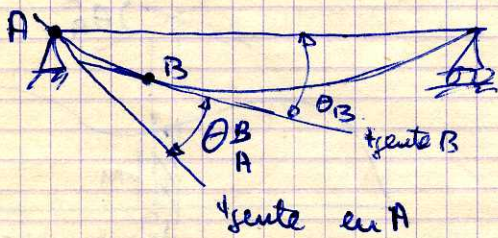
Signos: voy a considerar  $\pm$  el ángulo girado en el sentido de las agujas del reloj  $\equiv$  al contrario.

En este caso  $\theta_B$  es positivo.

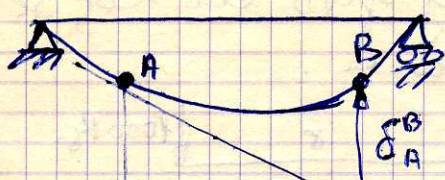
aunque el área sea negativa.

Si la viga fuera apoyada en vez de empotrada no se podría calcular por este teorema el ángulo girado.

El teorema da el ángulo  $\theta_A^B$  y no  $\theta_B$ .

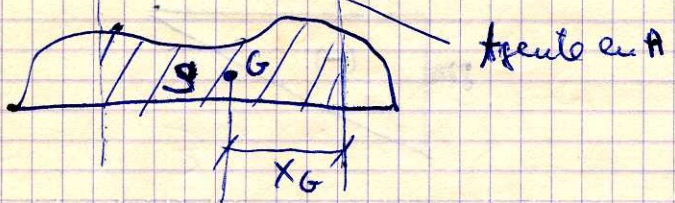


2º teorema: la distancia de B a la tgente en A medida según la vertical (siendo  $A_1$  y  $A_2$  dos pto. de la elástica de una viga) es igual al momento <sup>estático</sup> con respecto a la vertical de del área del diagrama de momentos flectores comprendida entre las verticales de  $A_1$  y  $A_2$  dividida por la rigidez a la flexión de la viga.

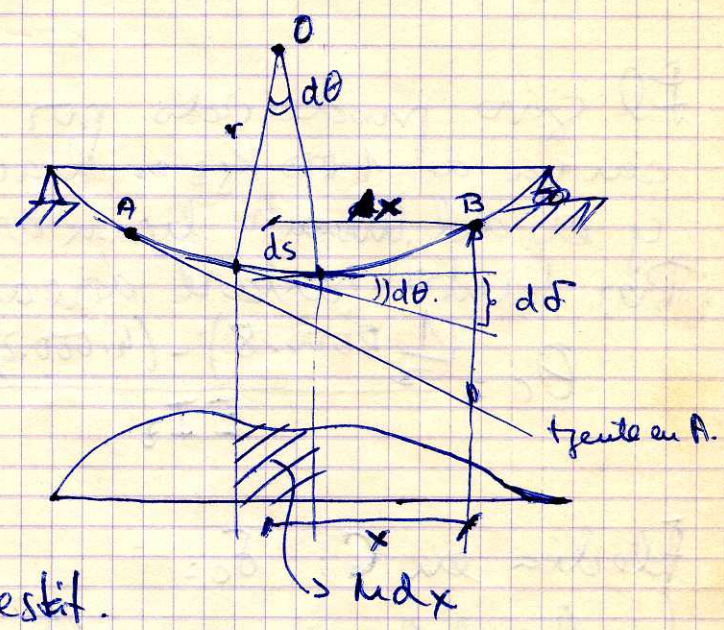


$$\delta_A^B = \frac{S \cdot X_G}{EI_z}$$

(M)



$$d\theta = \frac{M dx}{EI_z}$$

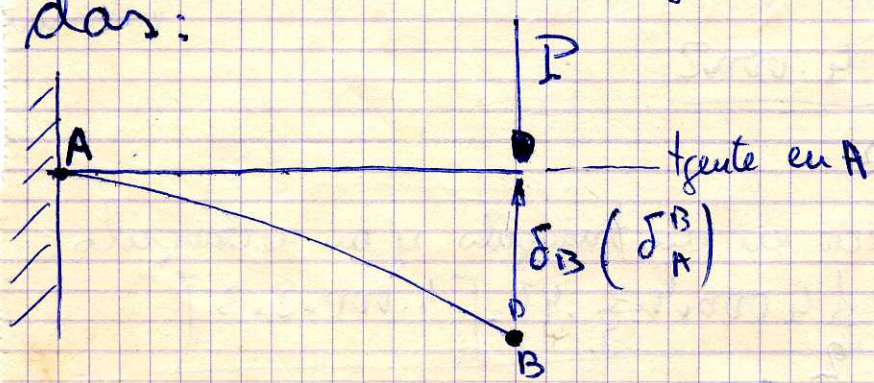


$$d\delta = x d\theta = \frac{M dx \cdot x}{EI_z}$$

Pero  $M dx \cdot x$  es el momento estát. de esa área respecto a la vertical en B.

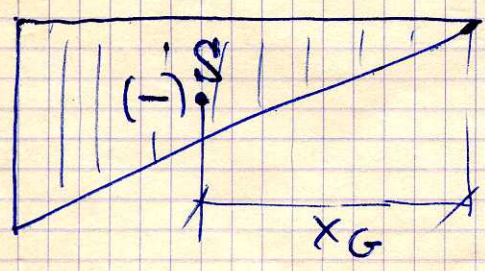
$$\text{ luego } \delta_A^B = \int_A^B \frac{M dx \cdot x}{EI_z} = \boxed{\frac{S X_G}{EI_z}}$$

Permite calcular flechas en vigas empotradas:



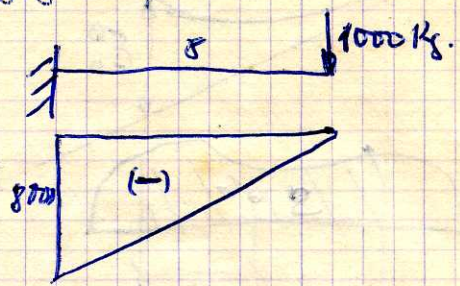
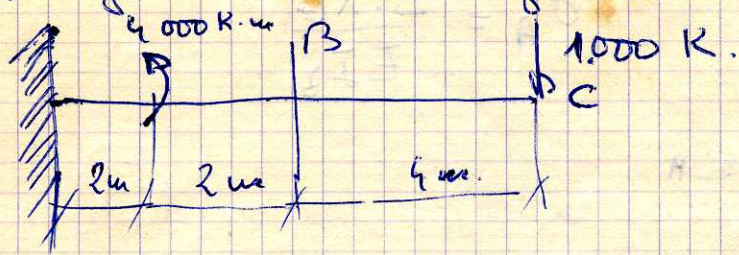
Me pueden calcular la flecha en B?

$$\delta_B = \frac{S X_G}{EI_z}$$

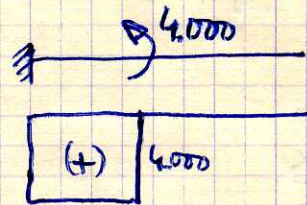


Signos: flechas +, hacia abajo. Negativas hacia arriba.

Problema: Calcular flecha y giro en los secciones B y C de la viga de la figura.



El giro producido por la carga de 1.000 Kgs es hacia abajo y el del momento hacia arriba. Por tanto, restare áreas.



$$\theta_c = \frac{\left(\frac{1}{2} 8000 \cdot 8\right) - (4000 \cdot 2)}{EI_z}$$

Flecha en C:  $\delta_c =$

La de la carga es + (hacia abajo), la del momento es negativa (hacia arriba). Por tanto restare también.

$$\delta_c = \frac{\left[\frac{1}{2} 8000 \cdot 8 - \frac{2}{3} 8\right] - (4000 \cdot 2 \cdot 7)}{EI_z}$$

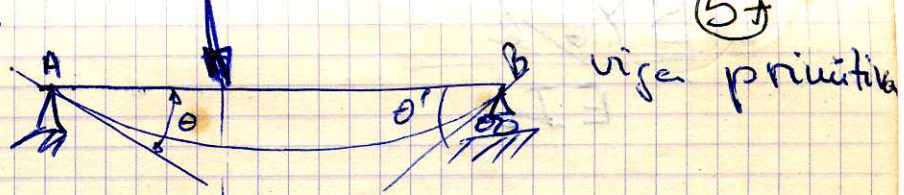
En B

$$\theta_B = \frac{\left(\frac{8000 + 4000}{2} \cdot 4\right) - 4000 \cdot 2}{EI_z}$$

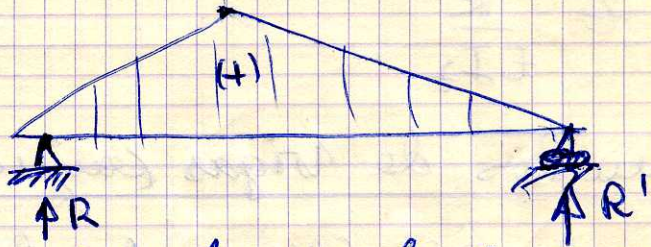
Descompongo el trapecio en un triángulo y un rectángulo:

$$\text{Flecha: } \delta_B = \frac{\left[4000 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} 4000 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4\right] - [4000 \cdot 2 \cdot 3]}{EI_z}$$

# Viga conjugada



Viga conjugada de esta es la misma viga pero quitadas las cargas y cargada con una carga que es el diagrama de momentos flectores de la viga primitiva.



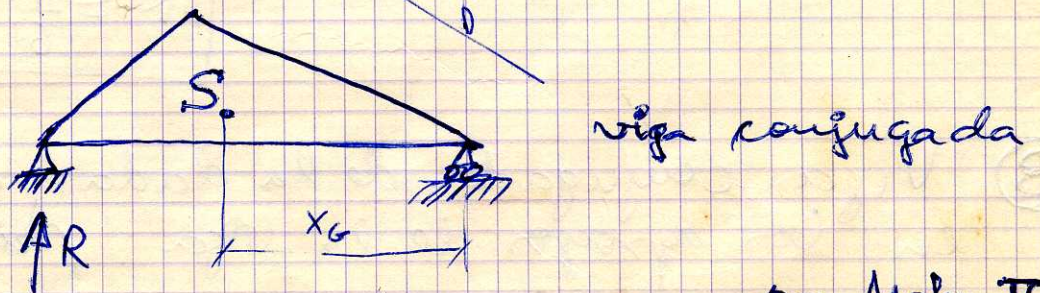
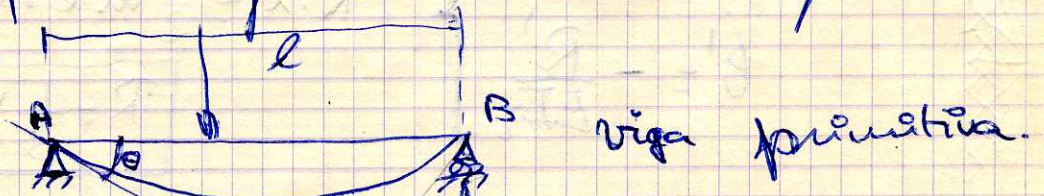
Propiedad de la viga conjugada: el círculo girado por la viga primitiva en un apoyo es la reacción en ese apoyo en la viga conjugada dividido por  $EI_z$

P.ej.  $\theta$  en apoyo A :  $\theta = \frac{R}{EI_z}$  (positivo).

$\theta' = -\frac{R'}{EI_z}$  (negativo)

$R$  y  $R'$  hay que llevarlos a la fórmula con su signo, o sea que  $\theta'$  puede resultar positivo.

demostración:



para demostrar

$$\theta = \frac{R}{EI_z}$$

$$\theta = \int \theta = \frac{\int_A^B S}{l} = \frac{S \cdot X_G}{EI_z} =$$

por Mohr II

$$= \frac{S \times G \cdot l}{EI_z}$$

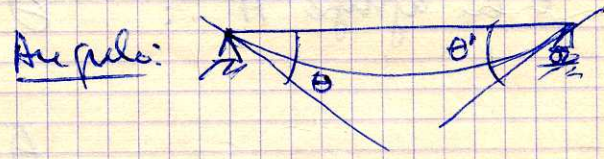
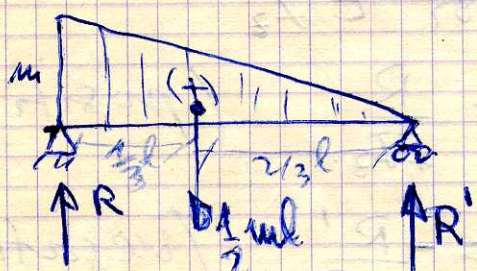
Si en la conjugada tomamos momentos respecto a B

$$R \cdot l - S \times G = 0 \rightarrow R = \frac{S \times G}{l}$$

O sea  $\theta = \frac{R}{EI_z}$

### Ejemplos de vigas conjugadas:

Ⓐ Hallar la viga conjugada de la dada y ángulos girados en los apoyos de la viga primitiva

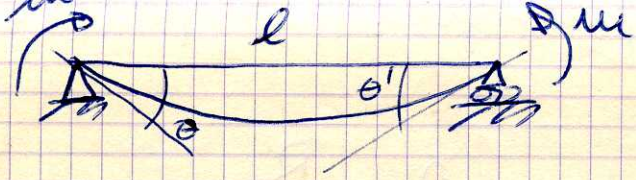


Se fue  $\theta = \frac{R}{EI_z}$   
 $\theta' = -\frac{R'}{EI_z}$

Calculo R y R':  
 $R \cdot l - \frac{1}{2} m l \cdot \frac{2}{3} l = 0$   
 $R = \frac{1}{3} m l$

$R' \cdot l - \frac{1}{2} m l \cdot \frac{1}{3} l = 0$   
 $R' = \frac{1}{6} m l$

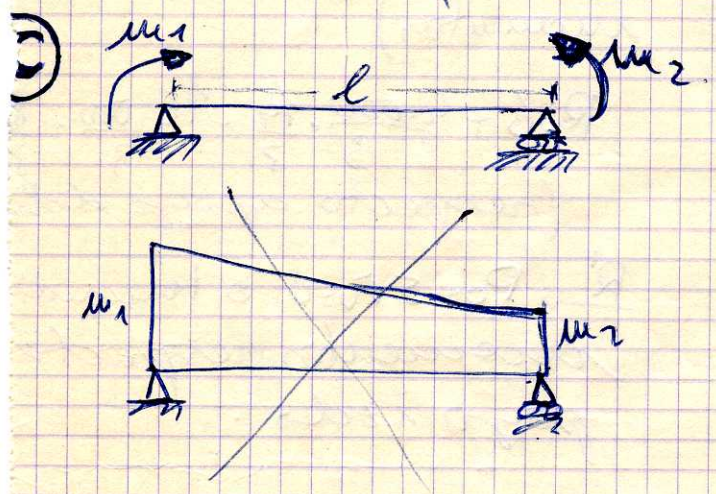
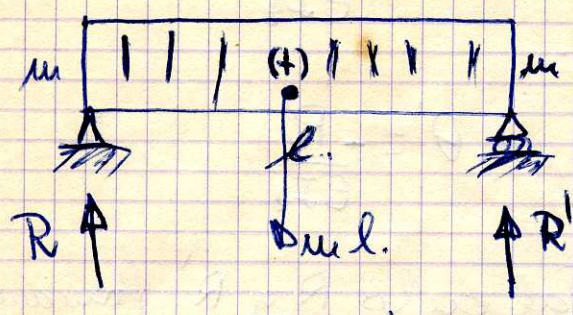
Ⓑ Viga conjugada de la dada y ángulos girados en los apoyos de la viga primitiva



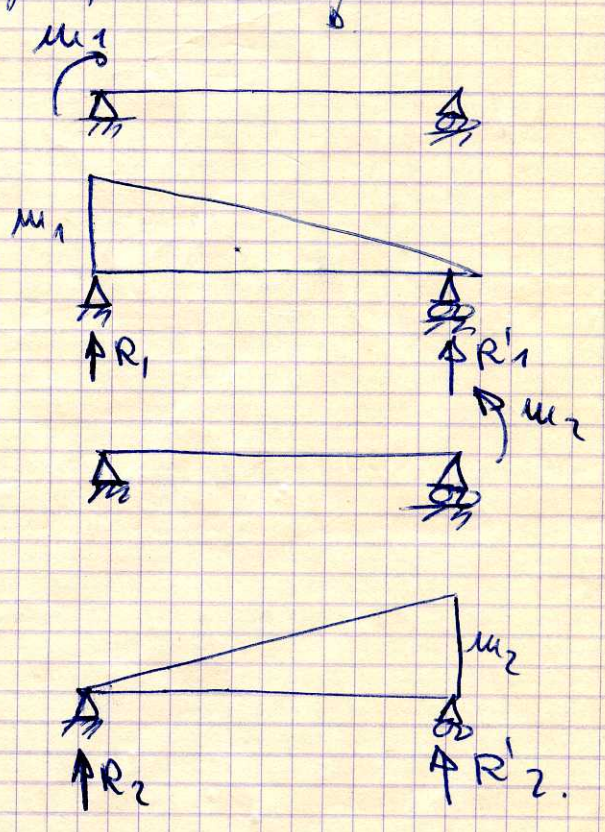
$$\theta = R/EIz$$

$$\theta' = -R'/EIz$$

$$R = R' = \frac{ml}{2}$$



No me interesa trabajar con esa conjugada, sino aplicar el principio de superposición:



$$\theta = \frac{R_1 + R_2}{EIz}$$

$$\theta' = -\frac{R'_1 + R'_2}{EIz}$$

Estas reacciones están calculadas antes.

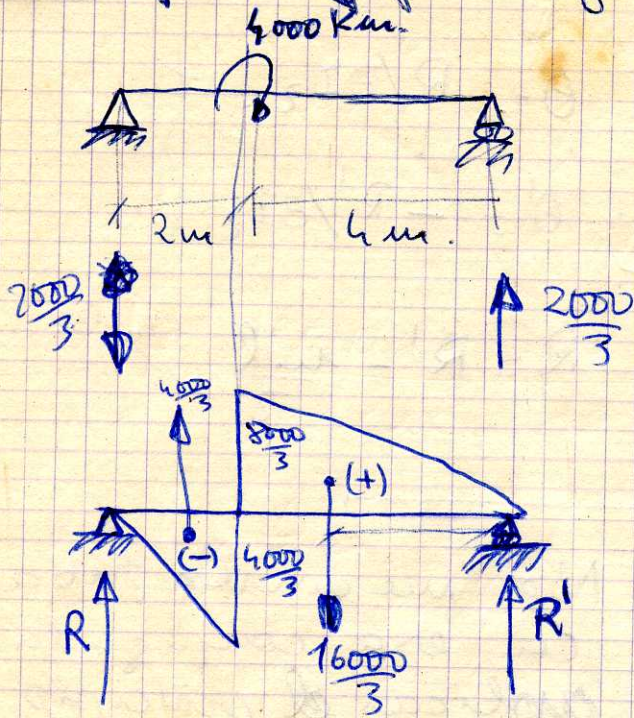
$$R_1 = \frac{1}{3} m_1 \cdot l$$

$$R_2 = \frac{1}{6} m_2 \cdot l$$

$$R'_1 = \frac{1}{6} m_1 \cdot l$$

$$R'_2 = \frac{1}{3} m_2 \cdot l$$

② Viga conjugada y ángulos girados en apoyos.



$$\theta = \frac{R}{EI_z}$$

$$\theta' = -\frac{R'}{EI_z}$$

Calculo  $R$  y  $R'$  (tomando momentos).

$$R \cdot 6 + \frac{4 \cdot 000 \cdot 14}{3} - \frac{16 \cdot 000 \cdot 8}{3} = 0$$

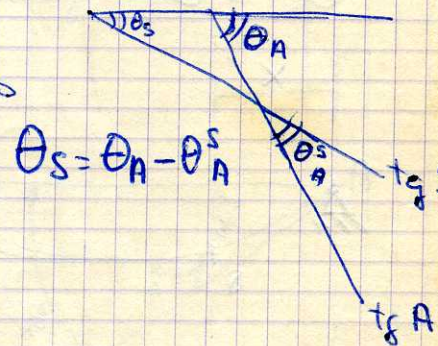
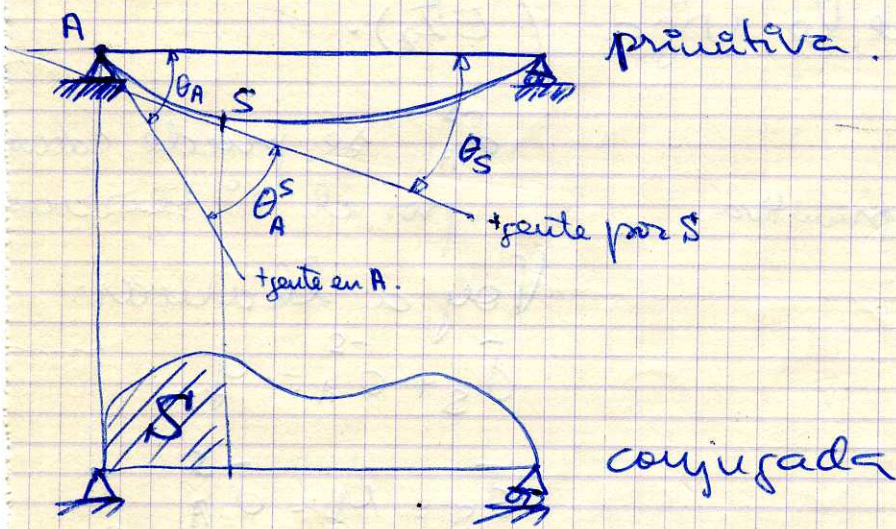
(respecto apoyo dcho)

$R' \rightarrow$  Por  $\sum F_v = 0$  o tomando momentos respecto apoyo izdo.

Tercer Teorema de Mohr: se basa en la viga conjugada y dice:

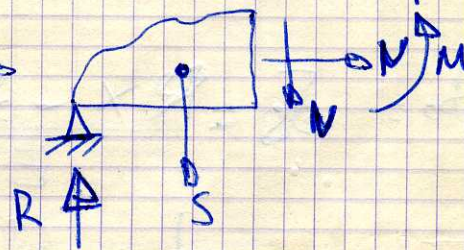
(59)

El ángulo girado por una sección de una viga apoyada en dos apoyos es igual al esfuerzo cortante que actúa en esa sección, pero en la viga conjugada, dividido por la rigidez a la flexión de la viga ( $EI_z$ ).



lo puedo calcular  $\rightarrow \theta_A = \frac{R}{EI_z}$   
 $\theta_S^S = \frac{S}{EI_z}$   
 $\theta_S = \frac{R - S}{EI_z}$

El numerador  $R - S$



$V = R - S$

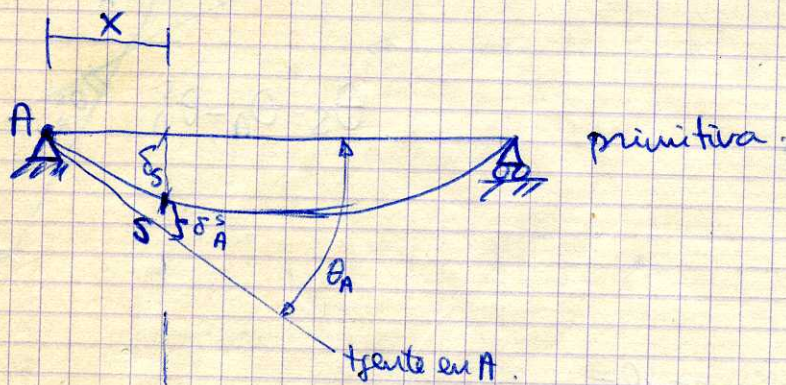
luego:  $\theta_S = \frac{V}{EI_z}$

siendo  $V$  el esf. cort. que actúa en la sección  $S$  de la viga conjugada.

Signo de  $\theta_S \rightarrow$  el mismo que  $V$ .

El tercer teorema de Mohr sirve para calcular giros de secciones de una viga apoyada en dos apoyos. A este teorema se le suele llamar también primer teorema de la viga conjugada.

Cuarto teorema de Mohr: la flecha en una sección de una viga apoyada en dos apoyos es igual al momento flector que actúa en esa sección pero en la viga conjugada dividido por la rigidez a la flexión de la viga ( $EI_z$ ).



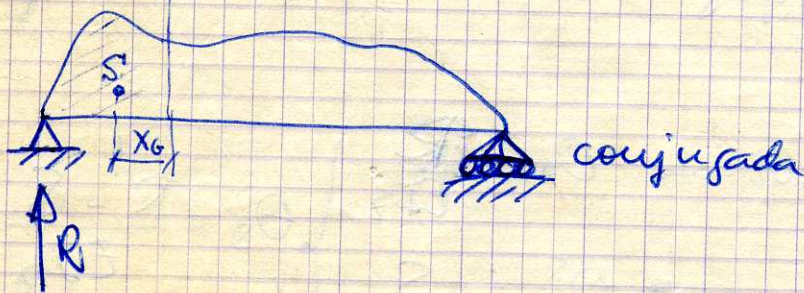
$\delta_A^S$  se puede calcular por el 2º teorema

Voy a llamar:

$$\delta_S + \delta_A^S = y$$

$$\delta_S = y - \delta_A^S$$

$$y = \theta_A \cdot x = \frac{R}{EI_z} \cdot x$$



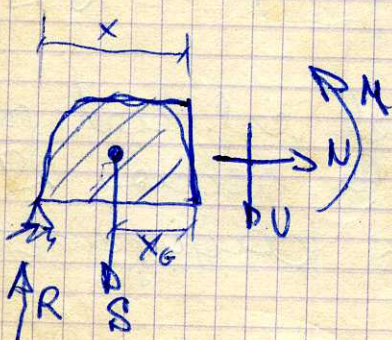
$$\delta_A^S = \frac{Sx_G}{EI_z} \quad (2^\circ \text{ Mo})$$

Por tanto = 
$$\delta_S = \frac{Rx - Sx_G}{EI_z}$$

tomando momentos:

$$Rx - Sx_G - M = 0 \rightarrow M = Rx - Sx_G$$

Luego 
$$\delta_S = \frac{M}{EI_z}$$
 
$$M \text{ en la viga conjugada}$$

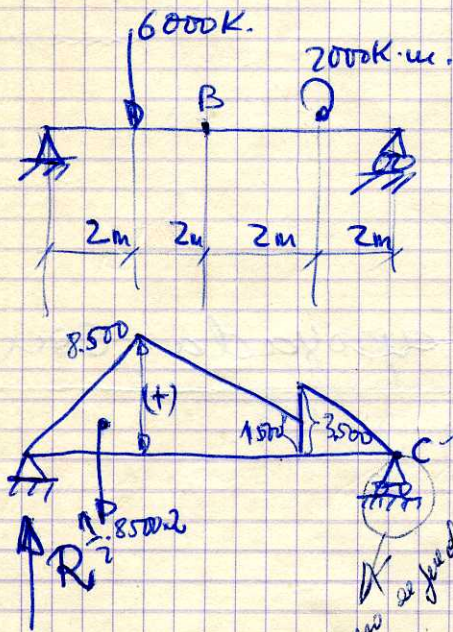


Sea, este teorema sirve para calcular flechas en secciones de una viga apoyada en dos apoyos. A este teorema se le llama también 2º teorema de la viga conjugada (6)

Resumen:

- |         |   |                              |
|---------|---|------------------------------|
| 1º Mohr | → | giros de vigas empotradas.   |
| 2º Mohr | → | flechas en vigas empotradas. |
| 3º Mohr | → | giros en vigas apoyadas.     |
| 4º Mohr | → | flechas de vigas apoyadas.   |

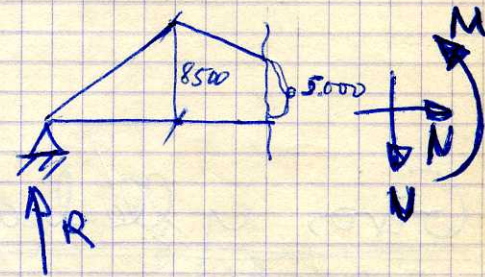
Problema: calcular flecha y giro en la sección B de la viga de la figura.



ya no se puede aplicar el 1º y 2º

calculo R tomando  $\sum Mc = 0 \rightarrow [R]$

Corte por B:



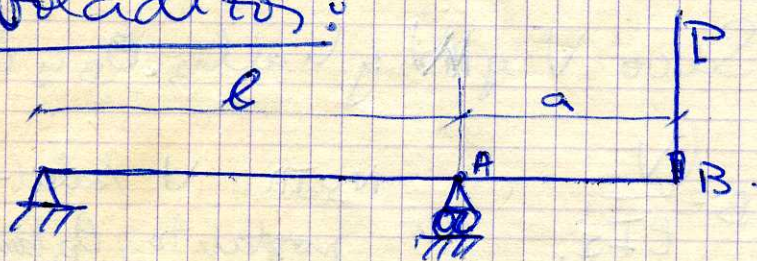
Saco V y M y hallo  $\theta_B$  y  $\delta_B$

$$\theta_B = \frac{V}{EI_z}$$

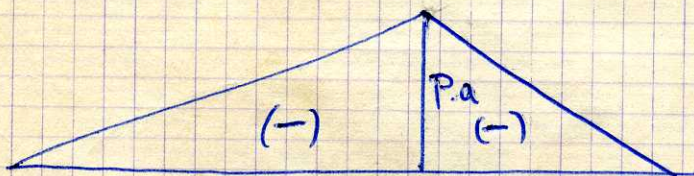
$$\delta_B = \frac{M}{EI_z}$$

NOTA: V sale (-) y por tanto,  $\theta_B$  también

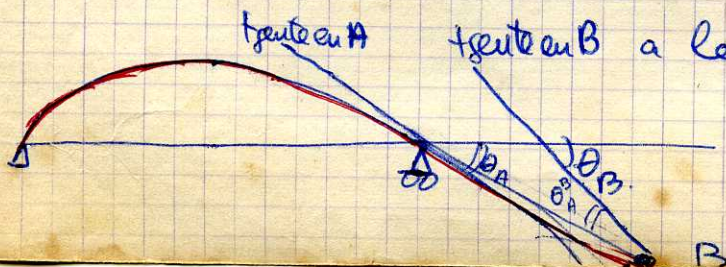
Giros y flechas en una viga apoyada con voladizo:



Calcular giro y flecha en B:



(M)



tangente en A a la deformada.

tangente en B a la deformada.

El ángulo entre tangentes  $\rightarrow \theta_A^B$ .

(61)

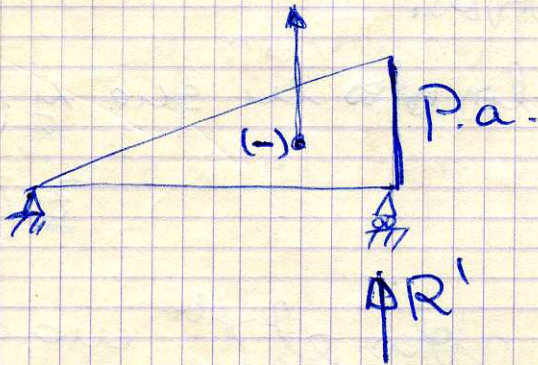
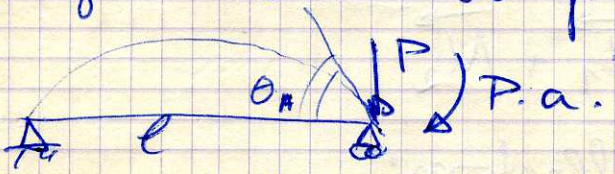
Tenemos  $\theta_B = \theta_A + \theta_A^B$

$\theta_A^B \rightarrow$  ángulo de la tangente en B con la tangente en A = área del diagrama de  $M$  comprendida entre las verticales etc.

$$\theta_A^B = \frac{\frac{1}{2} P \cdot a \cdot a}{EI_z}$$

$\theta_A \rightarrow$  para calcularlo tengo que pasar de esta viga a una apoyada sin voladito por que la propiedad  $\theta = \frac{R}{EI_z}$  la hemos demostrado solo para vigas sin voladito.

Sustituyo el voladito por su efecto:  $\downarrow P \cdot a$ .



$$\theta_A = -\frac{R'}{EI_z} = \frac{\frac{1}{3} M \cdot l}{EI_z}$$

( $R'$  calculada ayer)

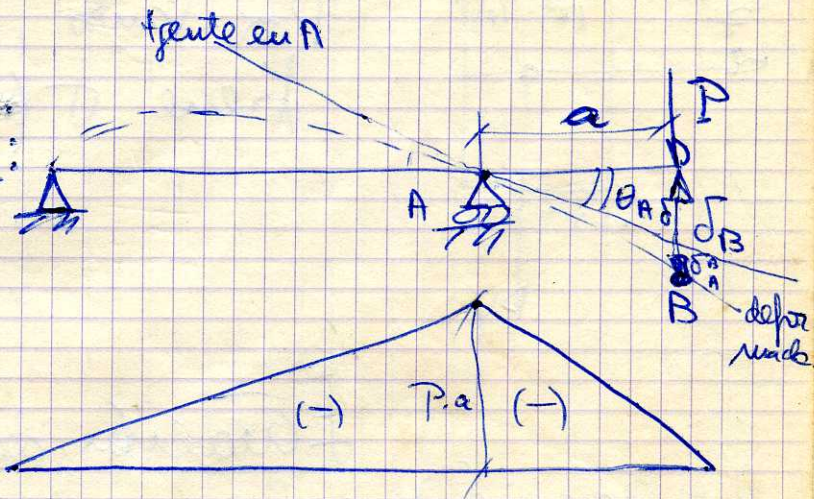
Cálculo de la flecha:

$$\delta_B = \delta + \delta_A^B$$

$\rightarrow$  conocido.

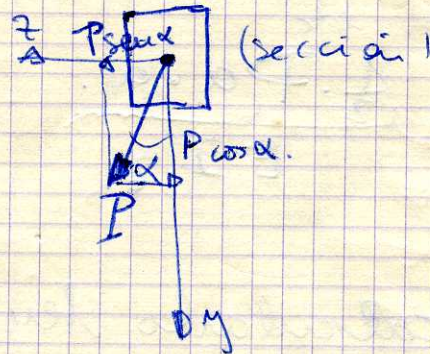
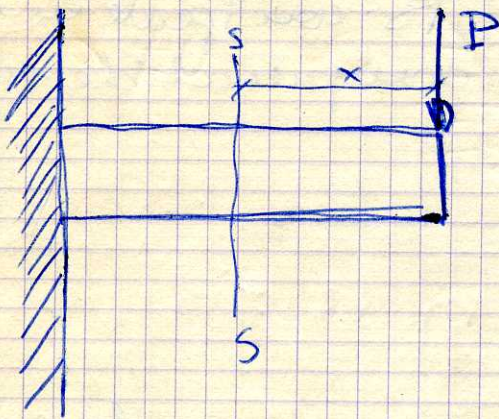
$$\delta = \theta_A \cdot a$$

$$\delta_A^B = \frac{\frac{1}{2} P \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a}{EI_z} \quad (2^\circ \text{ teorema})$$



Deformación de una viga cuando actúa un carga inclinada que no coincide con un eje de simetría de la sección:

La carga pasa por el c.d. S. por lo que no produciría torsión.

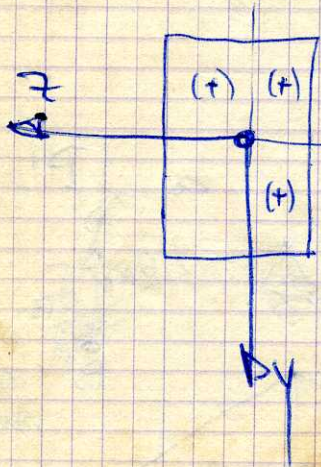


$P \cos \alpha$  produce un  $M_1 = P \cos \alpha \cdot X$  (en la sección S).  
 $P \text{ sen } \alpha$  " "  $M_2 = P \text{ sen } \alpha \cdot X$

Momento total:  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$

Las  $\sigma$  de los momentos flectores:

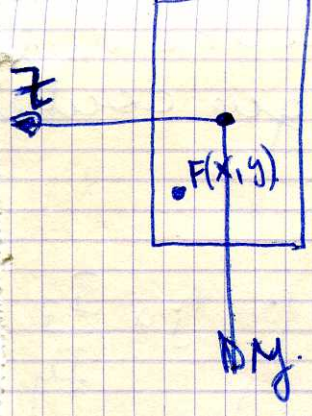
$M_1$  produce  $\sigma (+)$  en los pts en que  $y (-)$   
 $M_2$  "  $\sigma (+)$  " " " "  $z (-)$



Por tanto, solo el 1º cuadrante tiene  $\sigma (-)$  de  $M_1$  y  $M_2$

Ecuación de la línea neutra para la sección S:

Y ay a calcular la flexion en  $F(x,y)$ :

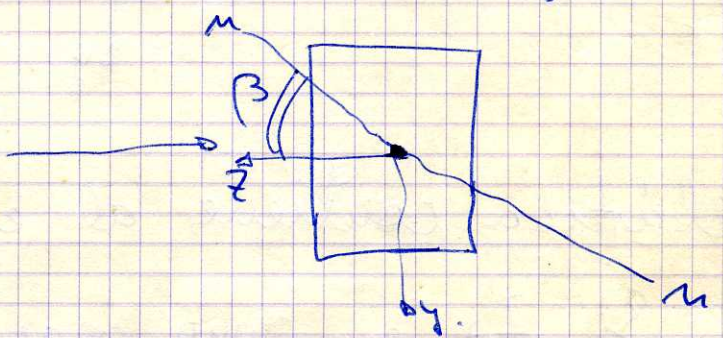


$$\sigma_F = - \frac{M_1 \cdot y}{I_z} - \frac{M_2 \cdot z}{I_y}$$

En la linea neutra  $\sigma = 0$ .

$$0 = \frac{M_1 \cdot y}{I_z} + \frac{M_2 \cdot z}{I_y} = \frac{P \cos \alpha \cdot x \cdot y}{I_z} + \frac{P \operatorname{sen} \alpha \cdot x \cdot z}{I_y} = 0$$

$$\frac{y \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \operatorname{sen} \alpha}{I_y} = 0$$



$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{y}{z}$$

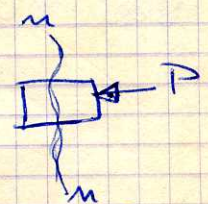
Respeando de la ecuacion  $y/z$  obtengo:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{y}{z} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y}$$

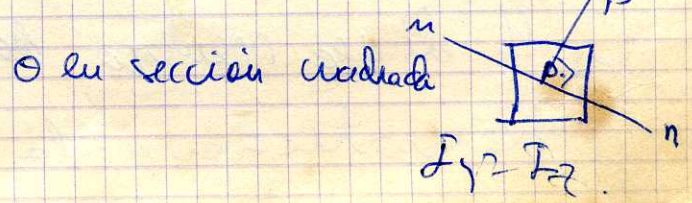
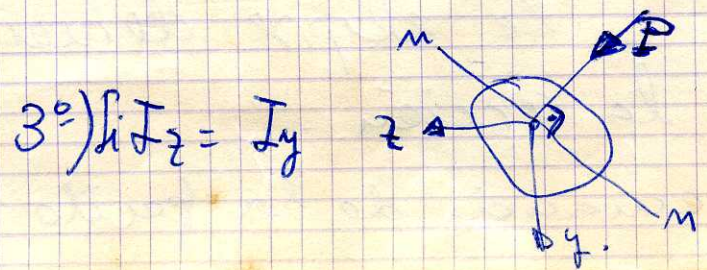
El plano de la elastica es un plano perpendicular a la linea neutra y que contiene al eje

$\beta$  coincide con  $\alpha$  en uno de los tres casos siguientes:

1º) Si  $\alpha = 0 \rightarrow \beta = 0$



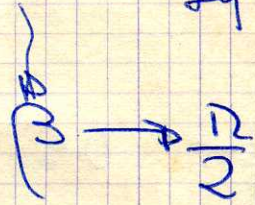
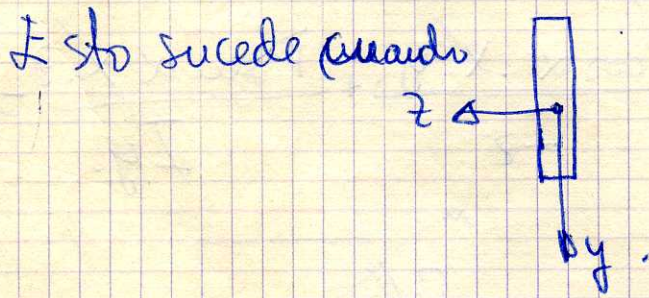
2º) Si  $\alpha = \pi/2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \infty = \operatorname{tg} \beta \rightarrow \beta = \pi/2$



o en seccion cuadrada  $I_y = I_z$

Cuando  $\beta$  no coincide con  $\alpha$ , la línea neutra no es perpendicular al plano que contiene al eje y a la carga.

-  $\alpha \neq 0$  Si  $\frac{I_z}{I_y}$  es muy grande,  $\tan \beta = \tan \alpha \frac{I_z}{I_y}$

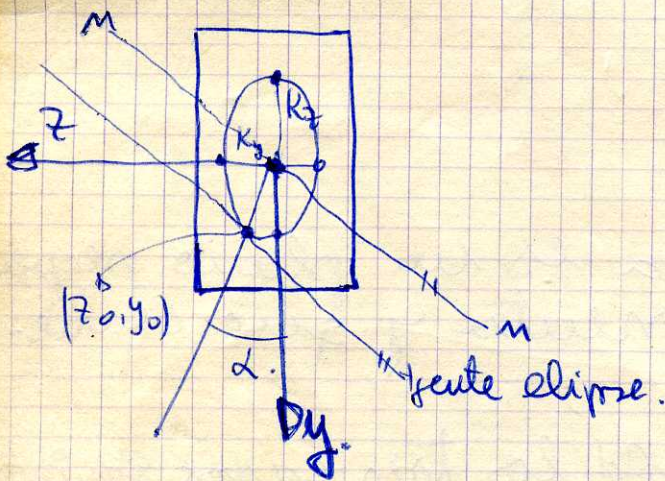


o sea, la línea neutra tiende a ser el eje y el plano de la

elástica contiene al eje  $z$ .

Si  $\frac{I_z}{I_y}$  es muy pequeño —  $\beta \rightarrow 0$ .

### Propiedad de la línea neutra:



Para construir la elipse de inercia llevo  $K_y$  y  $K_z$  radio de giro.

$$K_z = \sqrt{\frac{I_z}{\text{Area}}}$$

$$K_y = \sqrt{\frac{I_y}{\text{Area}}}$$

La ecuación de la elipse de inercia:

$$\frac{z^2}{K_y^2} + \frac{y^2}{K_z^2} = 1$$

La fente en  $z_0 y_0$  a la elipse de inercia

es // línea neutra de la sección.

Demostración: la ecuación de la fente es

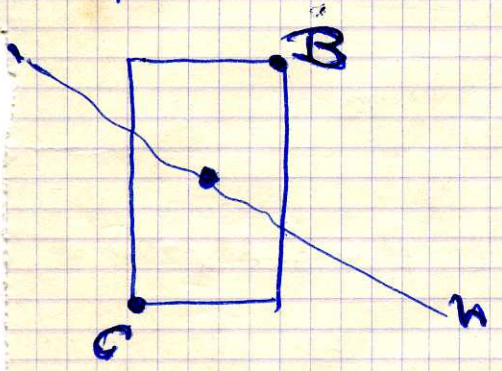
$$\frac{z z_0}{K_y^2} + \frac{y y_0}{K_z^2} = 1$$

Calculando el coeficiente angular de esta recta

veríamos que coincide con el de la línea neutra

Punto más peligroso de la sección:

Es el pto. más lejano de la línea neutra  
ptos. B y C

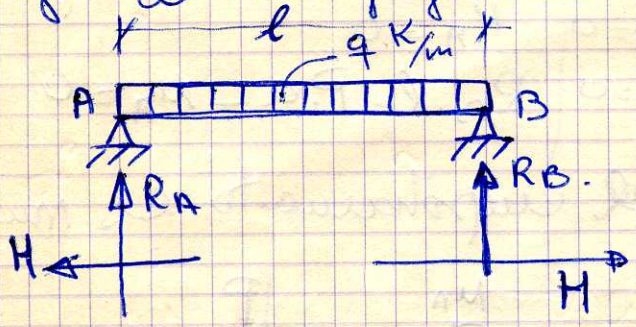


Deformación producida por el esfuerzo cortante:

VIGAS HIPERESTATICAS:

Una viga es hiperestática cuando con las ecuaciones de la estática no se pueden calcular las reacciones. Para resolverlo, primeramente plantearé las ecuaciones de la estática y después plantearé tantas ecuaciones complementarias como reacciones sobrantes.

1er caso: Calcular las reacciones en la viga de la figura



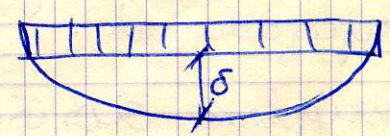
ecuaciones est = 2  
 Incógnitas = 3  
 Viga simplemente hiperestática.

$$\sum F_v = 0; R_A + R_B = q \cdot l$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Salen  $R_A = \frac{q \cdot l}{2}$        $R_B = \frac{q \cdot l}{2}$

Hay que calcular H →



Elastica → parábola  $y = ax^2 + bx$

$$\left. \begin{array}{l} x=l \rightarrow y=0 \\ x=l/2 \rightarrow y=\delta \end{array} \right\} \rightarrow \text{saca } a \text{ y } b!$$

$$y = \frac{4\delta x(l-x)}{l^2}$$

Puedo calcular la longitud de la parábola:

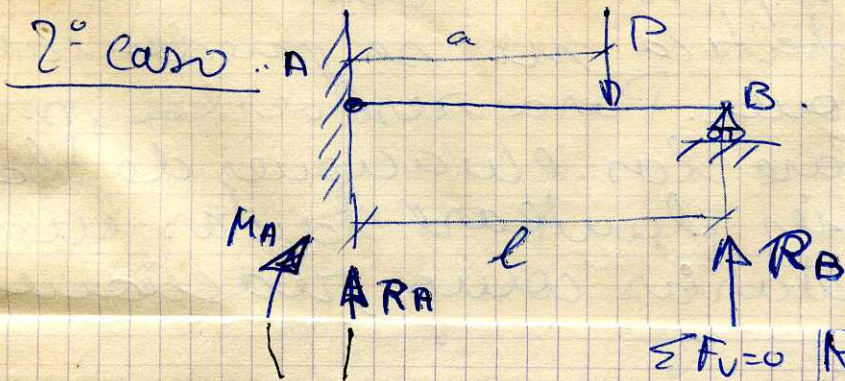
$$l' = \int ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{1 + \frac{16\delta^2}{l^2} \left(\frac{l-x}{l}\right)^2} dx$$

El alargamiento de la viga vale  $l - l'$

Puedo aplicar ley de Hooke:  $l - l' = \frac{H \cdot l}{A \cdot E}$

Operando →  $H = \frac{8}{3} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \cdot l \cdot A \cdot E$

En la mayoría de los casos  $\frac{\delta}{l}$  es muy pequeño y por tanto  $\theta$  es despreciable.

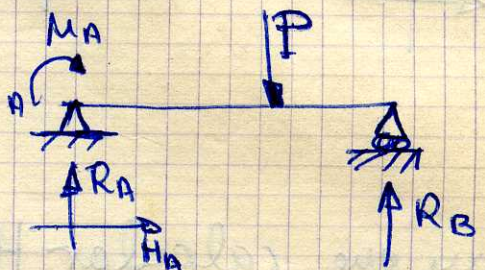


4 incógnitas } en hip  
3 ec. estáticas }

$$\begin{cases} \sum F_V = 0 & R_A + R_B = P \\ \sum F_H = 0 & H_A = 0 \\ \sum M_A = 0 & R_B \cdot l - P \cdot a - M_A = 0 \end{cases}$$

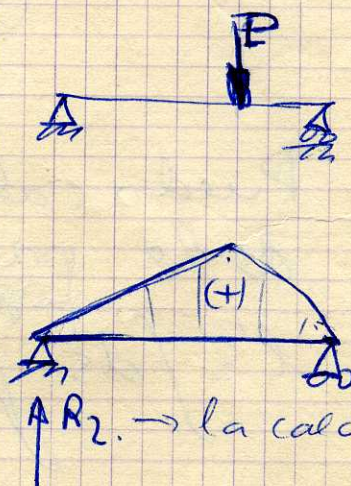
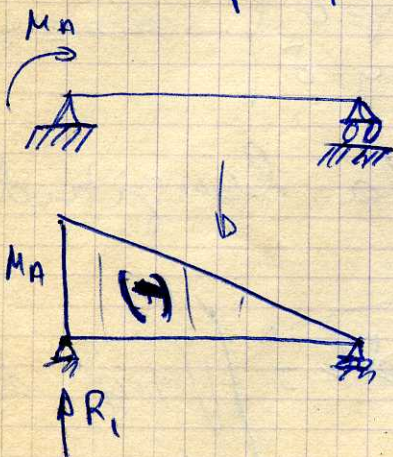
Ec. complement: el giro en el empotramiento es nulo  $\theta_A = 0$

Paso a una viga isostática:



Calculo el giro en A y hago  $\theta_A = 0$ .  
La viga conjugada etc.

Voy a emplear dos vigas conjugadas y el principio de superposición:



$R_2$  → la calculo aquí y sale  $f(P)$

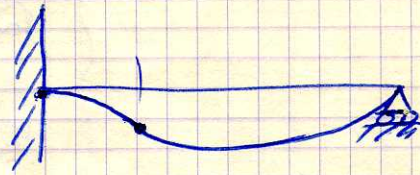
$$\theta_A = \frac{R_1 + R_2}{EI} = 0$$

$$R_1 = \frac{1}{3} M_A \cdot l$$

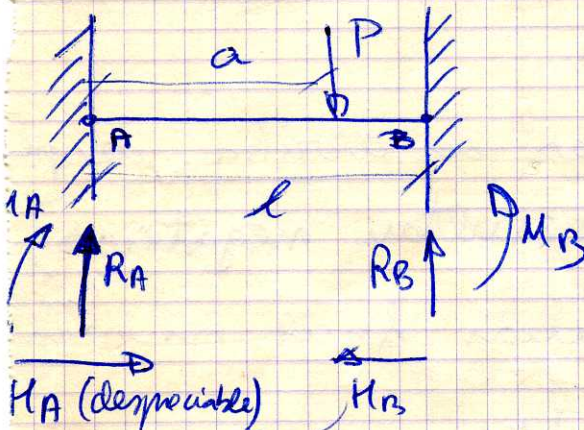
$\frac{1}{3} M_A \cdot l + R_2 = 0$  → resulta  $M_A (-)$  sentido contrario al de la figura.

Diagrama de momentos flectores de la viga. Además del método general, en este caso resulta más sencillo superponer los dos diagramas que tenemos. (65)

Deformada de la viga



3º caso:



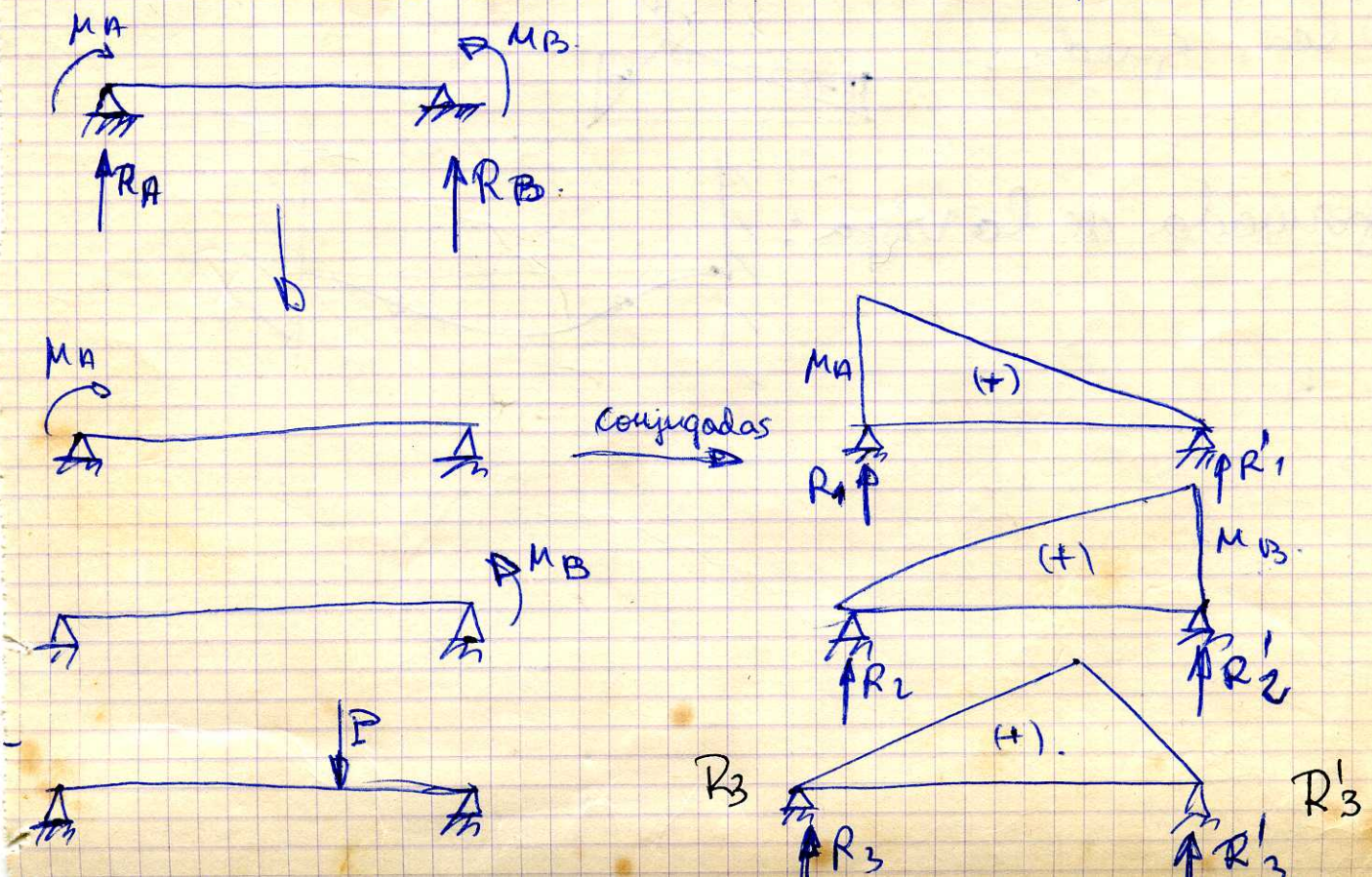
Inógnitas: 4. } doblemente  
E.c. estáticas: 2 } hiperestática.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_v = 0; R_A + R_B = P \\ \sum M_A = 0; R_B \cdot l + M_B - P \cdot a - M_A = 0 \end{aligned} \right\}$$

$H_A$  (despreciable)  $H_B$   
porque se deben a deformación.

$$\left. \begin{aligned} \theta_A = 0 \\ \theta_B = 0 \end{aligned} \right\} \text{ por estar empotrada}$$

Caso a una viga isostática ~~de un solo apoyo~~ que es equivalente



$$\theta_A = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{EI_z} = 0$$

$$\theta_B = -\frac{R'_1 + R'_2 + R'_3}{EI_z} = 0$$

$$R_1 = \frac{1}{3} M_A \cdot l$$

$$R_2 = \frac{1}{6} M_B \cdot l$$

$R_3 =$  valor numérico que se calcula tomando como respecto a la dcha.

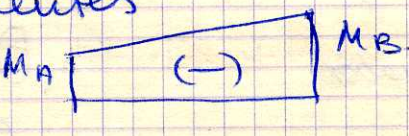
$$R'_1 = \frac{1}{6} M_A \cdot l$$

$$R'_2 = \frac{1}{3} M_B \cdot l$$

$R'_3 =$  la calculo

llevando a las dos ecuaciones de arriba, despejando las incógnitas  $M_A$  y  $M_B$  [resultan negativos]

Diagrama de momentos: es más fácil superponer los tres equivalentes

Los dos primeros  $\rightarrow$  

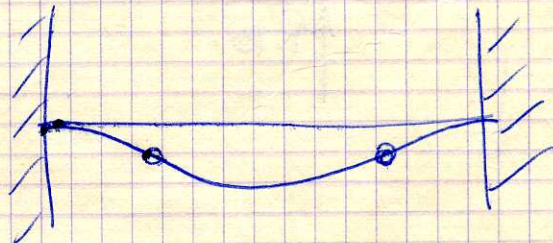
Tercero que sumarle



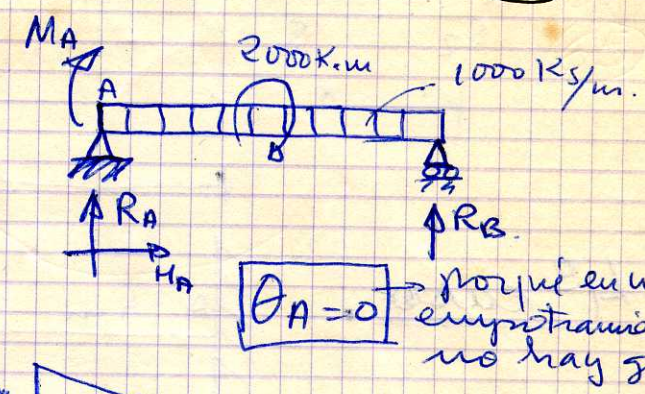
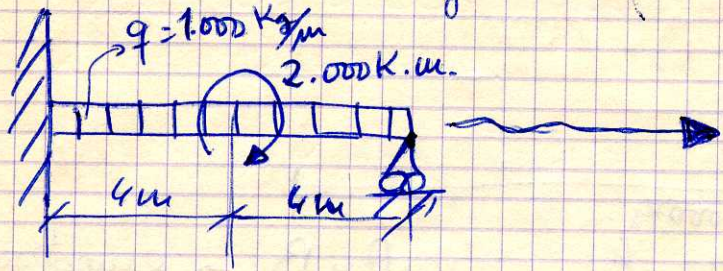
O sea, queda:



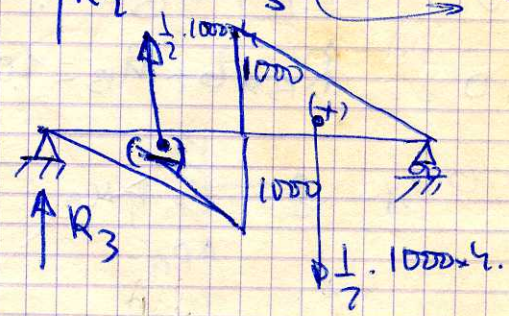
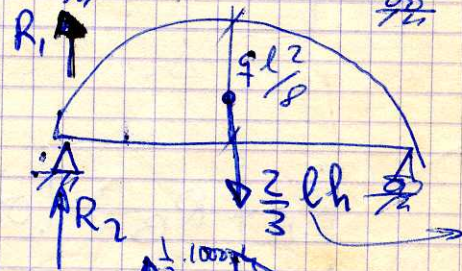
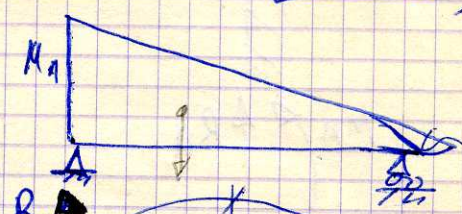
Deformada de la viga:



PROBLEMA: Calcular las reacciones en la viga de la figura y dibujar el diagrama de momentos flectores. (66)



Tres vigas equivalentes



saberlo de memoria

$$\theta_A = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{EI_2} = 0$$

$$\frac{1}{3} M_A \cdot 8 + \frac{64000}{3} - \frac{2000}{3} = 0$$

$$R_1 = \frac{1}{3} M_A \cdot l = \frac{1}{3} M_A \cdot 8$$

$$R_2 = \frac{1}{3} l h = \frac{1}{3} l \frac{q l^2}{8} = \frac{64 \cdot 000}{3}$$

$$R_3 \cdot 8 + \frac{2000}{3} \cdot \frac{16}{3} - 2000 \cdot \frac{8}{3} = 0$$

$$R_3 = -\frac{2000}{3}$$

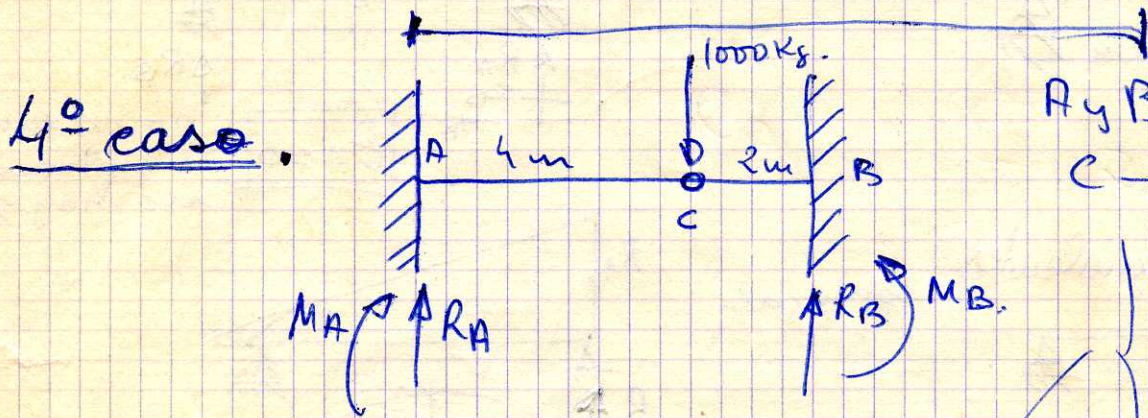
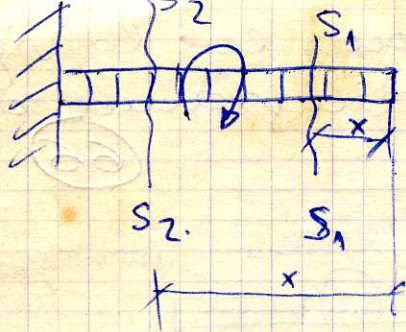
$$M_A = -\frac{62 \cdot 000}{8}$$

Las demás reacciones las calculo por las ecuaciones de la estática.

Diagrama de momentos flectores de la viga:

o por el método gen. o superponiendo los tres diagramas equivalentes. En este caso no queda más remedio que hacerlo

5 Per al

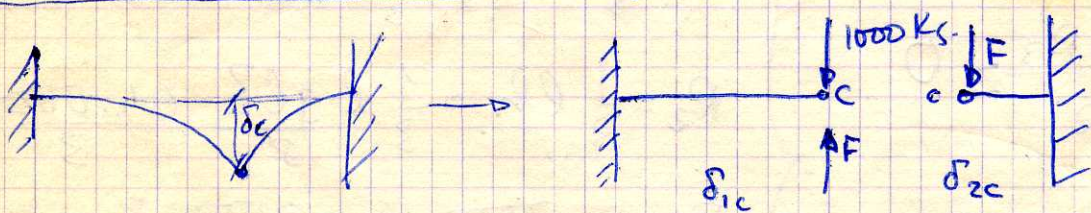


A y B → empotradas  
C → articulada

4 incógnitas  
2 ec. estáticas  
 $M_c = 0$   
simplen. hiperestática

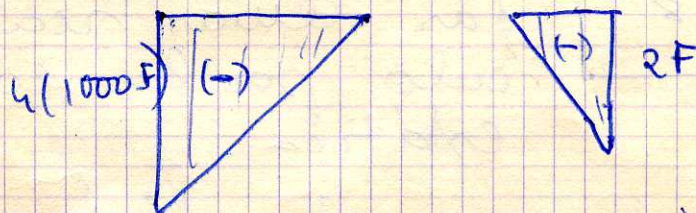
$$\left. \begin{aligned} \sum F_v = 0 & \quad R_A + R_B = 1000 \\ \sum M_A = 0 & \quad R_B \times 6 + M_B - 1000 \times 4 - M_A = 0 \\ M_c = 0 & \quad R_B \times 2 + M_B = 0 \end{aligned} \right\}$$

Ec. complementaria: la flecha en C va a ser única.



$F$  = fuerza que ejerce cada pedazo de barra sobre el otro

Calculo las flechas en los dos y las igualo:




igualando  $\delta_{1c} = \delta_{2c}$

$$\delta_{1c} = \frac{\left( \frac{1}{2} \cdot 4(1000F) \cdot 4 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4}{EI_z}$$

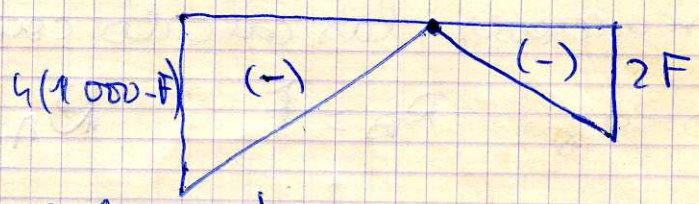
$$\delta_{2c} = \frac{\left( \frac{1}{2} \cdot 2F \cdot 2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI_z}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4(1000 - F) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot 2F \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow F = \frac{8.000}{9}$$

(67)

Diagrama de momentos: 

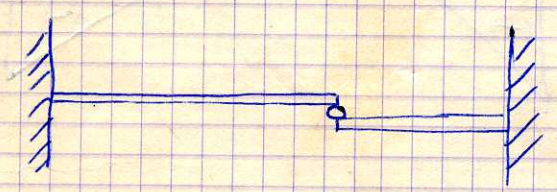
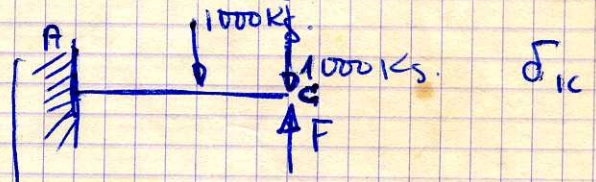
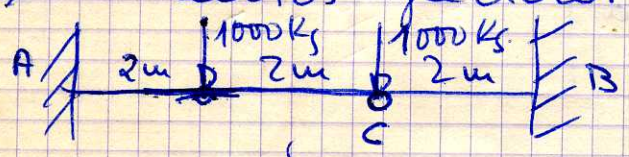
Del diagrama puede deducir los valores de  $M_A$  y  $M_B$ .



$$\left. \begin{aligned} M_A &= -4(1000 - F) \\ M_B &= -2F \end{aligned} \right\} \text{F calculado antes.}$$

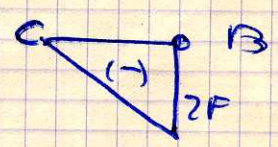
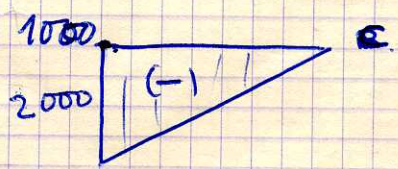
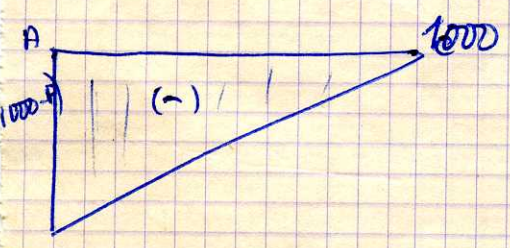
$$R_B = F$$

Calcular las reacciones y diagrama de momentos flectores de esta viga.



$$\frac{\delta_{2c}}{\delta_{1c}} = \delta_{2c}$$

Calculo las flechas por Mohr 2º



$$\delta_{1c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4(1000 - F) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 2 \cdot (2 + \frac{2}{3} \cdot 2)}{EI_z}$$

$$\delta_{2c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2F \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI_z}$$

$\delta_{1c} = \delta_{2c}$  y calculo F.

$$F = \dots \frac{1}{2} \cdot 2F \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2$$

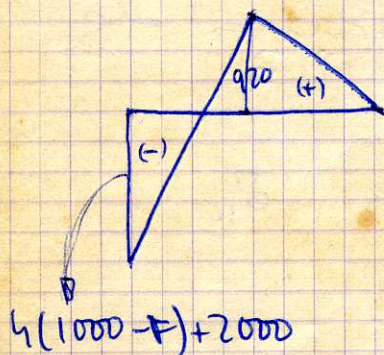
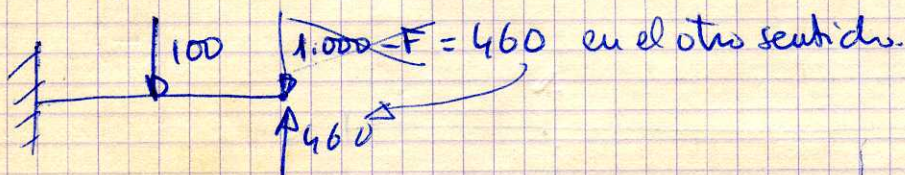
Salen  $F = 1460$  (no fiarse mucho de este dato)

$$M_B = -2F; \quad M_A = -[4(1000 - F) + 2000] \quad (\text{los obtengo de los diagramas})$$

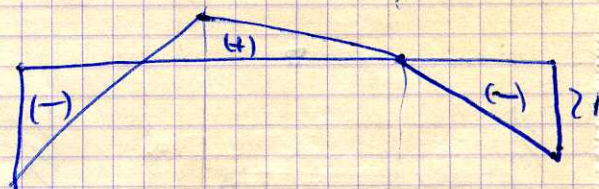
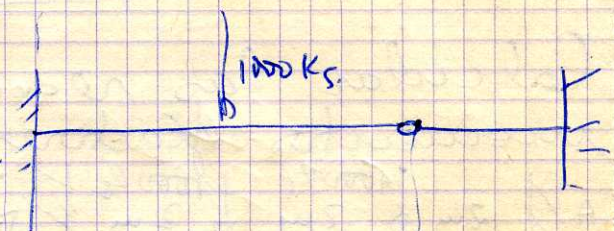
Las reacciones, las calculo con las ecuaciones de la estática

Obtengo:  $R_B = F$        $R_A + R_B = 2000$   
 $R_A = 2000 - R_B$

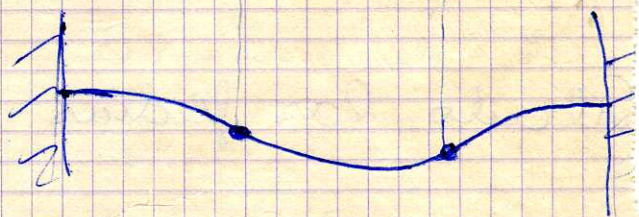
Diagrama de momentos flectores:



→ el total será

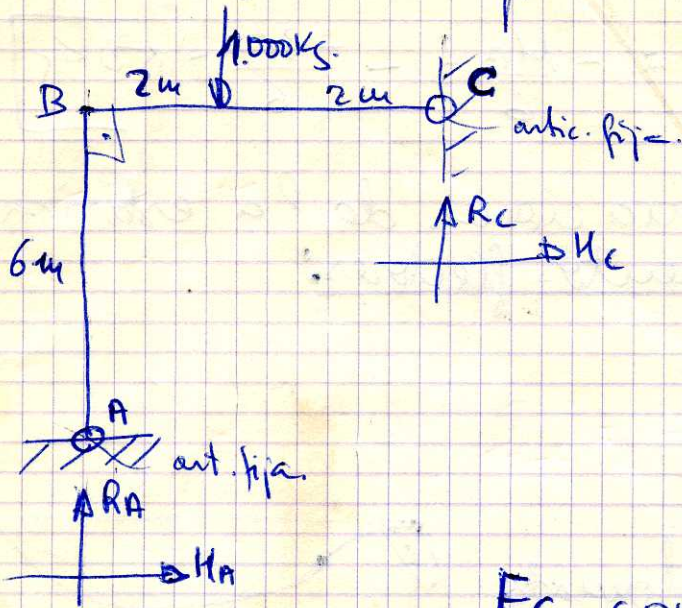


deformada:



# Resolución de pórticos hiperestáticos:

Vamos a resolver primero dos semipórticos: (68)



Calcular reacciones y diagramas de momentos.

4 incógnitas 3 ecuaciones simplemente hiperestático

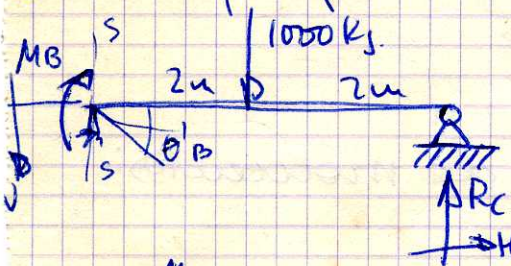
$$\sum F_v = 0 \quad R_A + R_c = 1000$$

$$\sum F_H = 0 \quad H_A + H_c = 0$$

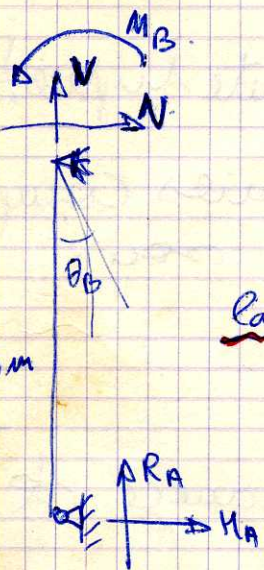
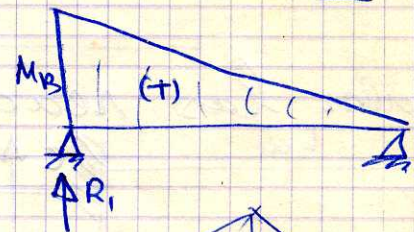
$$\sum M_A = 0 \quad R_c \cdot 4 - H_c \cdot 6 - 1000 \cdot 2 = 0$$

Fc. complementaria  $\rightarrow$  el ángulo en B se conserva, por ser nudo rígido. O sea, el ángulo girado por la barra vertical en B = ángulo girado por la barra horizontal en B, para que se conserve el  $\square$

Descompongo la estructura en dos barras.



Las vigas conjugadas:

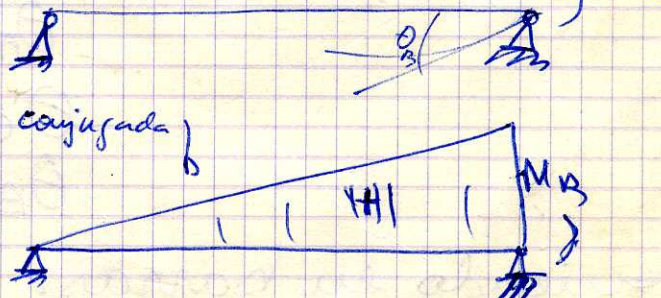


$$\theta'_B = \frac{R_1 + R_2}{EI_2}$$

$$\text{con } R_1 = \frac{1}{3} M_B \cdot 4$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1000 : 2$$

La tumba



$$\theta_B = -\frac{R'}{EI_2}$$

Mezclo  $\theta'_B = \theta_B$  y obtengo  $M_B = -300$

$$\theta_B = -\frac{\frac{1}{3} M_B \cdot 6}{EI_2}$$

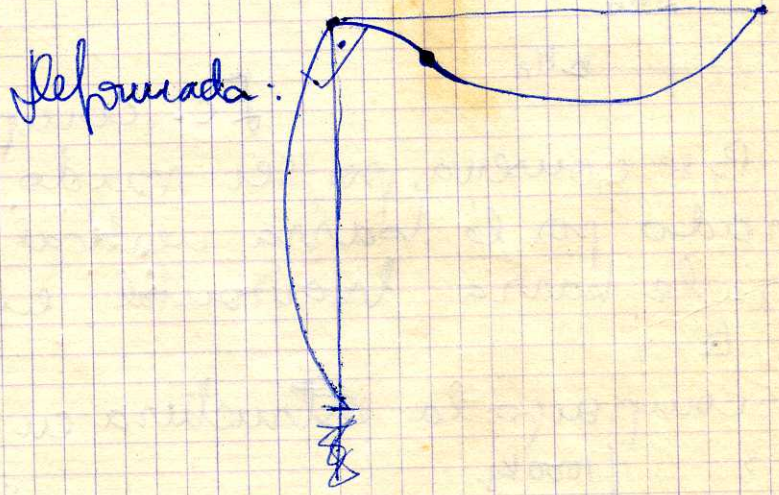
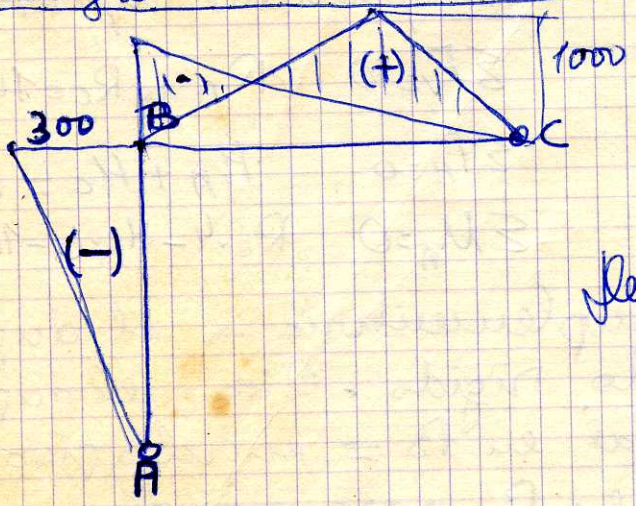
AHORRA COJO UNA CUALQUIERA DE LAS VIGAS, TOMO

MOMENTOS RESPECTO A B y OBTENED REACCIONES

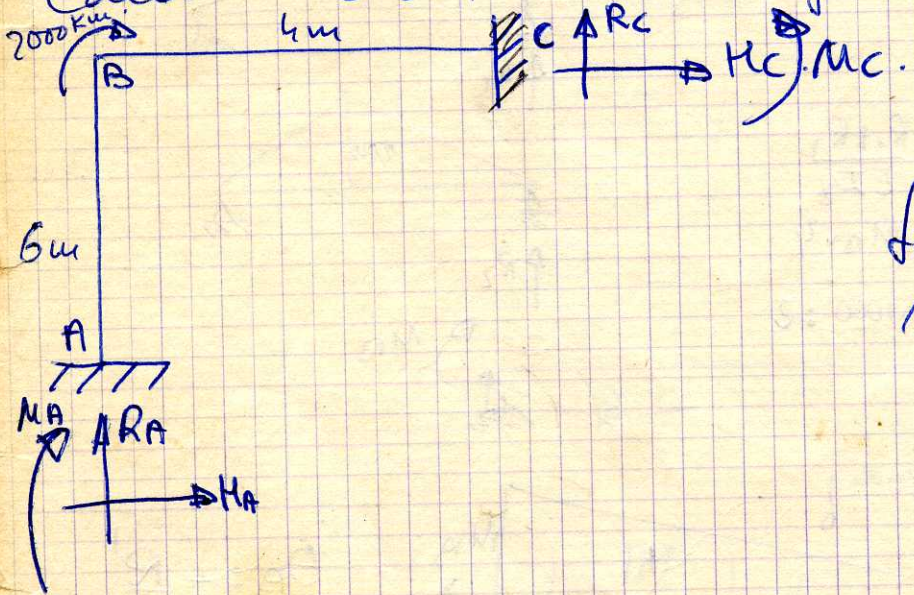
Por ejemplo, viga vertical:

$$H_A \cdot 6 + M_B = 0 ; H_A = -\frac{M_B}{6} = -\frac{-300}{6} = 50 \text{ Kf}$$

Las demás por las ecuaciones de la estática.  
Diagrama de momentos flectores:



Calcular las reacciones y diag. de momentos:



Triplemente hiperestático  
 las ecuaciones complementarias son:

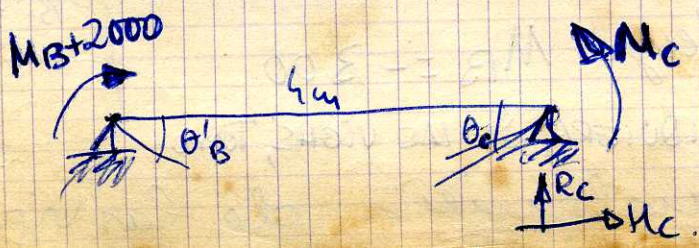
$$\theta_A = 0$$

$$\theta_C = 0$$

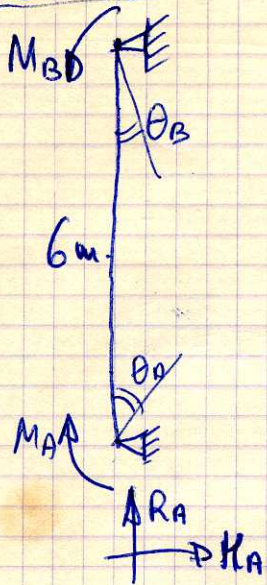
$$\theta_B \rightarrow \text{permanece de}$$

descomponiendo en barras:

Barra horizontal:



Barra vertical:



$$\theta_A = \frac{\frac{1}{3} M_A \cdot 6 + \frac{1}{6} M_B \cdot 6}{E I_z} \quad (69)$$

$$\theta_B = - \frac{\frac{1}{6} M_A \cdot 6 + \frac{1}{3} M_B \cdot 6}{E I_z}$$

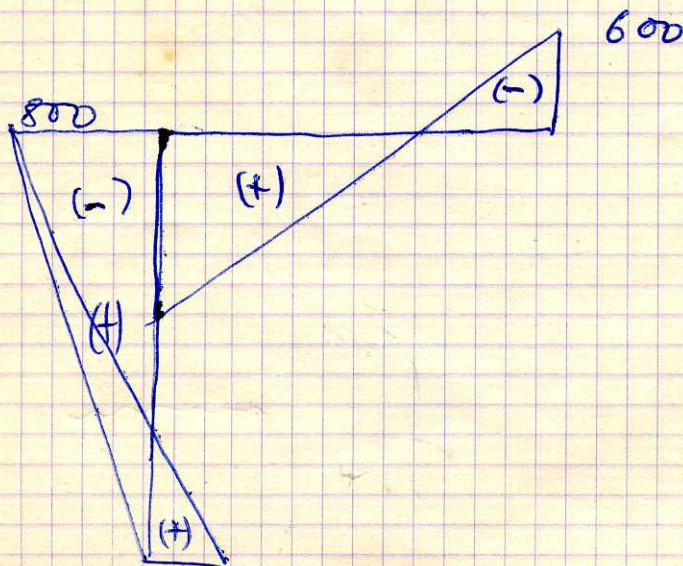
$$\theta'_B = \frac{\frac{1}{3} (M_B + 2000) \cdot 4 + \frac{1}{6} M_C \cdot 4}{E I_z}$$

$$\theta_C = - \frac{[\frac{1}{6} (M_B + 2000) \cdot 4 + \frac{1}{3} M_C \cdot 4]}{E I_z}$$

Resultado  $M_B = -800$      $M_A = 400$      $M_C = -600$ .

Calculo  $H_A$  tomando momentos en su barra y las otras por las ecuaciones de la estática.

Diagrama de momentos:



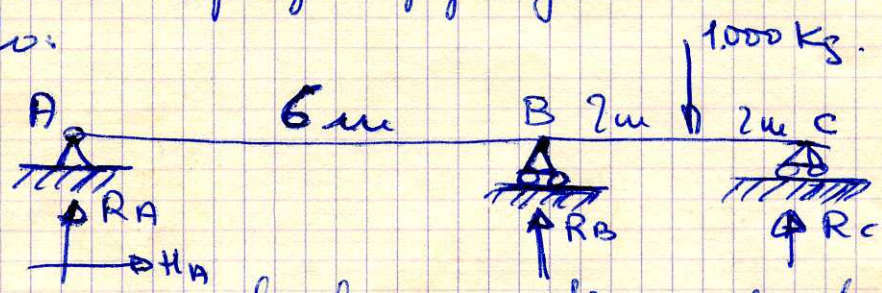
(Mirando las barras desde dentro).

Si el pórtico es traslacional se resuelve

por CASTIGLIANO.

(70)

RESOLUCIÓN DE VIGAS CONTINUAS → a aquellas que tienen un apoyo fijo y los demás móviles, por ejemplo:



La viga no pierde la continuidad en los apoyos intermedios.

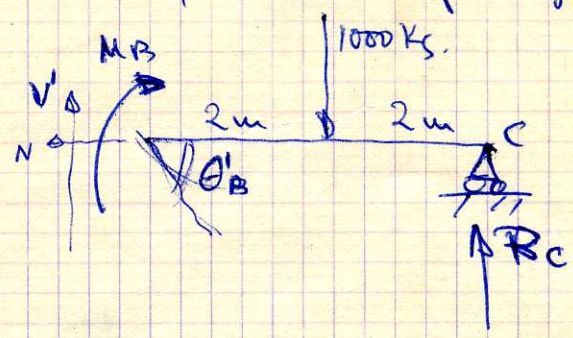
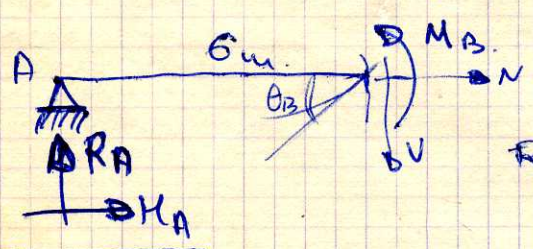
4 incógnitas, 3 ecuaciones estát. → simplemente hiperestática  
 En total, el grado de hiperestaticidad = n° de apoyos intermedios

$$\sum F_v = 0 \quad R_A + R_B + R_C - 1.000 = 0$$

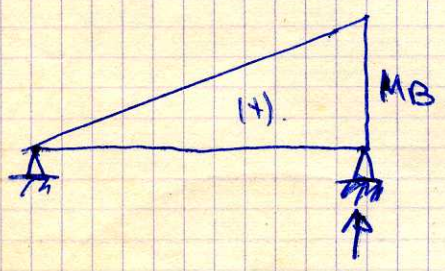
$$\sum F_H = 0 \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_C \cdot 10 - 1000 \cdot 8 + R_B \cdot 6 = 0$$

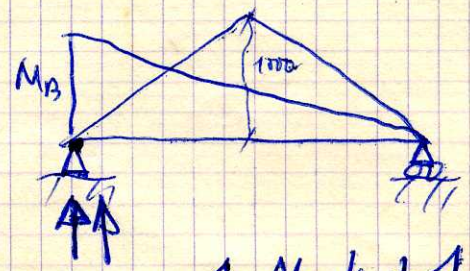
Ecuación complementaria: la de deformación  
 El ángulo girado en B es único  
 Para plantear la ecuación, descompongo la viga en dos tramos:



$$\theta_B = \theta'_B$$



$$\theta_B = - \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 6}{EI_z}$$



$$\theta'_B = \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 4 + 1.000}{EI_z}$$

(2viga comp)

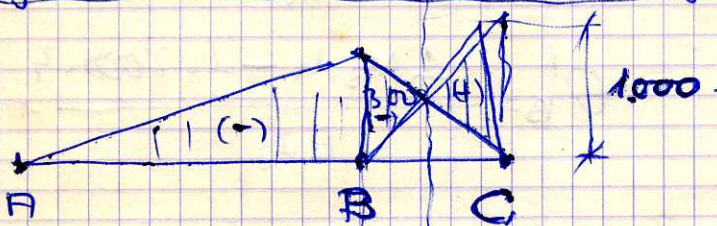
Sea:  $-\frac{1}{3} M_B \times 6 = \frac{1}{3} M_B \cdot 4 + 1000 \rightarrow$  sale  $M_B = -300 \text{ K.m}$  (71)

Lejo uno de los dos tramos y calculo las reacciones, p.ejemplo el AB, tomando como momento respecto a B:

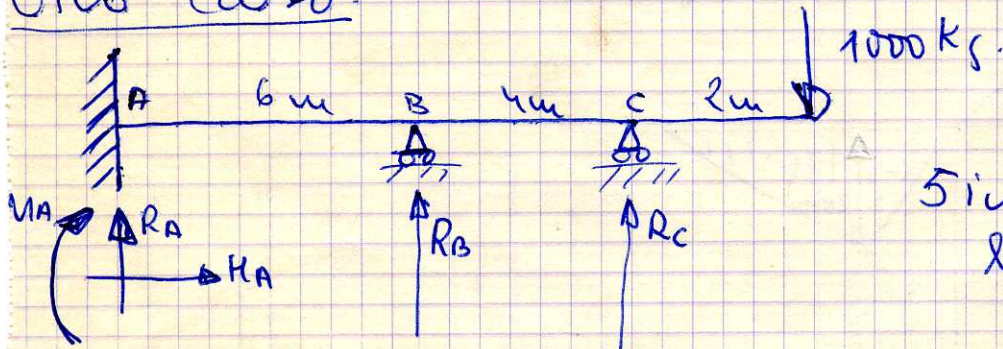
$$R_A \cdot 6 - M_B = 0; \quad R_A = \frac{M_B}{6} = -\frac{300}{6} = -50 \text{ Kf.}$$

Las demas, por las ecuaciones de la estatica.

Diagrama de momentos flectores:



Otro caso:



5 incógnitas  $\rightarrow$  doblemente hiperestática.

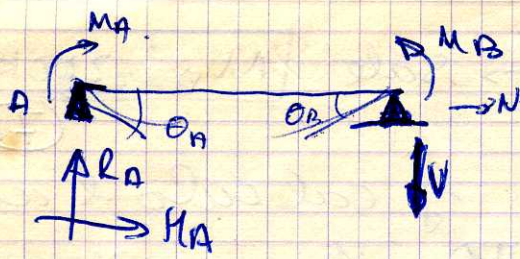
$$\sum F_V = 0 \quad R_A + R_B + R_C = 1000$$

$$\sum F_H = 0 \quad H_A = 0$$

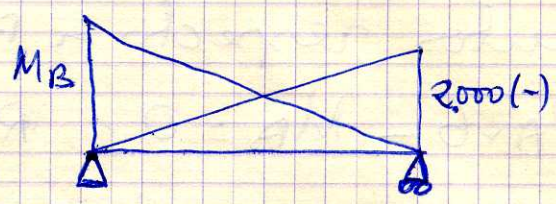
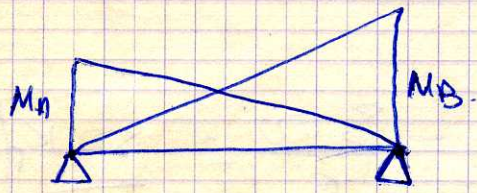
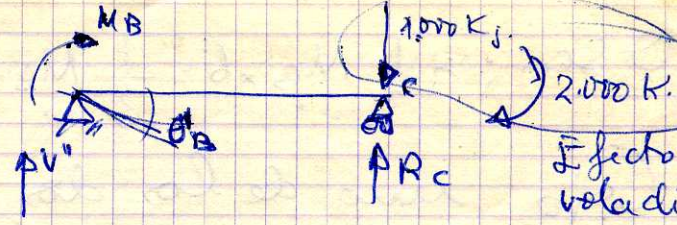
$$\sum M_A = 0 \quad R_C \cdot 10 - 1000 \cdot 12 + R_B \cdot 6 - M_A = 0$$

$$\theta_A = 0 \quad \theta_B = \theta'_B$$

Descompongo en tramos para calcular los ángulos.



$$V + V' = R_B$$



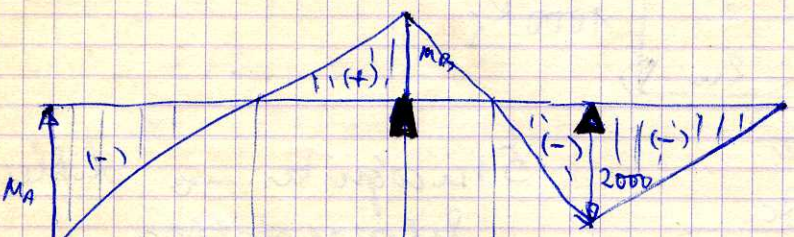
$$\theta_A = \frac{\frac{1}{3} M_A \cdot 6 + \frac{1}{6} M_B \cdot 6}{EI_2} = 0$$

$$\theta_B = - \frac{\frac{1}{6} M_A \cdot 6 + \frac{1}{3} M_B \cdot 6}{EI_2}$$

$$\theta'_B = \frac{\frac{1}{3} M_B \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 2000 \cdot 4}{EI_2}$$

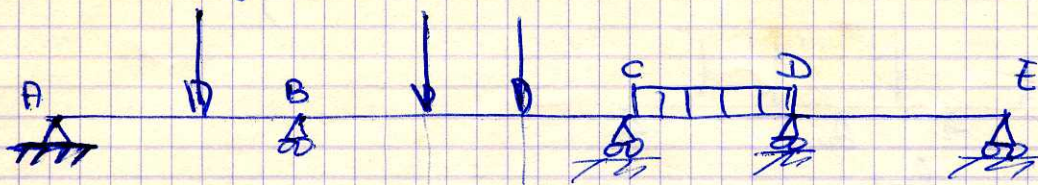
Calculo  $M_A$  y  $M_B$  y cogiendo uno de las dos mitades de la viga, tomando momentos respecto a un extremo. Pas demás, con las ecuaciones de la estática. Sale  $M_A (-)$  y  $M_B (+)$

Diagrama de momentos flectores

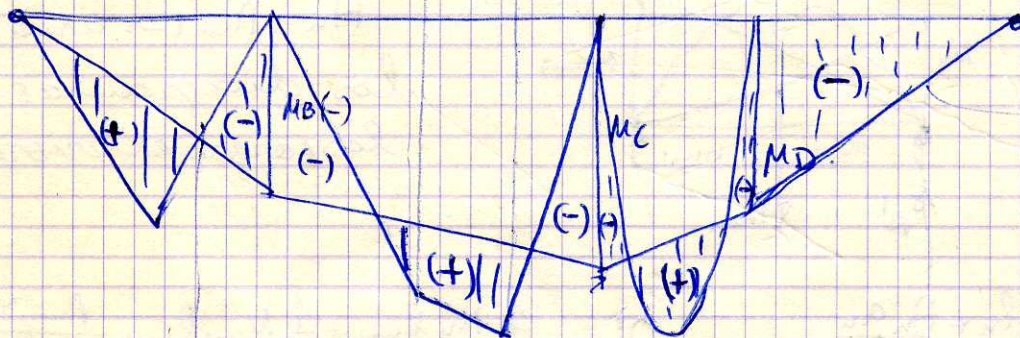


deformada

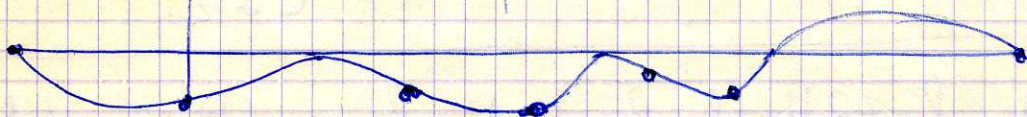
Problema: dibujar diagramas de momentos flectores y diagrama de deformación de la viga. (72)



Calculando  $M_B$ ,  $M_C$  y  $M_D$  Resultan negativos.



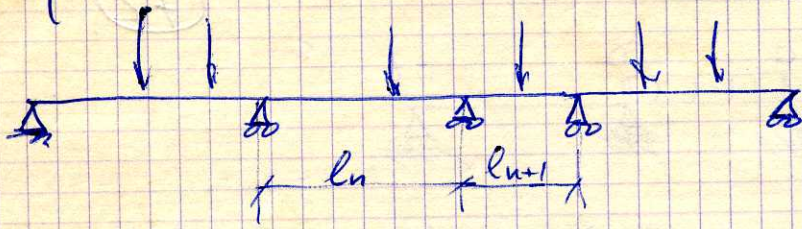
línea poligonal de cierre.



Deformada.

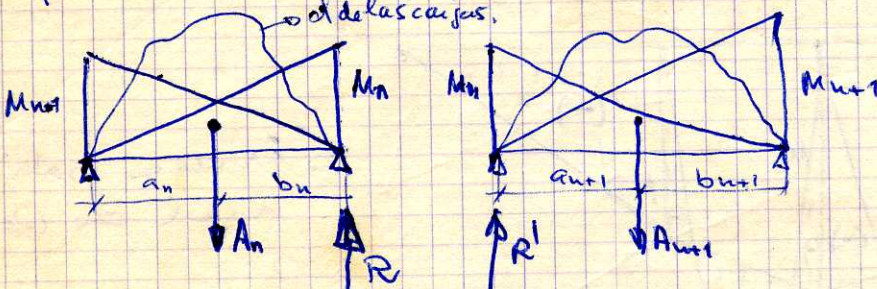
Si en los pto. donde el momento es nulo, lo pongamos unas articulaciones a la viga, no cambia nada. Solamente se convierte en isostática (se llama viga GERBER).

# Ecuación de Clapeyron para vigas continuas: (ecuación de los tres momentos).



$$\theta_n = \theta'_{n+1}$$

$A_n$  y  $A_{n+1}$  → áreas de los diagramas de las cargas exteriores



$$\theta_n = - \frac{\frac{1}{6} M_{n-1} l_n + \frac{1}{3} M_n l_n + \frac{A_n a_n}{l_n}}{EI_z}$$

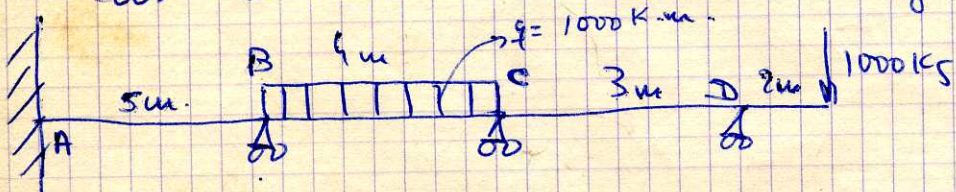
$$\theta'_{n+1} = \frac{\frac{1}{3} M_n l_{n+1} + \frac{1}{6} M_{n+1} l_{n+1} + \frac{A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}}{EI_z}$$

Igualandos:

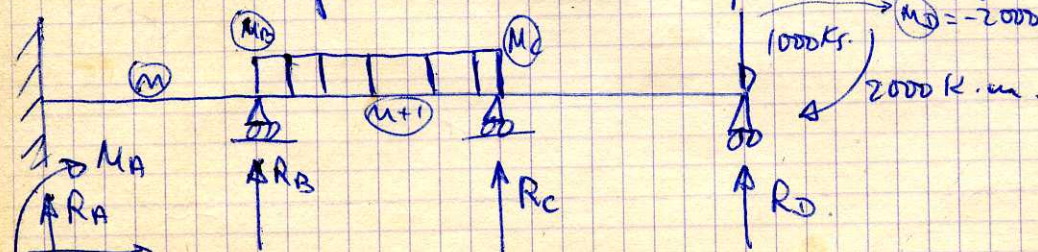
$$M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = - \frac{6 A_n a_n}{l_n} - \frac{6 A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

Es la ecuación de Clapeyron. Se puede aplicar tantas veces como apoyos intermedios tenga la viga.

Ejemplo: Calcular, usando ecuación de Clapeyron las reacciones de la viga de la figura.



Sustituyo el voladizo por su efecto:



giros en A = 0

3<sup>a</sup> equ. sera

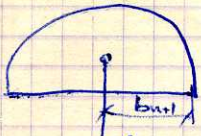
Triplemente hiperestática

Puedo plantear de Clapeyron (dos) por intermedios

$$M_A \cdot 5 + 2 M_B (5+4) + M_C \cdot 4 = -6 \frac{A_{ud} \cdot a_u}{5} - 6 \frac{A_{ud} \cdot b_{u+1}}{4}$$

porque en el diagrama no hay carga ni mom. ext. aplicados.

(73)



$$A_{ud} = \frac{2}{3} l h = \frac{2}{3} l \left( \frac{q l^2}{8} \right)$$

$$b_{u+1} = 2$$

Ahora le aplico al otro apoyo (BC  $\rightarrow$  lu ; CD  $\rightarrow$  l\_{u+1}).

$$M_B \cdot 4 + 2 M_C (4+3) - 2000 \cdot 3 = -6 \frac{A_{ud} \cdot a_u}{4} - 6 \frac{A_{ud} \cdot b_{u+1}}{3}$$

3 (uso de diag. de momentos)

Giro en A = cero:



conjugado



$$\theta_A = \frac{\frac{1}{3} M_A \times 5 + \frac{1}{6} M_B \times 5}{EI_z} = 0$$

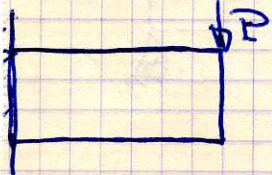
Tres ecuaciones con tres incógnitas  $M_A$ ,  $M_B$  y  $M_C$ .  
 Llevo  $M_A$  y  $M_B$  al trazo AB  $\rightarrow$  tanto momentos y obtengo

$$M_A + R_A \cdot 5 - M_B = 0$$

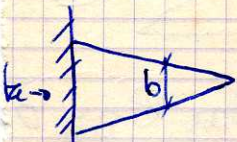
Idem. en el trazo derecho  $\rightarrow R_D \cdot 3 - 1000 \cdot 3 - 2000 - M_C = 0$

## LECCIÓN 7.

Teoremas de Mohr para vigas de sección variable



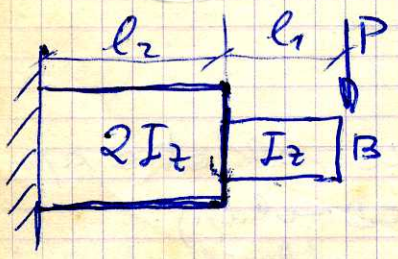
$$\theta_B = \int_0^l$$



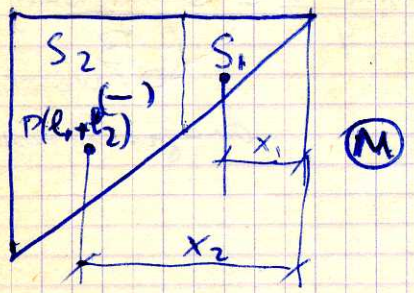
Flecha de B

$$\delta_B = \int_0^x \frac{(Mdx) \cdot x}{EI_z}$$

$M$  y  $I_z$  de los dos por los en función



$$\theta_B = \frac{S_1}{EI_z} + \frac{S_2}{E2I_z}$$

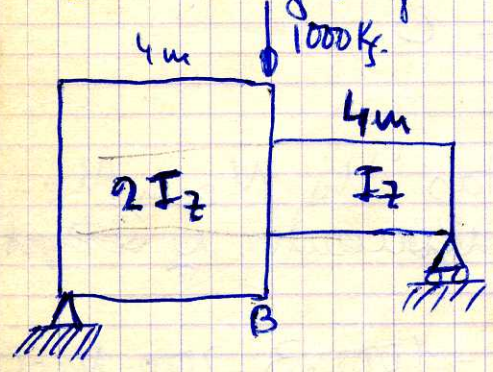


$$\delta_B = \frac{S_1 x_1}{EI_z} + \frac{S_2 x_2}{E2I_z}$$

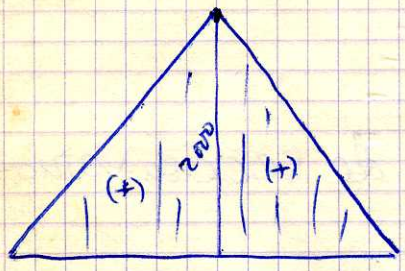
Si la viga fuese apoyada en vez de empotrada

Flecha y giro en B:

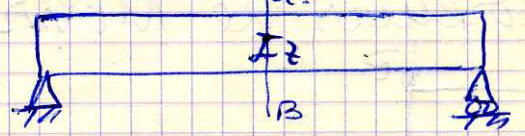
Como el  $I_z$  es variable, hay que tomar una viga conjugada especial



Esta viga tiene la misma forma que esta otra si no que está cargada con su.



(M)



(M)

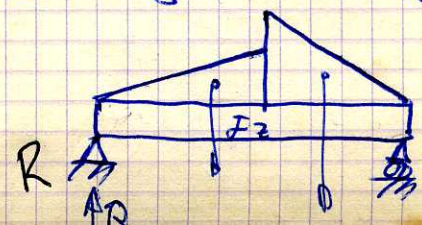
Cargas tales que den este diagrama de momentos

Demostración: la curvatura en una sección es  $\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$

Para que permanezca cte, si disminuimos  $M$  tendríamos que disminuir  $I_z$  en la misma proporción.

En vez de calcular  $\theta_B$  y  $\delta_B$  en la otra, lo calculamos en ésta.

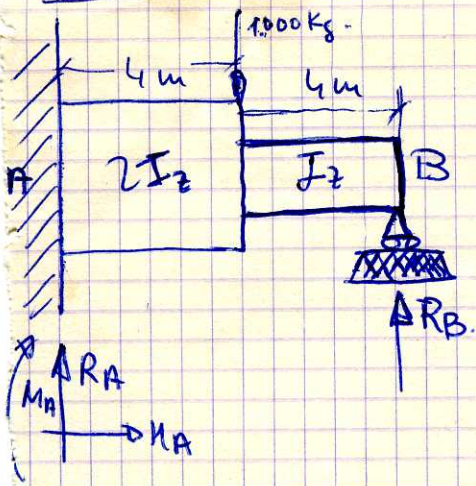
La viga conjugada:



$\delta_B =$   
etc.

$$\theta_B = \frac{Vl}{EI}$$

# Resolución de vigas hiperestáticas de sec. variable

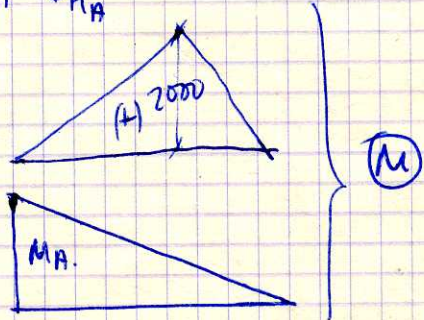
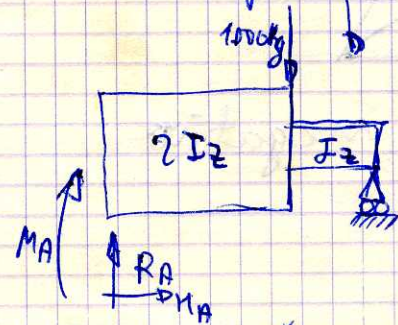


4 incógnitas 3 ecuac.  $\rightarrow$  simp. hiperestática

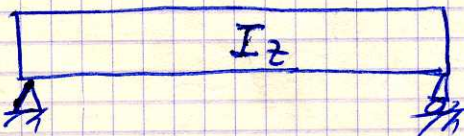
(74)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_V = 0 & \quad R_A + R_B = 1000 \\ \sum F_H = 0 & \quad H_A = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad R_B \cdot 8 - 1000 \cdot 4 - M_A = 0 \end{aligned} \right\}$$

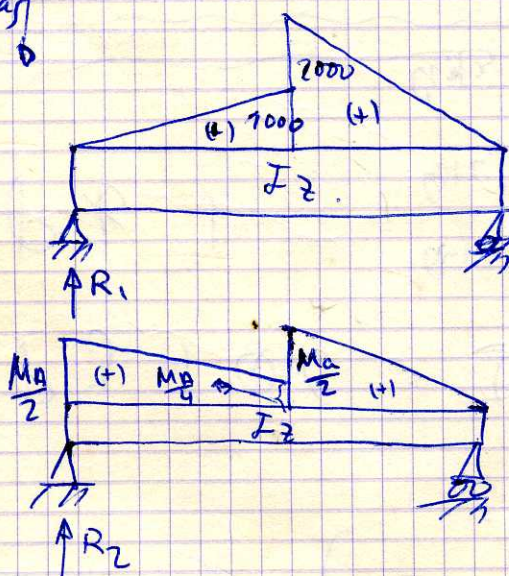
Ec. complementaria  $\theta_A = 0$



Tomamos una viga auxiliar de  $I_z$  de:



conjugadas

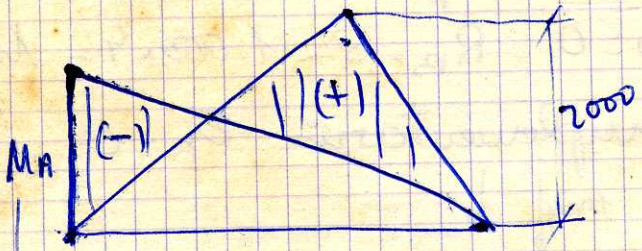
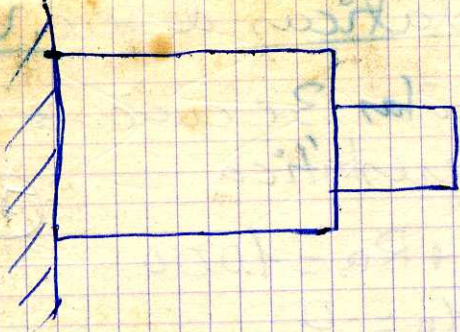


función de  $M_A$ .  
 valor numérico.

$$\theta_A = \frac{R_1 + R_2}{EI_z} = 0$$

Calculo  $M_A$  y las demás por las ecuaciones de la estática. Resulta  $M_A$  negativo.

El diagrama de momentos flectores de la viga primitiva será  $\rightarrow$



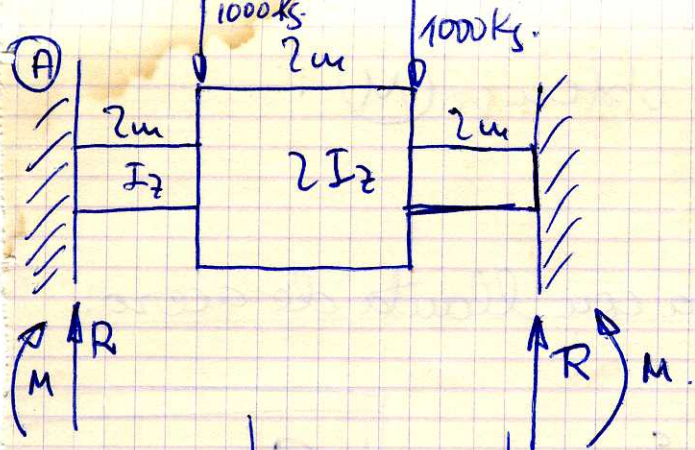
porque  $M_A$  sale negativo

$a_{12}$

$$PK + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$PJ + QI = I \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

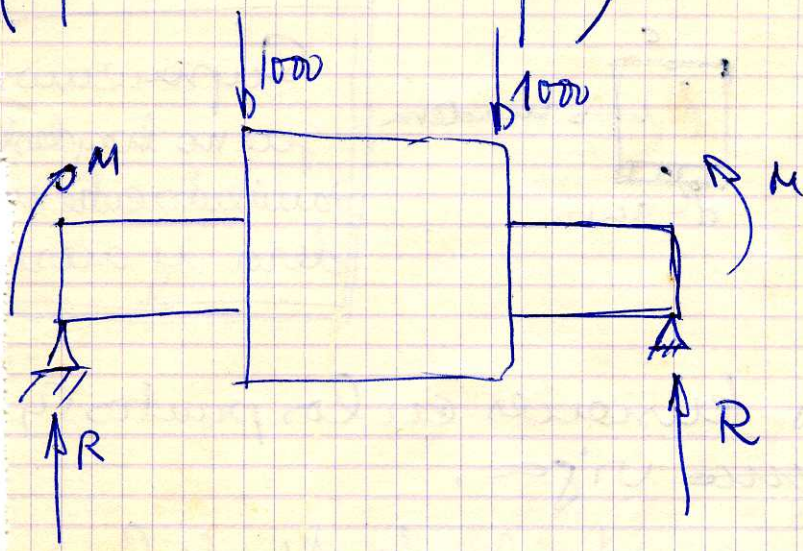
$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ N \end{pmatrix}$$



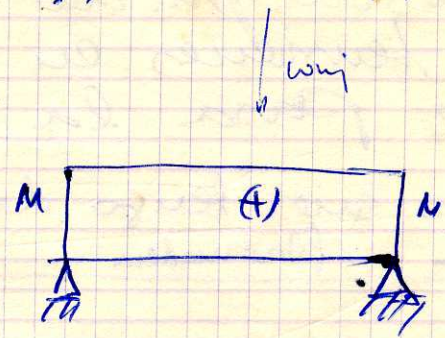
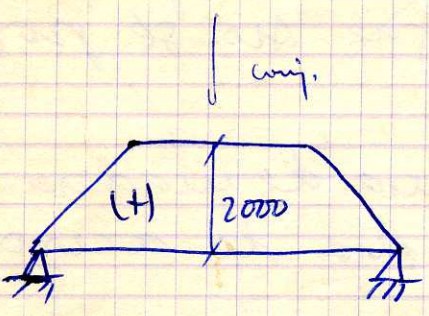
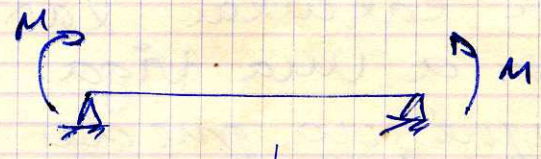
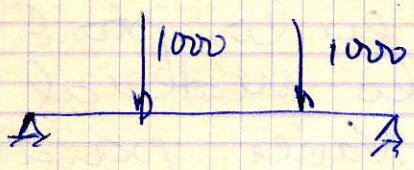
$2R = 2000; R = 1000.$

¿M? Incalculable.

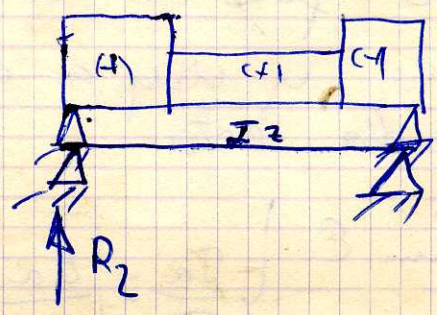
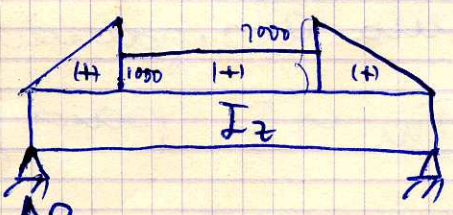
Complementaria  $\theta_A = 0$



Se descomponga en dos partes las conjugadas



Los totales serán:

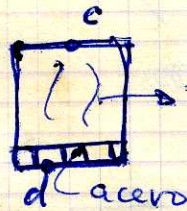
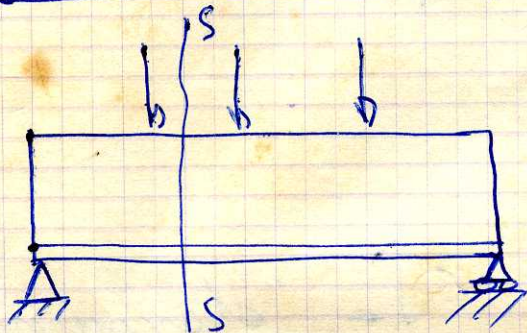


He reducido el  $I_z$  a la mitad en el centro. Por tanto reducido también el diagrama

valor de  $\theta_A = \frac{R_1 + R_2}{EI_2} = 0$ .  $\rightarrow$  obtengo  $(M)$ .

función de M

## Viga de madera reforzada con llanta de acero:



Suponemos que no haydes  
frotamiento entre  
madera y acero

Voy a calcular las tensiones en los puntos C de la sección S de la figura viga.

Calculo primero el momento flector  $M$  de la sección, por el método de siempre.

Para calcular las tensiones en los pts C paso a una viga de un solo material (porque no puedo aplicar Navier para calcular tensiones en C y d, ya que no sé por donde pasa la l.n.).

Suponigo que tengo dos fibras, una de madera  $\sigma_m$  fibra madera  $\sigma_m$  otra de acero

$\sigma_a$  fibra acero  $\sigma_a$

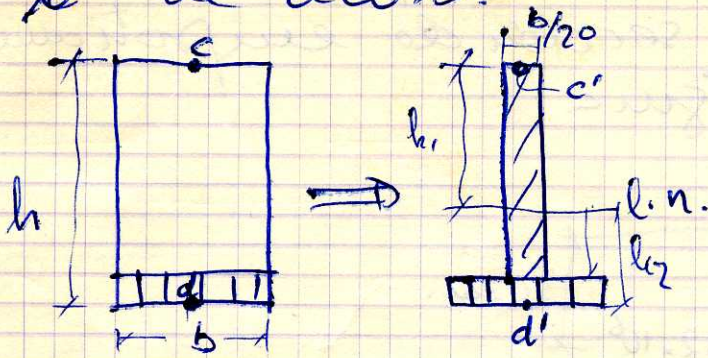
Suponigo que tienen el mismo alargamiento unitario, y voy a calcular  $\sigma_m$  y  $\sigma_a$  para que se cumpla esto.

$$\begin{cases} \sigma_m = E_m \cdot \epsilon \\ \sigma_a = E_a \cdot \epsilon \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{E_a}{E_m} = 20 \end{array} \right.$$

La  $\sigma_a$  es 20 veces mayor que  $\sigma_m$ , si las dos fibras tienen el mismo alargamiento unitario.

Voy a pasar de esta viga a una exclusivamente de acero.

(76)



Le pongo una anchura 20 veces menor, porque el acero resiste una tensión 20 veces superior a la madera.

Ahora si conozco la línea neutra

$$\sigma_{c'} = \frac{M(-h_1)}{I_z \text{ de la simple T}}$$

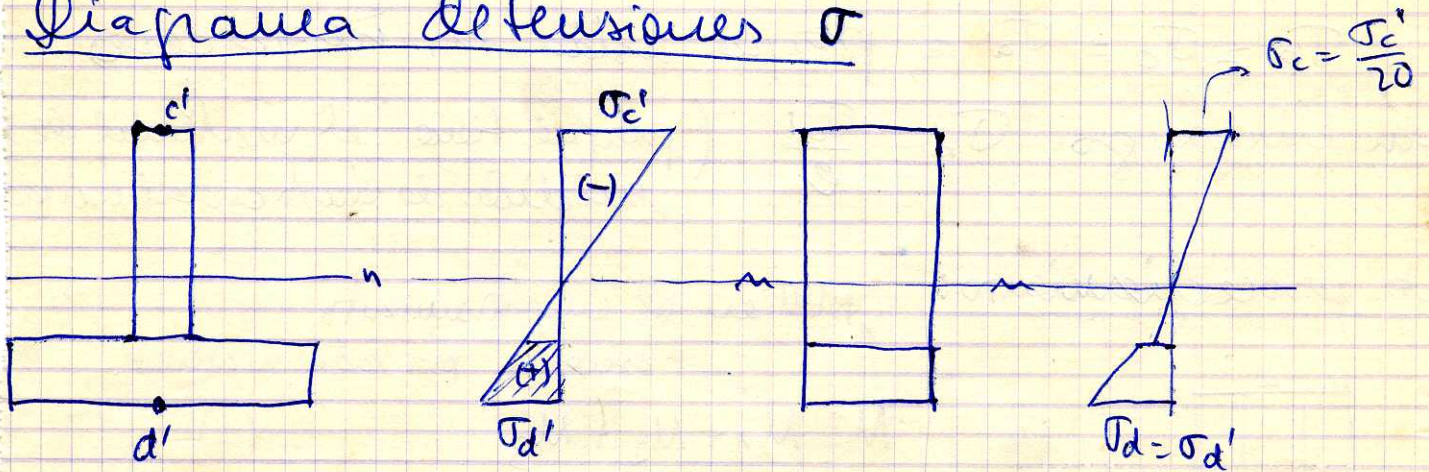
$$\sigma_{d'} = \frac{M h_2}{I_z \text{ de la simple T.}}$$

Fu los pts c y d

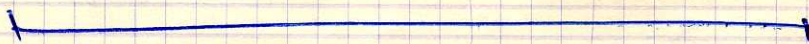
$$\sigma_d = \sigma_{d'} \quad (\text{porque tanto } d \text{ como } d' \text{ están en el acero)}$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{c'}}{20} \quad (\text{porque } c \text{ está en madera y aguantará una tensión 20 veces menor).}$$

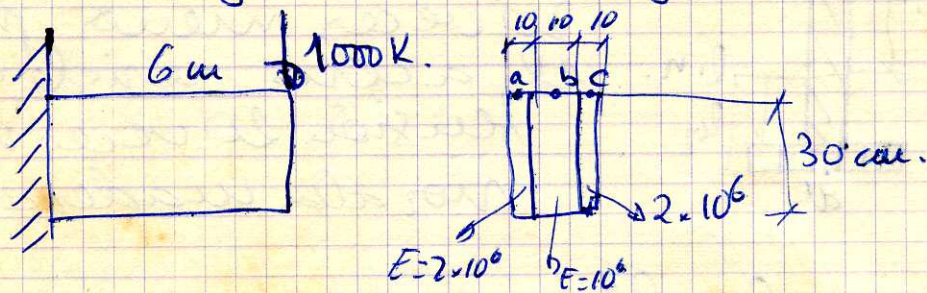
Diagrama de tensiones  $\sigma$



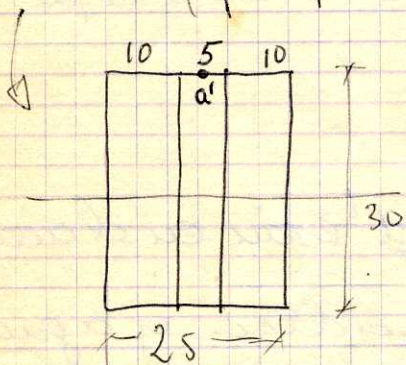
O sea, las ordenadas de la zona rayada pueden ser igual, y las demás, divididas por 20.



- Calcular las ~~secc~~ tensiones que actúan en los puntos A B C de la sección de empotramiento de la viga de la figura:



Tengo que pasar ~~de~~ una viga que sea de un solo material. (p.ej. el de  $E = 2 \times 10^6$ )



Momento en el empotramiento

$$M = -6.000 \text{ K} \cdot \text{m} = -6.000 \cdot 10^2 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

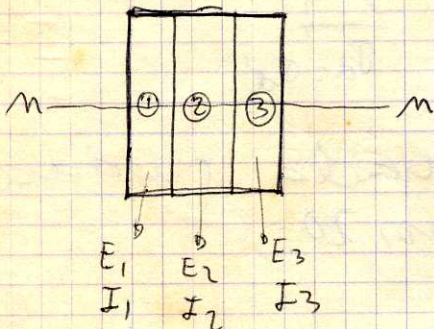
$$\sigma_{a'} = \frac{(-6.000 \cdot 10^2)(-15)}{\frac{1}{12} 25 \cdot 30^3}$$

$\sigma_a = \sigma_c = \sigma_{a'}$  = porque están los tres a cero.

Sin embargo  $\sigma_b = \frac{\sigma_{a'}}{2}$  (porque tiene el material de  $E$  el doble de elasticidad unitaria)

Otro procedimiento:

total en el empotramiento  
absorbido por cada material.



$$M = M_1 + M_2 + M_3 \quad (1)$$

En cualquier sección, las tres vigas tienen la misma curvatura:

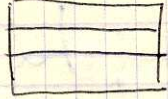
$$\frac{1}{r} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M_3}{E_3 I_3} \quad (2)$$

De (1) y (2) saco  $M_1, M_2, M_3$ .

Ahora opero con cada viga como si fuera independiente

$$\sigma_a = \frac{M_1 (-h/2)}{I_1} ; \sigma_b = \frac{M_2 (-h/2)}{I_2} ; \sigma_c = \frac{M_3 (-h/2)}{I_3}$$

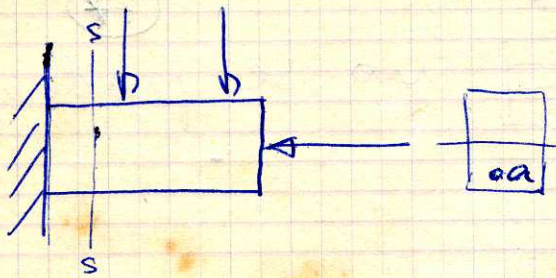
(77)

Si las vigas fuera así  no se puede apli-

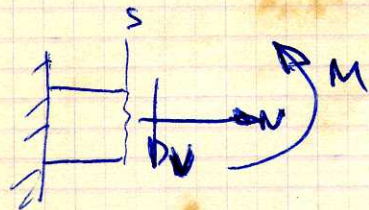
car este segundo método.

# LECCION VIII.

## FLEXION CON TRACCION Y COMPRESION



La viga trabaja a flexión compuesta, porque existen  $N, V, M$  en cualquier sección.



Voy a calcular las tensiones en el punto a de la sección s.

$$M \rightarrow \sigma_M = \frac{My}{I_z} \quad (\text{Navier})$$

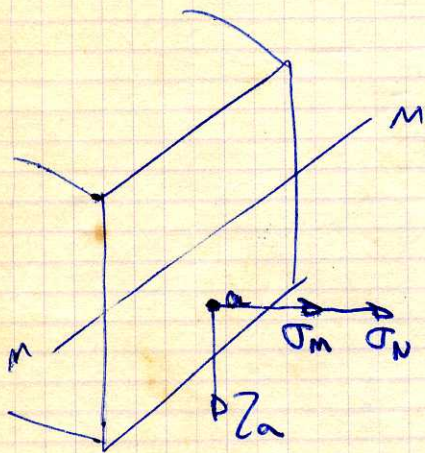
$$N \rightarrow \sigma_N = \frac{N}{A_{res}}$$

supongo reparto uniforme de las normales.

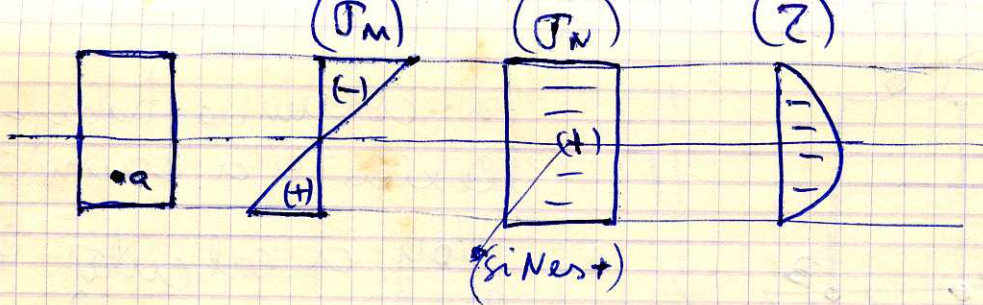
$$V \rightarrow \tau = \frac{VM_e}{bI_z}$$

En resumen, el pto a tendrá:

$$a \left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_M + \sigma_N = \frac{My}{I_z} + \frac{N}{A_{res}} \\ \tau_a &= \frac{VM_e}{bI_z} \end{aligned} \right.$$



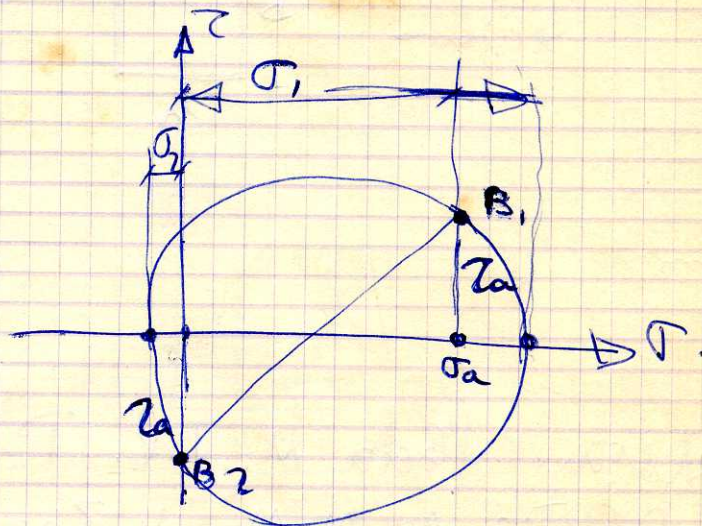
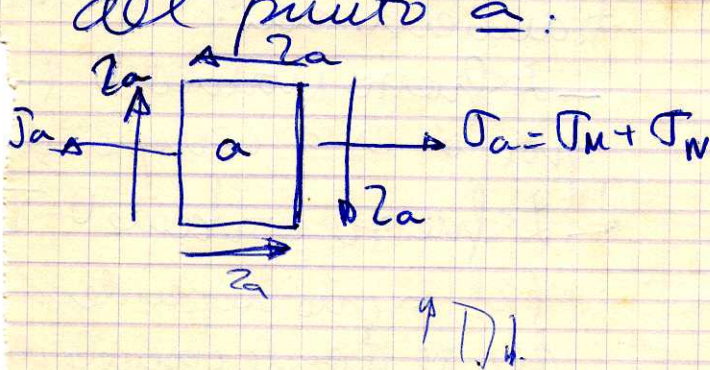
El diagrama de tensiones por la sección será el siguiente ↘



(78)

Círculo de Mohr del punto a:

Aislo un elemento infinitesimal alrededor del punto a:

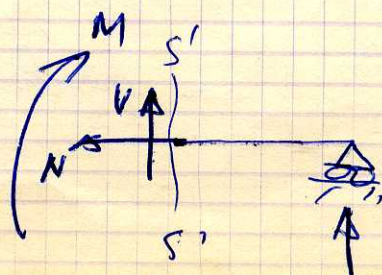
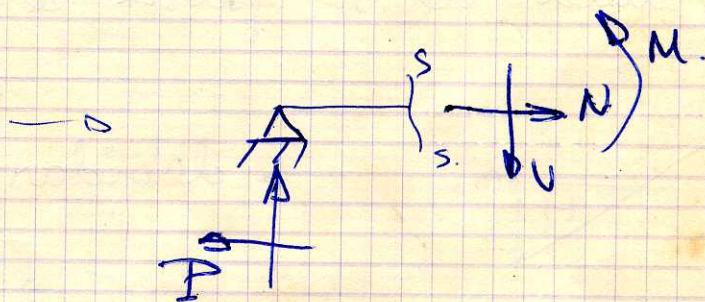
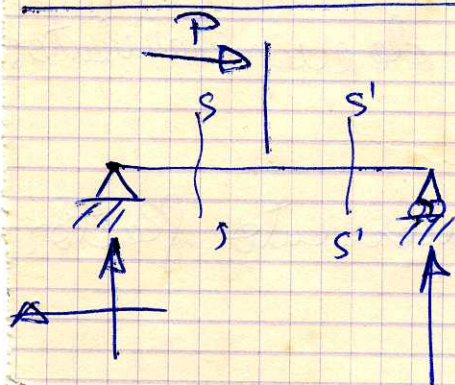


$\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son las tensiones principales, que valen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2}$$

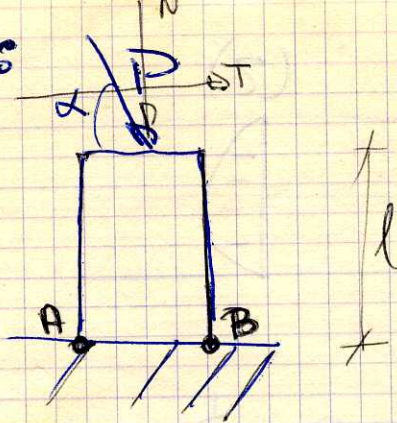
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_a}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{2}\right)^2 + \tau_a^2}$$

Otro caso de flexión compuesta:

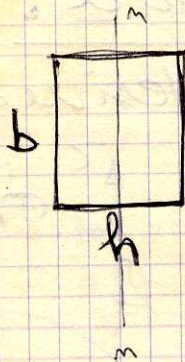


El  $N=0$ . Es  
todo trabaja  
a flexión simple

Otro caso:



Sección →



Descompongo P en  $N$  y  $T$

La columna trabaja a flexión y a compresión. Voy a calcular las tensiones en A y B.

Los efectos que actúan en la sección de empalmiento son:

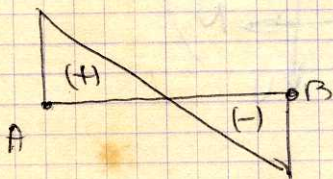
- Esfuerzo normal  $N$  (porque es a compresión)
- Esfuerzo cortante  $V = T$  (el signo dependerá desde donde observe)

mom. flecta  $M = T \cdot l$ . Para el caso flecta la línea neutra es n-n. y  $z_A = z_B = 0$  porque estos pto son los más lejanos de n-n.

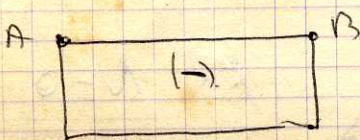
$$\sigma_A = \frac{My}{I_z} - \frac{N}{Area} = \frac{Tl \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3} - \frac{N}{bh}$$

$$\sigma_B = -\frac{Tl \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3} - \frac{N}{bh}$$

Diagrama de  $\sigma$  para la secc. de empalmiento



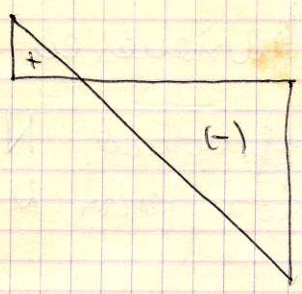
→ debidas al momento flector



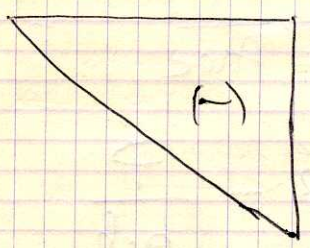
→ debidad al esfuerzo normal

El diagrama total es la superposición de los dos.

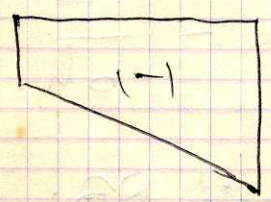
(79)



Cuando  $\sigma_A (+)$ .

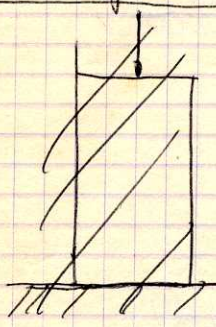


Cuando  $\sigma_A = 0$ .

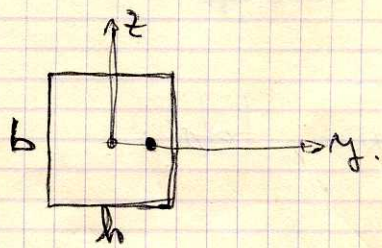
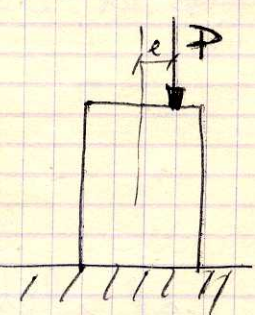


Cuando  $\sigma_A (-)$ .

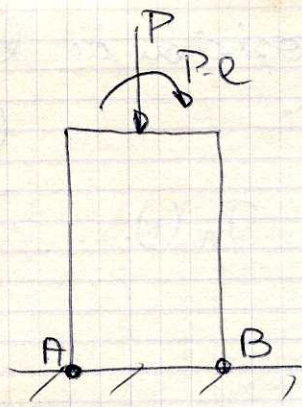
### Compresión excéntrica en columnas de poca esbeltez.



La carga  $P$  está descentrada pero actúa en uno de los ejes ppales de inercia.



Trasladando la carga  $P$  al eje  $\rightarrow$  equivale a la misma carga  $y$  a un momento  $P \cdot e$ .



Se trabaja a mom. flex y esfuerzo normal. Voy a calcular tensiones en A y B.

sec. AB. Hay un esfuerzo normal  $N = -P$   
 " " mom. flex  $M = P \cdot e$

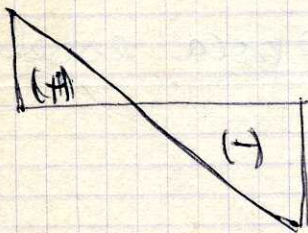


$$\sigma_A = \frac{M y}{I_z} - \frac{P}{A_{ec}} =$$

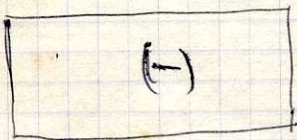
$$= \frac{(Pe) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3} - \frac{P}{b \cdot h}$$

$$\sigma_B = - \frac{Pe \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3} - \frac{P}{b \cdot h}$$

Diagrama de tensiones para la sección AB:

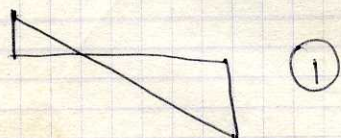


→ el del momento flexor

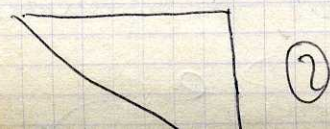


→ el del esfuerzo normal

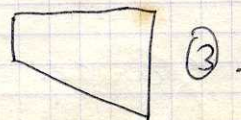
El diagrama total:



①



②

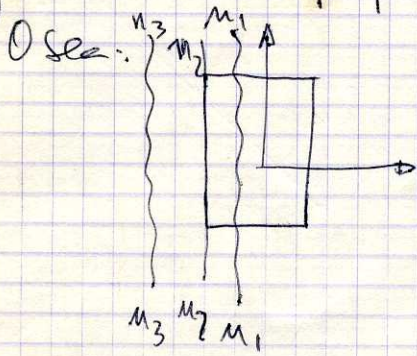


③

(como auto)

Voy a ver como es la línea neutra en cada caso

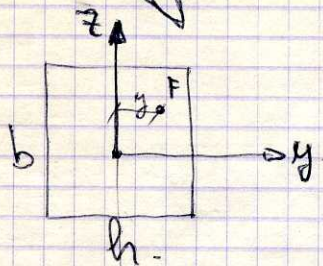
- ① Es el lugar geométrico de  $\sigma=0$ . Luego sea  $L$  plano del papel por el pto donde  $\sigma=0$ . (80)



- ②. Toda la sección trabaja a compresión.  
 ③. También a compresión.

El que la línea neutra sea  $m_1, n_2, n_3$  solo depende de la excentricidad  $e$  y no del valor de la carga. Demostración  $\rightarrow$

Voy a obtener la ecuación de la línea neutra



$m$  para el mom. flexor.

Tomo un pto. F y hallo la tensión:

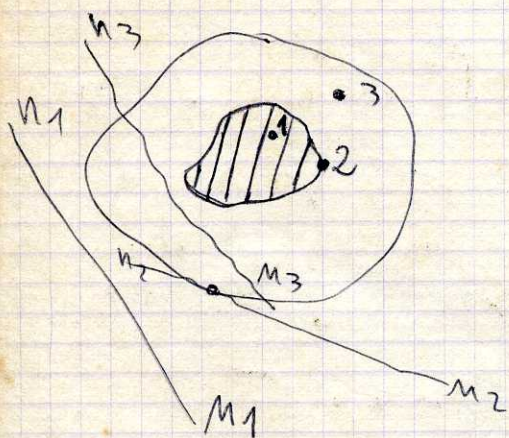
$$\sigma_F = - \frac{P \cdot e \cdot y}{\frac{1}{12} b h^3} - \frac{P}{b h}$$

La línea neutra es el lugar geométrico de  $\sigma=0$ , luego igualando a 0 y despejando  $y$  resulta:

$$y = - \frac{h^2}{12e} \quad \text{no interviene } P, \text{ sino la excentricidad}$$

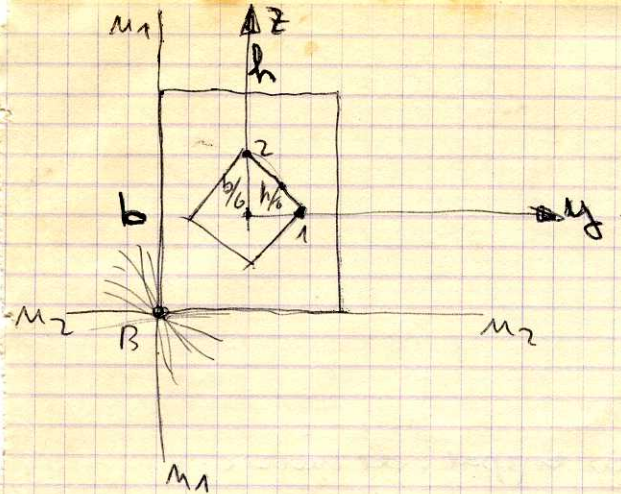
Además es  $y = -k$ , o sea, rectas paralelas al eje  $z$ .

Núcleo de una sección : en toda sección de una columna existe una zona tal que si se le carga actúa en un punto de esa zona, toda la sección trabajaría a compresión o toda a tracción (según cómo sea la carga). No habría inversión de signo en la tensión.



Cálculo del núcleo de algunas secciones :

① Sección rectangular  $b \times h$



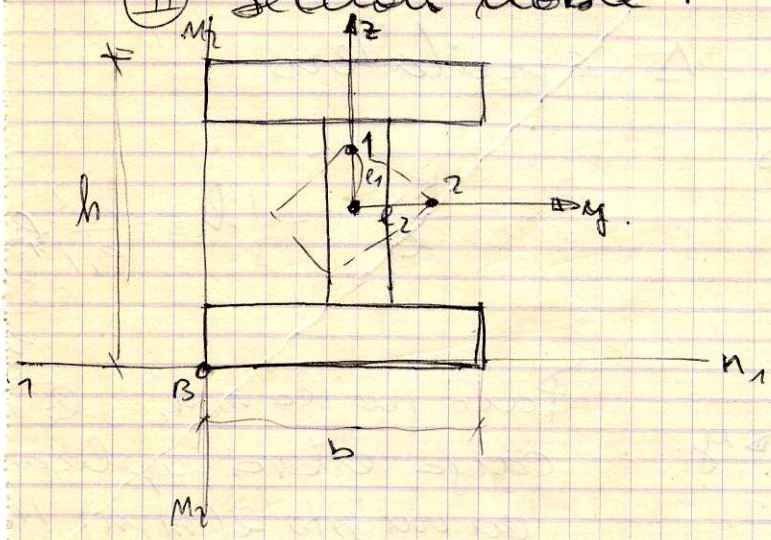
Para que la línea neutra sea  $m_1 n_1$ , la carga tiene que estar aplicada en el eje  $y$  a  $h/6$ .

Para que sea  $m_2 n_2$ , la carga tiene que estar en el eje  $z$  a  $b/6$ .

Si la carga se traslada de la  $z$ , la línea neutra gira alrededor de B sin cortar a la sección.

Por tanto el núcleo de sección será el rombo de lado  $h/6$ .

II Sección doble T



Para que la línea neutra sea  $n_1 n_1$ , la carga tiene que estar en el eje  $z$ . Una dist.  $e_1$  habría que determinar.

Sabemos que la ec. de  $n_1 n_1$  cuando la carga está en eje  $z$  es:

$$z = -\frac{K_y^2}{e} \quad \text{En este caso } z = -\frac{h}{2}$$

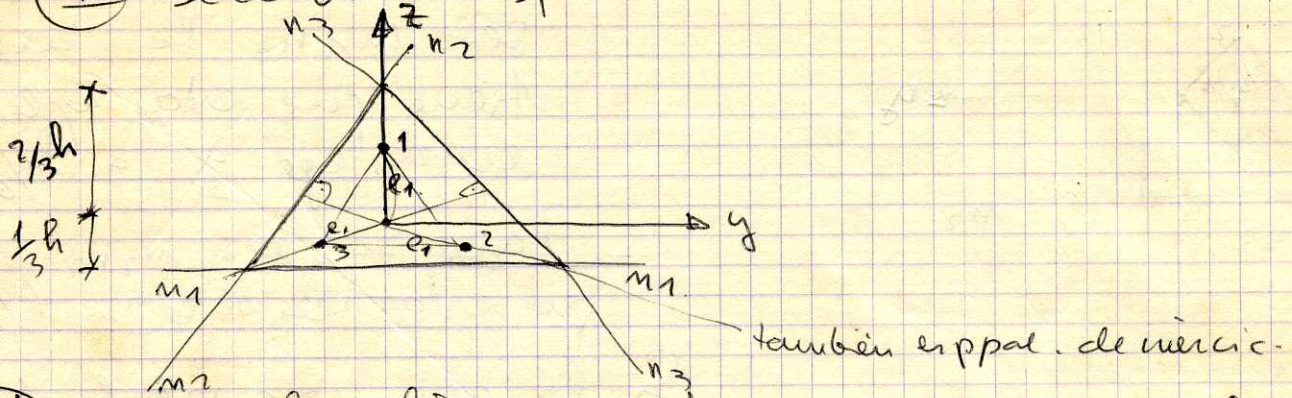
$$-\frac{h}{2} = -\frac{K_y^2}{e_1} \rightarrow \boxed{e_1 = \frac{2 K_y^2}{h}}$$

Para que la línea neutra sea  $m_2 n_2$ , la carga está en el eje  $y$ , a  $e_2$ .

$$y = -\frac{K_z^2}{e} ; \quad -\frac{b}{2} = -\frac{K_z^2}{e_2} \rightarrow \boxed{e_2 = \frac{2 K_z^2}{b}}$$

Cuando la carga se traslade de la  $z$  la  $n-n$  gira alrededor de B. El núcleo será el rombo de lado  $h/6$ .

### III Sección $\Delta$ equilátero.



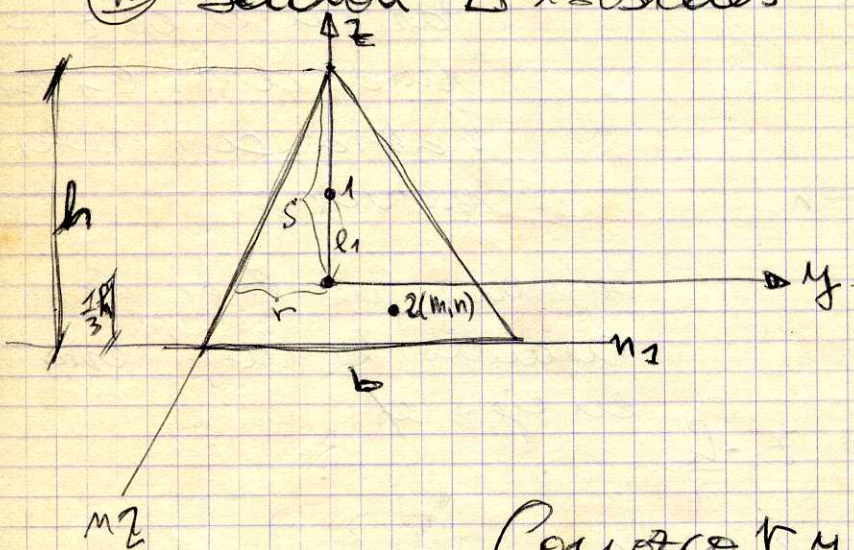
Para que la línea neutra sea  $m_1 m_1$ , la carga estará en el eje  $z$ .

$$\text{Como } z = -\frac{K_y^2}{e}; \quad -\frac{1}{3}h = -\frac{K_y^2}{e_1}; \quad \boxed{e_1 = \frac{3K_y^2}{h}}$$

Para que sea  $m_2 m_2$ .

○ sea, el núcleo es un  $\Delta$  equilátero.

### IV Sección $\Delta$ isósceles



$$z = -\frac{K_y^2}{e}; \quad -\frac{1}{3}h = -\frac{K_y^2}{e_1}; \quad \frac{e_1}{h} = \frac{1}{3}$$

Para que sea  $m_2 m_2$  la carga estará aplicada en un pto 2(m,n). He que determinarlo.

Como  $r$  y  $s$  (planteando semejanza de  $\Delta$ ).

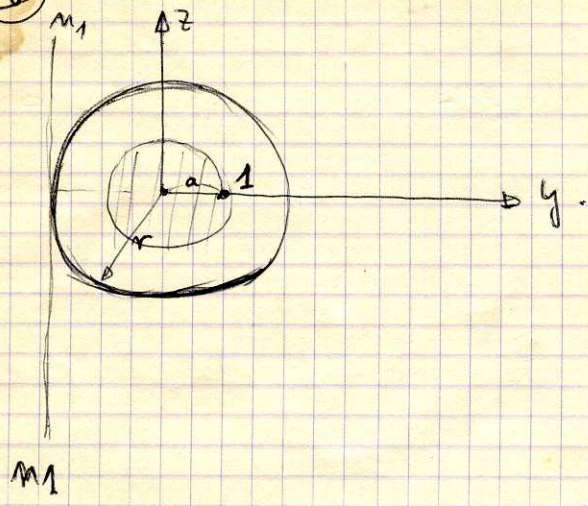
$$\boxed{r = \frac{b}{3}} \quad \boxed{s = \frac{2}{3}h}$$

$$\text{Pero } r = -\frac{K_z^2}{m}; \quad \boxed{m = +\frac{3K_z^2}{b}}$$

$$s = -\frac{K_y^2}{n}; \quad \boxed{n = -\frac{3K_y^2}{2h}}$$

El núcleo es un  $\Delta$  → el vertice 3 será el simétrico del

V Sección circular.



$$y = -\frac{K_z^2}{e}$$

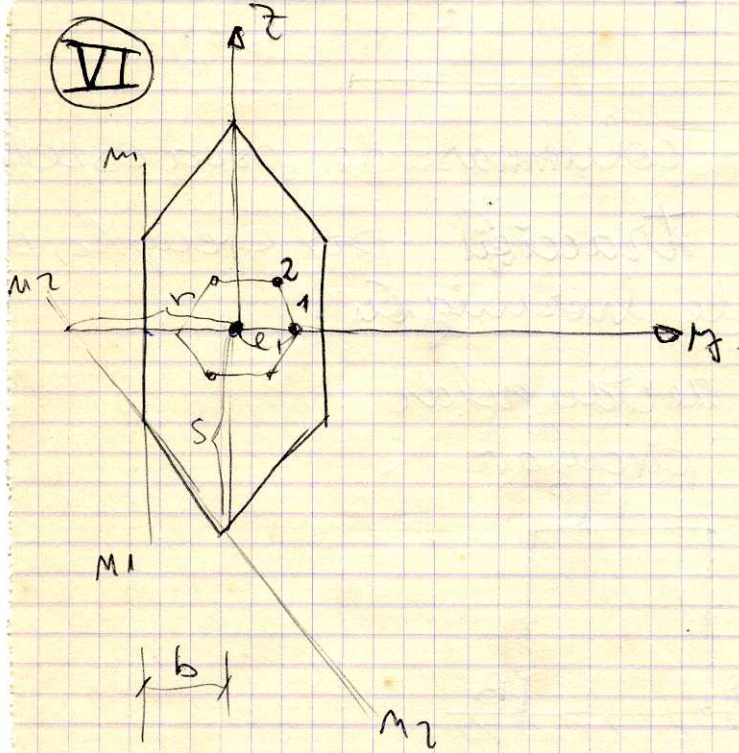
$$-r = -\frac{K_z^2}{a} \quad \left| \quad a = \frac{K_z^2}{r} \right|$$

El núcleo será un círculo de radio a.

$$K_z^2 = \frac{I_z}{Area} = \frac{\pi r^4/4}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}$$

$$\left| a = \frac{r}{4} \right|$$

VI



- Para que la línea neutra sea  $m_1 m_1$ , la carga ha que estar en el eje y.

$$y = -\frac{K_z^2}{e} \quad ; \quad -b = -\frac{K_z^2}{e_1}$$

$$\left| e_1 = \frac{K_z^2}{b} \right|$$

- Para que sea  $m_2 m_2$ , la carga estará aplicada en  $2(m, n)$

(r y s datos).

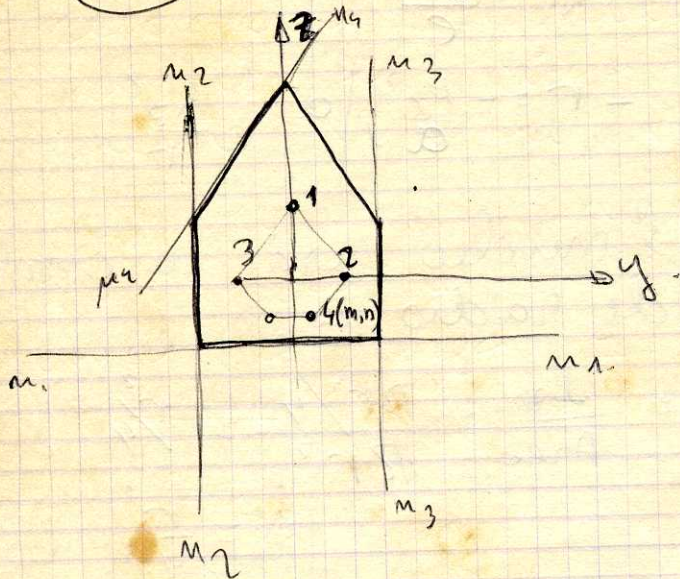
$$r = -\frac{K_z^2}{m} \quad ; \quad \left| m = \frac{K_z^2}{r} \right| \quad (\text{porque } r \text{ es negativo}).$$

$$s = -\frac{K_y^2}{n} \quad ; \quad \left| n = \frac{K_y^2}{s} \right| \quad ( " s " " )$$

Los demás pts. serán simétricos.

(VII)

Pentágono:




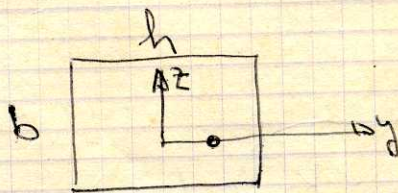
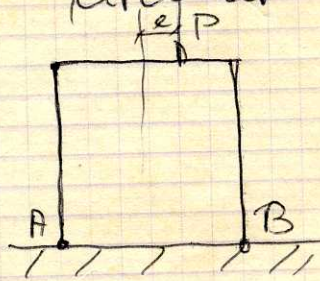
Compresión excéntrica en columnas de poca esbeltez  
 que no resisten la tracción, por ejemplo, columnas de ladrillo o de hormigón.

- 1º) Que la sección sea rectangular
- 2º) Que la sección sea circular

Sección rectangular:

Supongo que  $P$  actúa en el eje principal de inercia  $y$ .

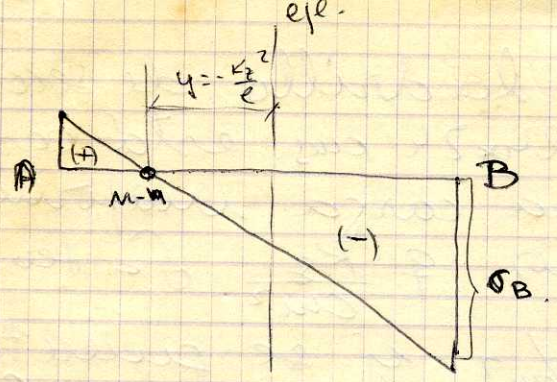
- a)   $e \leq h/6$ .
- b)  $e \geq h/6$



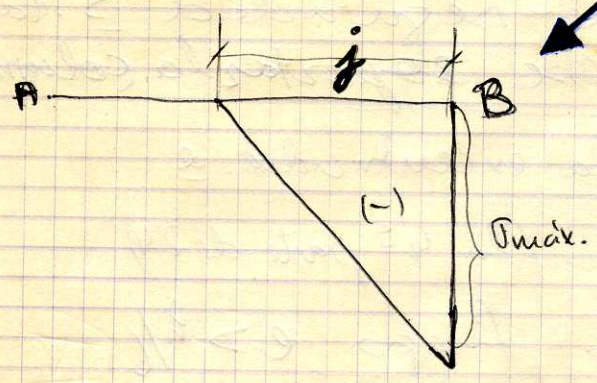
En el primer caso cualquier sección trabaja a compresión (caso ya visto)  
 En el segundo caso, teóricamente una parte de la sección trabajaría a compresión y otra a tracción pero como el material no resiste la tracción se agrieta y el estudio realzado antes no vale para este caso, más que hay que hacer un estudio especial.

Tomamos la sección  $AB$

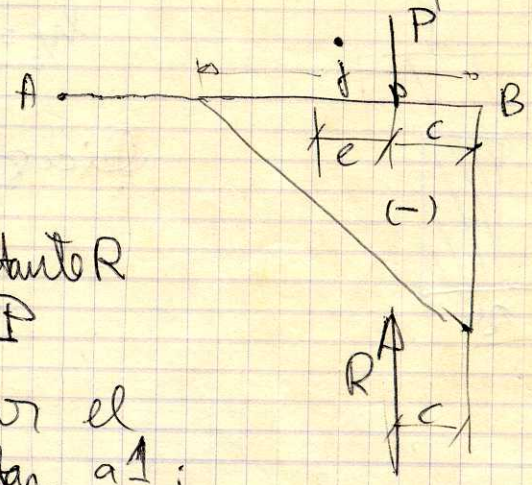




este sería el diagrama de tensiones si el material resistiese la tracción. Al no resistirla, no puede haber  $\sigma$  positivas.



$\sigma_{max} \neq \sigma_B$ . y la línea neutra tampoco es la de antes. Voy a determinar  $j$ , o sea, la parte de sección que trabaja



Las  $\sigma$  tienen que dar una resultante  $R$  que valga  $P$  y esté alineada con  $P$

Como  $R$  (result. de  $\sigma$ ) pasa por el c.d.g. del  $\Delta$ , tiene que estar a  $\frac{1}{3}j$

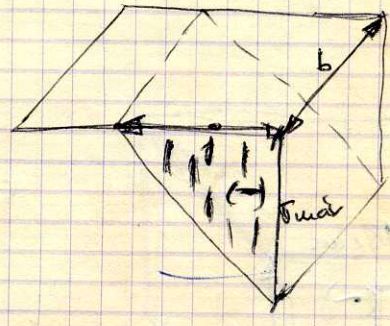
O sea  $c = \frac{1}{3}j \rightarrow j = 3c$

Cálculo de  $\sigma_{max}$ :

Resultante  $R = \int \sigma dA$   
(volumen de tensiones)

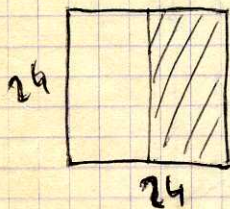
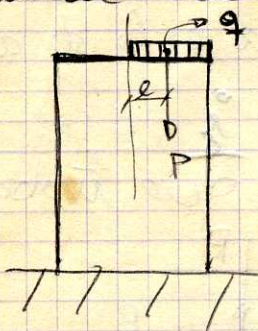
Luego  $R = \frac{1}{2} j \sigma_{max} b = P$

$\sigma_{max} = \frac{2P}{j b} = \frac{2P}{3cb}$



Lo ideal es que  $\sigma_{max}$  sea la tensión de trabajo  $\sigma_t$  del material.

Ejemplo: Una columna de ladrillo de sección cuadrada de dimensiones  $24 \times 24$  cms. está cargada en su mitad con una carga uniformemente distribuida de valor  $9 \frac{Ks}{cm^2}$ . La tensión de rotura del ladrillo  $21 \frac{Ks}{cm^2}$  y se quiere bajar con un coeficiente de seguridad  $3$ . Calcular la carga  $q$  que debe soportar la columna.

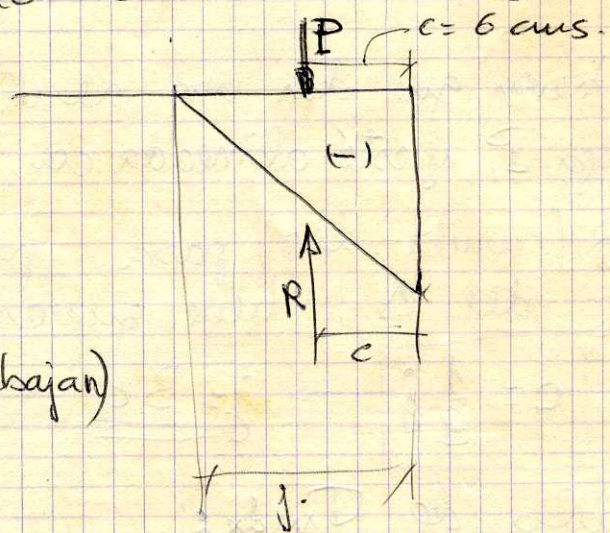


Calcular la excentricidad  $e$ .

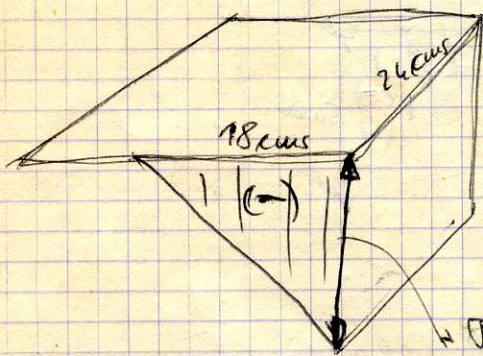
$$e = 6 \text{ cms. (la } \frac{1}{2} \text{ parte de } 24)$$

$$\frac{h}{6} = \frac{24}{6} = 4. \text{ Luego } e > \frac{h}{6}$$

Diagrama de tensiones:



$$c = \frac{1}{3} j \rightarrow j = 18 \text{ cms (trabaja)}$$



$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_t = \frac{\sigma_R}{n} = \frac{21}{3} = 7 \frac{Ks}{cm^2}$$

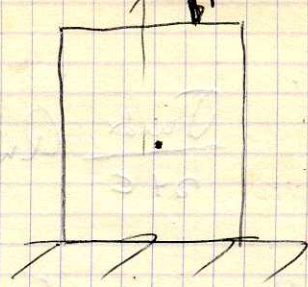
vol. tensiones

$$R = P$$

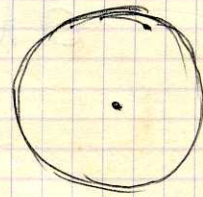
$$\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7 \cdot 24 = P = q \cdot 24 \cdot 12 \rightarrow q$$

## Sección circular:

- La carga actúa dentro del núcleo <sup>del núcleo</sup>
- Todo la sección trabaja a compresión.
- La carga actúa fuera del núcleo de la sección  $e > R/4$ . (parte a compresión y parte a tracción, pero como no resiste la tracción, se agrieta)

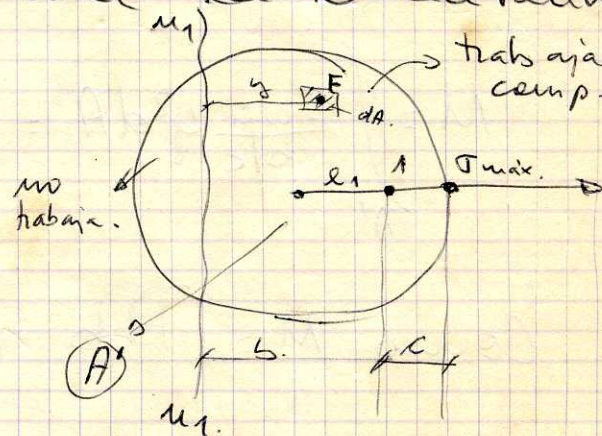


(75)



Vamos primero a determinar la línea neutra de la sección  $\rightarrow$

La carga está aplicada en pto. 1, la  $n-n$  será  $\perp$  a ese eje. Luego que calcular  $b$  para que quede determinada.



Planteo dos ecuaciones:

- 1) Las tensiones tienen que dar una resultante  $= P$
- 2) El mom. de esa result. respecto de  $n-n$  tiene que ser = momento de  $P$  respecto de  $n-n$ .

Temo un  $F$  a una dist.  $y$  de  $n-n$  y calculo la tensión en dicho punto:

$$\frac{\sigma_F}{\sigma_{\max}} = \frac{y}{b+c} \rightarrow \sigma_F = \sigma_{\max} \frac{y}{b+c}$$

Si tomo un  $dA$  alrededor del punto  $F$ , las tensiones que actúan en ese  $dA$  darán un  $dR$  (resultante).

$$dR = \sigma_F dA = \sigma_{\max} \frac{y}{b+c} dA$$

$$R = \int_{A'} \sigma_{\max} \frac{y}{b+c} dA = \frac{\sigma_{\max}}{b+c} \int_{A'} y dA = \frac{\sigma_{\max}}{b+c} Q_{nn}$$

$Q_{nn}$ : mom. est. del área  $A'$  respecto a  $n-n$ .  
COMO  $R = P$

$$\frac{\sigma_{\max}}{b+c} Q_{nn} = P \quad (1)$$

La 2ª ecuación

$$dM = dR \cdot y = \frac{\sigma_{\max}}{b+c} dA \cdot y =$$

$$= \frac{\sigma_{\max}}{b+c} y^2 dA$$

$$M = \int_{A'} \frac{\sigma_{\max}}{b+c} y^2 dA = \frac{\sigma_{\max}}{b+c} \int_{A'} y^2 dA = \frac{\sigma_{\max}}{b+c} I_{nn}$$

momento inercial  
respecto a

Como  $M = P \cdot b$  (momento de  $P$  respecto a-a).

$$\frac{\sigma_{\max}}{b+c} I_{nn} = P \cdot b \quad (2)$$

Dividiendo (2) por (1):

$$b = \frac{I_{nn}}{Q_{nn}}$$

Pero  $I_{nn}$  y  $Q_{nn}$  son función de  $b$ . Pero por tanteo → le doy a  $b$  un valor  $b_1$  y con el cálculo  $I_{nn_1}$  y  $Q_{nn_1}$ . Calculo el cociente.

$$\frac{I_{nn_1}}{Q_{nn_1}} = b'_1. \quad \text{Si } b'_1 = b_1 \text{ he acertado}$$

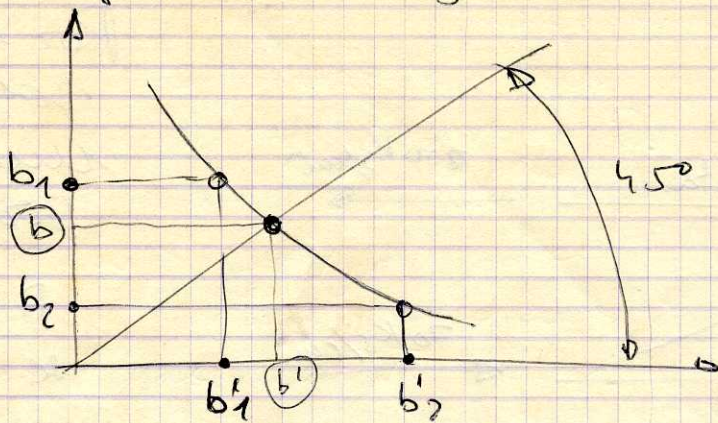
$$\text{Si no, otro valor } b = b_2 \rightarrow \frac{I_{nn_2}}{Q_{nn_2}} = b'_2$$

Si  $b'_2 = b_2$  he acertado

Si me curso de tanteo tanteo y no acierta

construyo la siguiente curva:

(36)



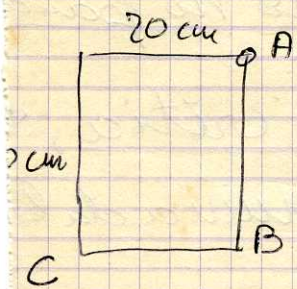
El valor que busca es el  $\textcircled{b}$ , porque el  $\textcircled{b'}$  coincide con el por estar en una recta a  $45^\circ$ .

Cálculo de  $T_{\max}$ : por cualquiera de las dos ecuaciones, (1) o (2), una vez conocido  $\underline{b}$ . Lo ideal es que sea  $T_{\max} = T_{\text{trab}}$ .

### Problemas:

① La sección es de una columna sometida a carga excéntrica. Se conocen las tensiones en A, B y C

$$\sigma_A = -200 \text{ Ks/cm}^2 \quad \sigma_B = -300 \text{ Ks/cm}^2 \quad \sigma_C = 50 \text{ Ks/cm}^2$$

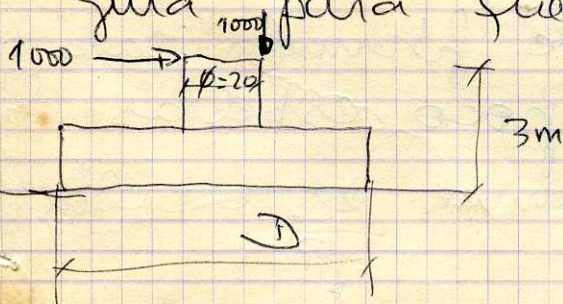


1º) Averiguar la carga  $P$  que soporta la columna.

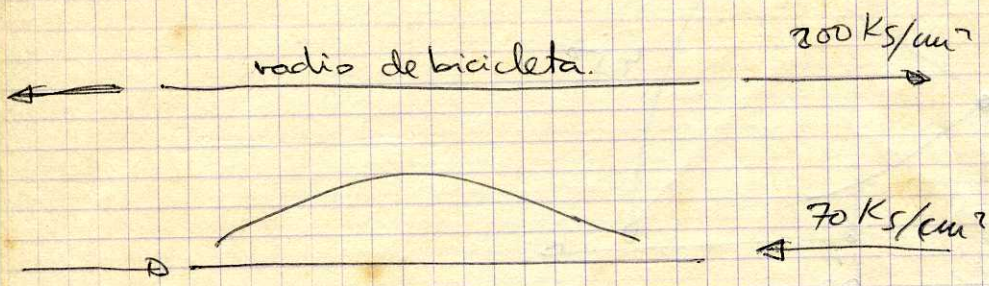
2º) Coordenadas del pto. de aplicación de la carga.

3º) Ecuación de la línea neutra.

② Calcular el diámetro de la zapata de la fr. para que no trabaje a tracción.



# PANDEO

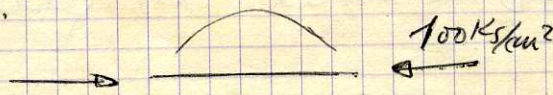


Por ejemplo, se rompería a una tensión de 200 Ks/cm²

A compresión se rompe por una tensión menor, p.ej. 70 Ks/cm², debido a la flexión

o sea, pandeo

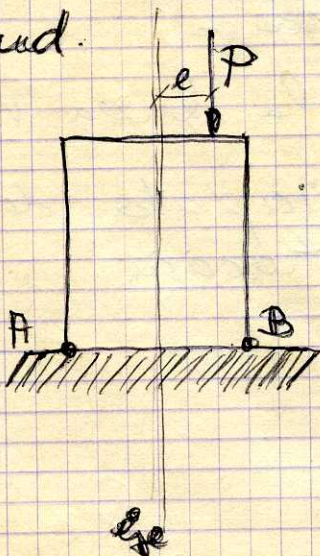
Si tomamos un trozo de ese radio y le sigamos sometiendo a compresión.



Se rompería a una tensión mayor

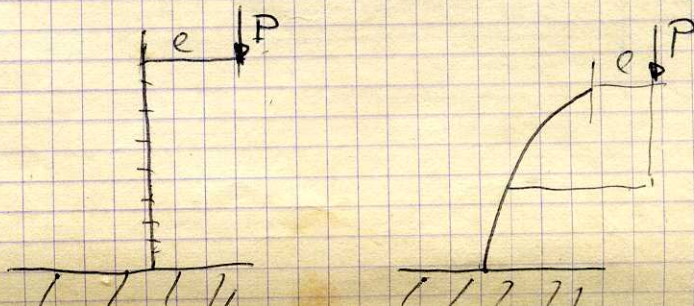
Si tomamos un trozo menor → se rompería a una tensión de 200 Ks/cm² pero no pandea

Por tanto, el pandeo es un fenómeno crítico, o sea, ocurre a partir de una determinada longitud.



$$\sigma = \pm \frac{Pe}{Z} - \frac{P}{A} \quad (\text{para A} + \text{ para B})$$

Esta es la fórmula para columnas poco esbeltas. Si la columna es esbelta:



Al deformarse la columna aumenta la excentricidad y por tanto, el momento flector. Por esto, la columna se sigue deformando y aumentando la excentricidad et etc. La excentricidad final será

$$e_f = e + \Delta e + \Delta' e + \dots$$

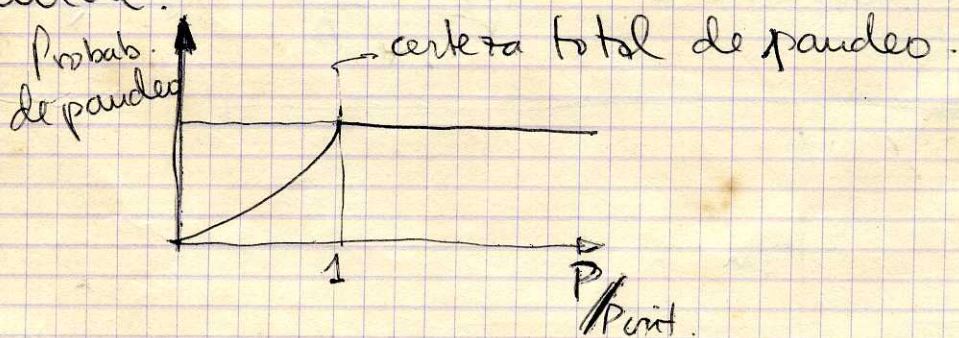
Si la columna es poco esbelta la suma  $\Delta e + \Delta' e + \dots$  es prácticamente despreciable

y  $e_f = e$  Por eso, la fórmula de la  $\sigma$  es válida

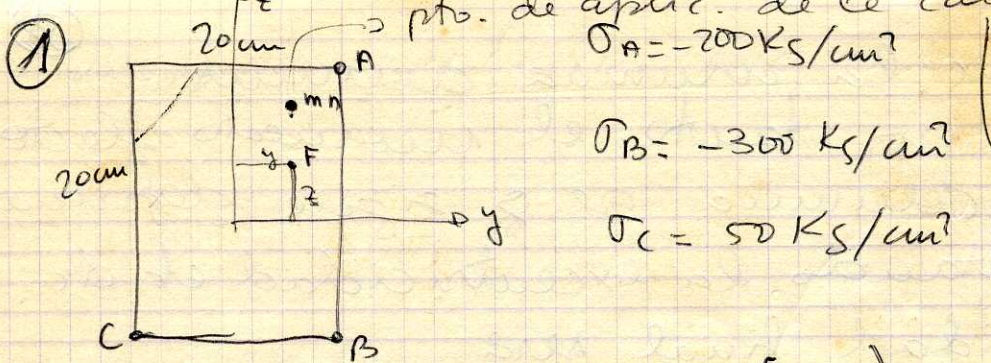
Si la columna es esbelta, la suma no es despreciable y puede  $\rightarrow \infty$ , con lo cual la columna se rompe. Esta reacción en cadena se llama pandeo.

Una columna esbelta pandea con certeza total para un valor de la carga llamada carga crítica ( $P = P_{critica}$ ). No importa cual sea el valor de la excentricidad

Si carga a la columna con una carga  $P < P_{crit}$  pero muy próxima a ella, puede suceder que no pandee si la excentricidad es muy pequeña o que pandee si la excentricidad es grande.



Determinación de la carga crítica



$$\sigma_F = - \frac{(P \cdot m) y}{I_z} - \frac{(P \cdot n) z}{I_y} - \frac{P}{A}$$

Se aplica a los pts A B y C:

$$\sigma_A = -200 = - \frac{P \cdot m \cdot 10}{\frac{1}{12} 20 \cdot 20^3} - \frac{P \cdot n \cdot 10}{\frac{1}{12} 20 \cdot 20^3} - \frac{P}{20 \cdot 20}$$

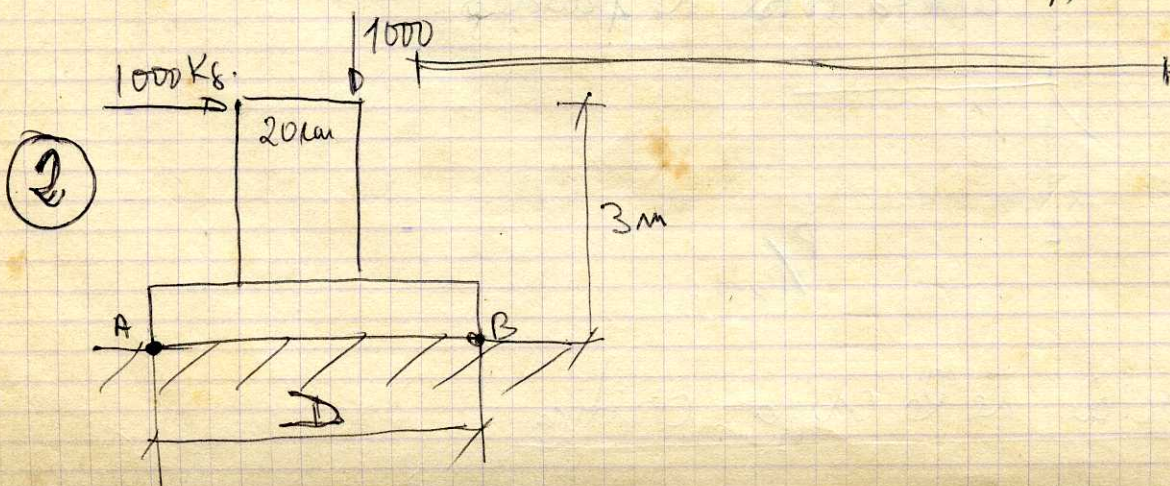
$$\sigma_B = -300 = - \frac{P \cdot m \cdot 10}{\frac{1}{12} 20 \cdot 20^3} - \frac{P \cdot n \cdot (-10)}{\frac{1}{12} 20 \cdot 20^3} - \frac{P}{20 \cdot 20}$$

$$\sigma_C = 50 = - \frac{P \cdot m \cdot (-10)}{\frac{1}{12} 20 \cdot 20^3} - \frac{P \cdot n \cdot (-10)}{\frac{1}{12} 20 \cdot 20^3} - \frac{P}{20 \cdot 20}$$

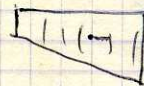
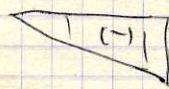
Tres incógnitas P, m, n.

Equación de m-n:  $\frac{m y}{K z^2} + \frac{n z}{K y^2} + 1 = 0$

m y n ya calculadas  $K_z^2 = \frac{I_z}{A}$  y  $K_y^2 = \frac{I_y}{A}$



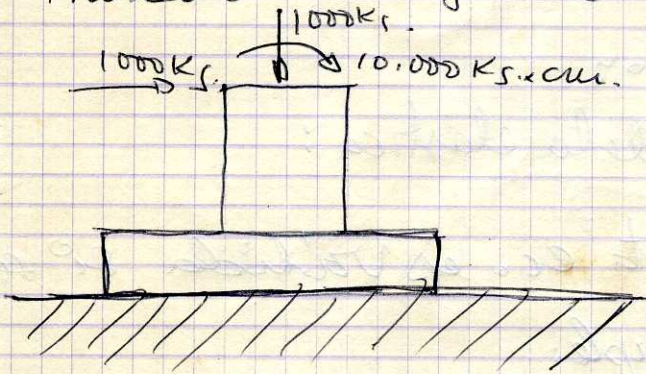
Para que no trabaje a tracción, el diagrama de tensiones para la sección de empotramiento tiene que ser uno de estos dos.



(89)

Si queremos que la tracción sea por el punto A, y con una  $\sigma_A = 0$ , tendría el 1º diagrama.

Traslado el carga de 1000 Kf. al centro:



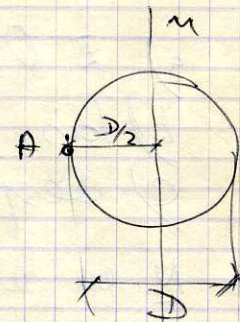
Sección AB

$$\left\{ \begin{aligned} N &= -1.000 \\ M &= 1000 \cdot 3 \cdot 10^2 + 10.000 \\ &\quad \text{Kf} \cdot \text{cm} \quad \text{Kf} \cdot \text{cm} \\ V &= 1.000 \text{ Kf.} \end{aligned} \right.$$

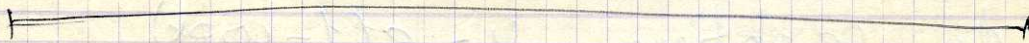
$$\sigma_A = \sigma_M + \sigma_N =$$

$$= \frac{M \cdot D/2}{I_z: \frac{\pi D^4}{64}} - \frac{1000}{\frac{\pi D^2}{4}} = 0$$

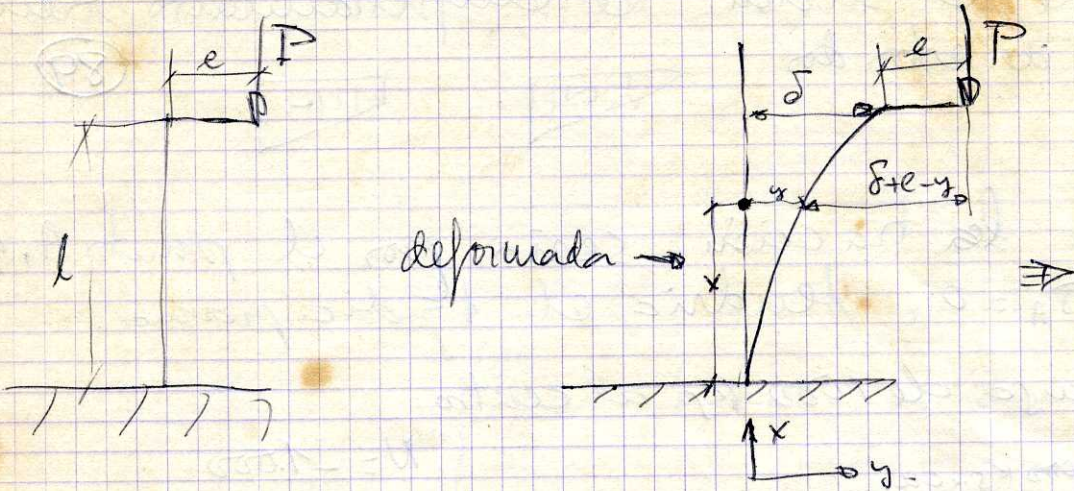
De aquí calculo D.



$M \rightarrow$  para el mom. flexor.



# Determinación de la carga crítica de la columna



Voy a obtener la ecuación de la elástica:

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M, \quad \text{Esta ec. es válida si se cumple:}$$

- El material sigue la ley de Hooke.
- Las deformaciones deben ser pequeñas.
- Despreciable la deform. debida al esf. cort.

Calculo  $M$  en esa sección (es -):  $M = -P(\delta + e - y)$

O sea:  $EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta + e - y)$

Haciendo el cambio  $p = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$

Integrando, se obtiene:  $y = \frac{e(1 - \cos px)}{\cos pl}$

El valor de  $\delta$  es la  $y$  para  $x = l$ , o sea  $\delta = \frac{e(1 - \cos pl)}{\cos pl}$

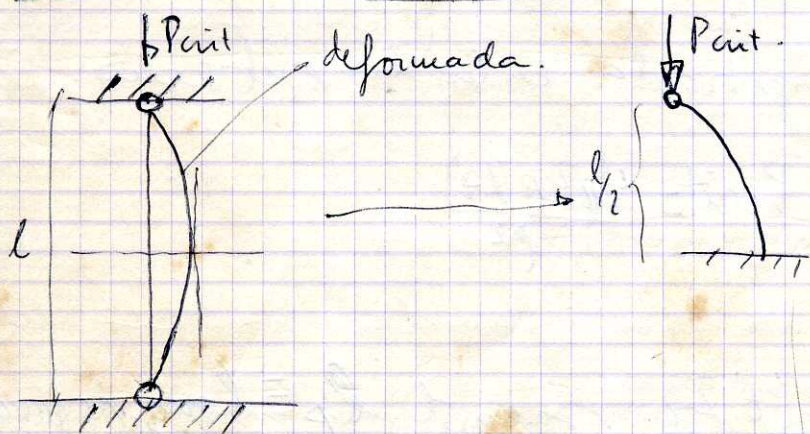
$\delta = \infty$  cuando  $\boxed{\cos pl = 0} \rightarrow pl = \pi/2 \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_z}} l = \pi/2$   
mon. in. mínimo de la sección.

Puedo obtener  $P$ ;  $\boxed{P = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}}$  ( $P$  crítica) } FÓRMULA DE EULER

Para  $P = P_{crit}$  aparece  $\delta = \infty \rightarrow$  ABSURDO  $\rightarrow$  20

que pasa es que antes de  $\delta = \infty$ ,  $\delta$  ha pasado por valores muy grandes y por tanto, no se cumplen las tres condiciones del principio. (90)  
 O sea, realmente la expresión matemática de la Pcrit. no es válida, pero la seguiremos usando, porque si cargáramos la columna con  $P < P_{crit}$  pero muy próximas,  $\delta \neq \infty$  y lo podríamos hacer tan pequeña como quiera, poniendo  $l$  muy pequeña y entonces se cumplirían las condiciones anteriores.

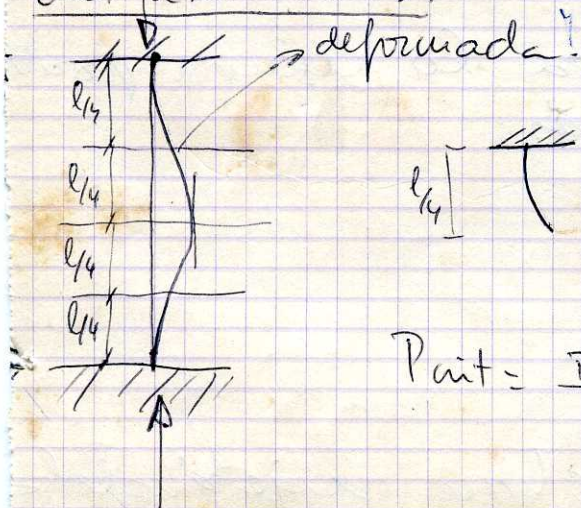
~~La fórmula~~ Fórmula de EULER para una columna articulada en los dos extremos.



→ porque el eje en el centro es vertical, o sea como si la sección no hubiese girado.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2} \longrightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{4\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$$

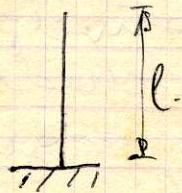
Fórmula de EULER para columna empotrada en los dos extremos:



$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \text{ Ahora la } l \text{ es } l/4:$$

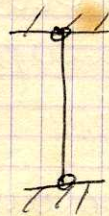
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{4\left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}$$

Resumen:  
Resumen



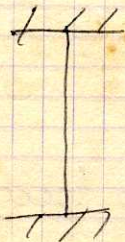
a) Empotrada en un extremo y libre el otro.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}$$



b) Articulada en los dos extremos.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$$



c) Empotrada en los dos extremos.

$$P_{crit} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}$$

En general  $P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_p^2}$  siendo  $l_p \equiv$  long. de pandeo

Identificando vemos que

- a)  $l_p = 2l$ .
- b)  $l_p = l$ .
- c)  $l_p = l/2$ .

Me interesa que sea  $P_{crit}$  sea lo mayor posible. Se puede hacer de varias formas.

- Aumentar  $E$ .
- Aumentar  $I_z$ .
- Disminuir  $l_p$ .

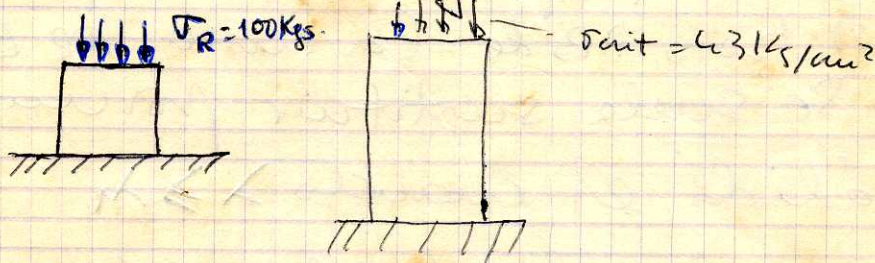
La última es la más usada. Se hace rejeterando el eje en el centro para que no pueda

Tensión crítica de una columna → carga crítica dividida por sección de la columna. (91)

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A}$$

Propiamente habría que llamarla carga crítica, porque la columna no rompe a la tensión crítica, sino que la tensión crítica produce el pandeo de la columna, y al pandear la columna llega un momento en que el material está soportando la tensión de rotura y entonces se rompe.

Ejemplo:



La columna poco esbelta se rompe con  $\sigma_R = 100 \text{ Kgs}$  por ejemplo. Si  $\sigma_{crit} = 43 \text{ Kgs/cm}^2$  para la esbelta, al cargarla con esta tensión, se produce pandeo y al pandear llega un momento en que el material la tensión es la de rotura (o sea,  $100 \text{ Kgs/cm}^2$ ).

Obtención de la tensión crítica de una columna:

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A_{rec}} = \frac{\frac{\pi^2 EI_z}{l_p^2}}{A} = \frac{\pi^2 E \left( \frac{I_z}{A} \right)^{k_2}}{l_p^2} = \frac{\pi^2 E}{\left( \frac{l_p}{k_2} \right)^2}$$

$$\frac{l_p}{k_2} = \lambda \text{ (esbeltez de la columna)}$$

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

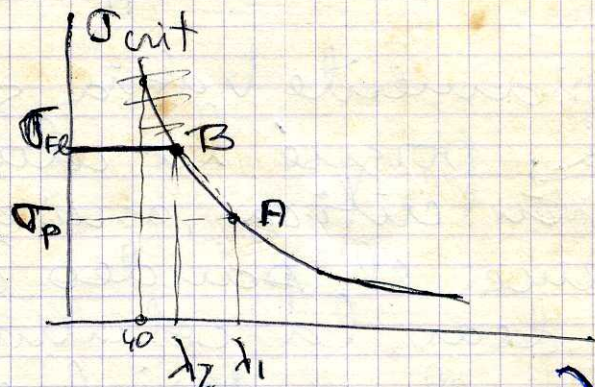
Fórmula de Euler para la tensión crítica.

Para un material dado (o sea,  $E$  dada) la  $\sigma_{crit}$  es función de  $\lambda$  esbeltez de la columna. cosa que no ocurre con la  $\sigma_R$ , que es una para un material dado.

Represent. gráfica.

$\sigma_p$   $\equiv$  tensión correspondiente al límite de proporcionalidad.

$\sigma_{Fe}$   $\equiv$  tensión de fluencia del material.



Por encima de  $\sigma_p$  ya no se cumple Hooke.

Por tanto el trazo AB de la curva de Euler no es válido. Se suele sustituir por una recta.

La zona válida es cuando  $\lambda \geq \lambda_1$

Para  $\lambda = 40$ , p.ej. el material pandearía con un  $\sigma_{crit} = 800 \text{ Kgs}$  por ejemplo, pero antes el material se ha agotado por fluencia. O sea, el trazo de B en adelante se sustituye por una recta horizontal.

Resumen: 1º) Para que sea válido,  $\lambda \geq \lambda_1$ .

2º) Para  $\lambda \leq \lambda_2$  no pandea, sino que se agota por fluencia.

3º) Para  $\lambda > \lambda_2$  pandea cuando está cargada con  $\sigma_{crit}$ .

Fu el caso particular del acero  $\lambda_1 = 100$

Tensión admisible de trabajo de la columna

Nunca la hará trabajar a la tensión crítica que pandearía, sino a la  $\sigma_{crit}$  dividida por un coef. de seguridad.

$$\frac{\sigma_{crit}}{n} = \sigma_{ad. \text{ trab.}}$$

$$\frac{\sigma_{crit}}{n} = \sigma_{adu. \text{ de trab.}}$$

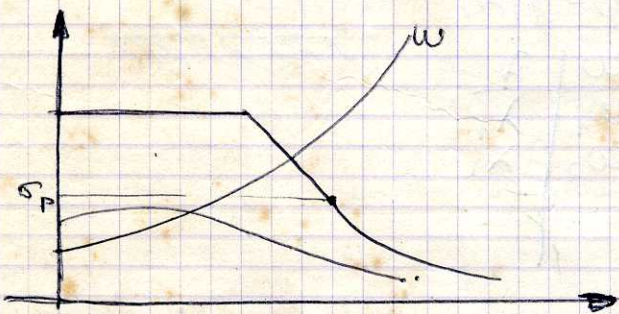


La curva de  $\sigma_{adm. de trab.}$  la obtengo dividiendo las ordenadas de la tensión crítica por las del coef. de seguridad.

Coefficiente  $w$  de pandeo de la columna.

Si no hubiera peligro de pandeo, la columna a la tensión de trabajo a compresión del material  $\sigma_c$ . Como hay peligro de pandeo, la columna a una tensión menor  $\rightarrow \sigma_{adm. de trabajo}$ .

$$w = \frac{\sigma_c}{\sigma_{adm. de trab.}} = \frac{\sigma_c}{\frac{\sigma_{crit.}}{n}} ; \boxed{w \geq 1}$$



Tendrá tres zonas distintas como las de la tensión crítica.

# Proyecto de columnas en el pandeo:

Sección que debe tener la columna sometida a  $P$  para que no pandee. Dos métodos:

1º  $P_{crit} = P \cdot n = \frac{\pi^2 E I_2}{l_0^2} \Rightarrow I_2$  (mom. inercia mínima de la sección)

La pega es que he utilizado la fórmula de Euler que vale solo para  $\lambda \geq \lambda_1$ . Una vez dimensionada la columna calcularé su esbeltez y comprobaré si es  $\geq \lambda_1$ . Si no cumple, el cálculo no vale para nada.

## 2º Método de las $w$

$$w = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ad}}$$

Sustituyo el pandeo por una compresión simple

de valor  $P \cdot w$  y considero que la columna va a trabajar a  $\sigma_c$  (tensión de trabajo)

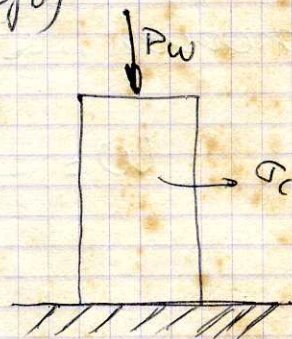
$$A = \frac{P \cdot w}{\sigma_c}$$

El inconveniente es que no conozco  $w$ , porque es función de la esbeltez  $w = f(\lambda)$ .

Cada material tiene una tabla

$w$	$\lambda$
$w_1$	$\lambda_1$
$w_2$	$\lambda_2$

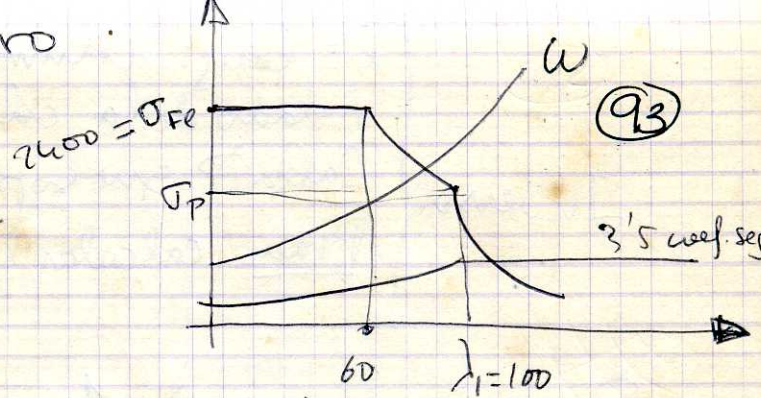
Lo que hago es operar por tanto:  $w = w_1 \rightarrow A_1 = \frac{P \cdot w_1}{\sigma_c}$



Calculo la esbeltez de la columna  $\lambda$ . Veo que valor de  $w$  le corresponde en la tabla. Si es  $w_1$ , problema resuelto. Se puede aplicar siempre, con cualquier esbeltez



- Problema directo
- Problema inverso



Directo { l (long. columna)  
 su estado (empotrada, apoyada, et.)  
 dimensiones de la sección  
 Piden:  $\sigma_{crit}$ ,  $\sigma_{adm. hab.}$ ,  $\omega$  de pandeo.

Se calcula primero la esbeltez:

$$\lambda = \frac{l_p}{k_2} \begin{matrix} \rightarrow \geq 100 \text{ (A)} \\ \searrow < 100 \end{matrix}$$

- Si  $\lambda \geq \lambda_1$  es aplicable Euler. Si  $\lambda < 100$ , no.

Calculo  $\sigma_{crit}$  por Euler  $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

$P_{crit} = \sigma_{crit} \cdot Area$

$n = 3.5$  coef. de seguridad

$\sigma_{adm. hab.} = \frac{\sigma_{crit}}{3.5}$

$\omega = \frac{1200}{\sigma_{adm}}$   $\rightarrow \sigma_{c. trabajo}$

- Si  $\lambda < \lambda_1$ .

fu el libro veve el diagrama  $\rightarrow$  veo, pare la  $\lambda$  que tenga, cuanto vale  $\sigma_{crit}$ .

$P_{crit} = \sigma_{crit} \cdot Area$

$\sigma_{adm. hab.} \rightarrow$  en el diagrama

$\omega = \frac{1200}{\sigma_{adm}}$

Inverso.  $\left\{ \begin{array}{l} l = \text{long. columna} \\ \text{Estado de la columna} \\ \text{Carga } P \text{ que soporta la columna} \\ \text{Piden: calcular la sección para que no pandee} \end{array} \right.$

Supongo que  $\lambda \geq 100 \rightarrow$  Entonces puedo aplicar Euler  $m = 3,5$

$$P_{crit} = P_{3,5}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_p^2} \rightarrow I_z \text{ y puedo hallar las dimensiones de la sección}$$

Una vez dimensionada, calculo su esbeltez y compruebo si es  $\geq 100$ . Si no cumple, lo hecho no vale para nada y entonces usé el método de las W.

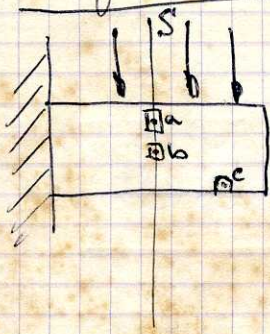
Doy a W un valor W<sub>1</sub> Calculo el área

$$A_1 = \frac{P W_1}{1.200} \rightarrow \text{hallo dimensiones y calculo esbeltez } \lambda. \text{ Con esto}$$

$\lambda$  en el diagrama hallo  $\sigma_{adm}$  trab. y  $W'_1 = \frac{1.200}{\sigma_{adm}}$ . Si coincide  $W_1$  con la que he tomado, prob ma resultado.

# Deformación debida al esfuerzo cortante (LECC.4)

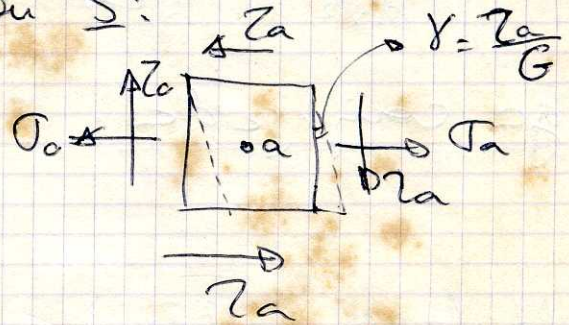
(94) (7)



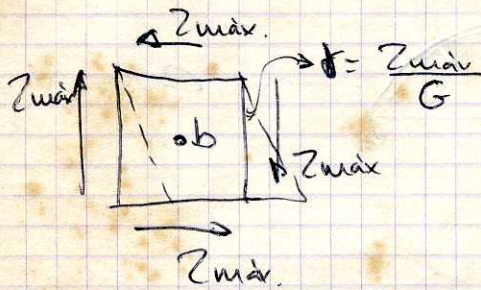
En cualquier sección de esta viga existe un  $M$  y un  $V$ .

El  $V$  produce alabeo en la sección.

Tomamos un elemento alrededor del pto.  $c$  de la sección  $S$ :

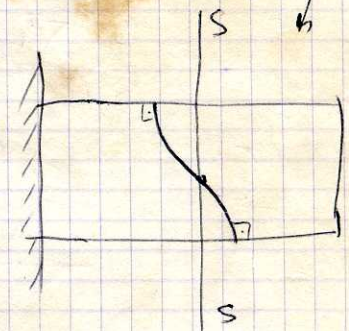


La máxima distorsión se producirá en un elemento de la línea neutra (b)



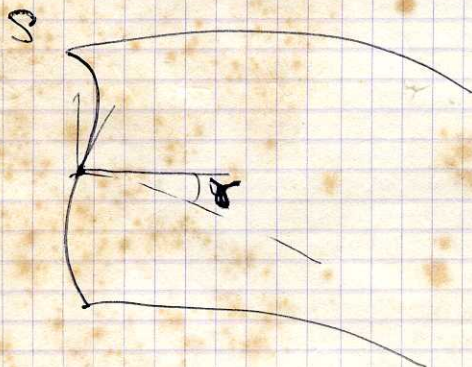
Debido a la distorsión que sufren los elementos, la sección se alabea.

Un elemento como el  $c$  no tendría distorsión porque no existe  $Z$



Ecua. diferencial de la elástica. teniendo en cuenta el efecto del  $V$ .

$$EIz \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad (\text{teniendo en cuenta solo } M)$$



$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Z_{max}}{G}$$

$$\text{Voy a llamar } \alpha = \frac{Z_{max}}{V/A}$$

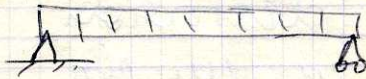
$$\text{Entonces } \gamma = \frac{\alpha V}{AG} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha \frac{dV}{dx}}{GA} = - \frac{\alpha q}{AG}$$

La ecuación final de la elástica es:

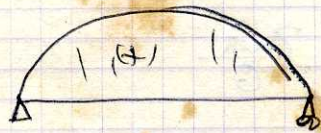
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \left[ \frac{M}{EI_z} + \frac{\alpha q}{AG} \right]$$

Viga conjugada.

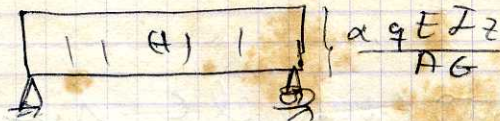


Mult. por  $EI_z$ :

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M + \frac{\alpha q EI_z}{AG}$$



→ solo de M.

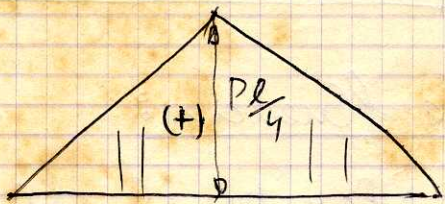


PLASTICIDAD

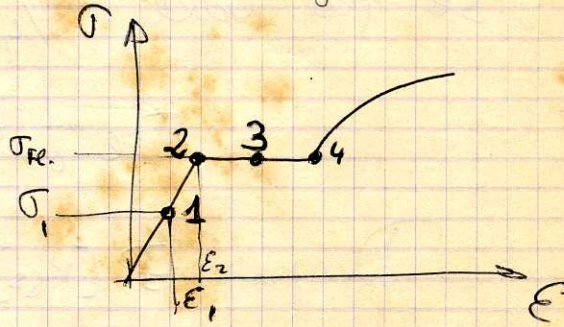


La sección más peligrosa es la central, por tener el M máximo.

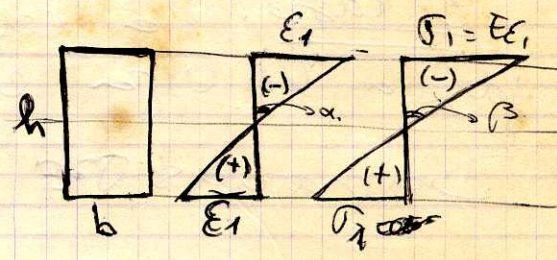
(M)



Voy a suponer que P es variable y que el diagrama  $\sigma, \epsilon$  es el siguiente.



1º caso. Que la carga P hace trabajar a la viga en las condiciones del punto 1 -> o sea, la sección más peligrosa trabaja en las condiciones del pto 1.  
El diagrama de  $\sigma$  y de  $\epsilon$



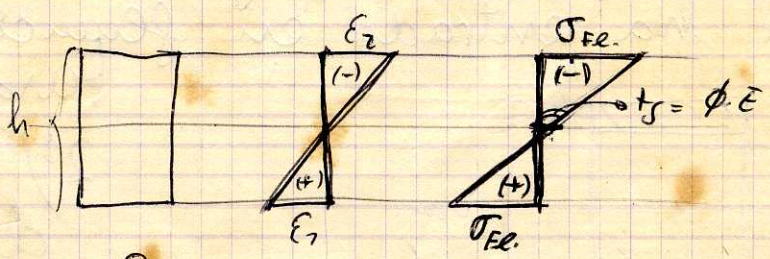
La curvatura  $\phi = \frac{1}{r} = \frac{\epsilon}{y}$ .

$\epsilon \alpha = \frac{\epsilon}{y} = \phi$

$\epsilon \beta = \phi \cdot E$

2º caso. Que la carga P aumenta hasta hacer trabajar a la viga en las condiciones del punto 2.

Diagrama de  $\sigma$  y  $\epsilon$



$\epsilon \gamma = \phi \cdot E = \frac{\sigma_{FL}}{h/2}$

$\phi = \frac{\sigma_{FL}}{E \cdot h/2}$

La tensión en los pto. más lejanos de n-n es la tensión de fluencia -> dire' que eso

ptos. han entrado en fluencia. y al momento que este reportando lo seccion en ese instante, se le llama momento de fluencia

# Calculo del momento de fluencia.

Punto de la formula de Navier:  $\sigma = \frac{My}{I_z}$

$$\sigma_{Fe} = \frac{M \cdot h/2}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{M}{\frac{1}{6} b h^2} \rightarrow \boxed{M = \sigma_{Fe} \frac{1}{6} b h^2} \quad [K \cdot cm]$$

Valor de la carga P que produce fluencia:

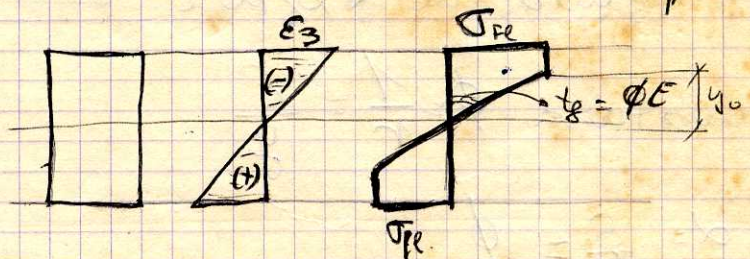
El momento vale  $\sigma_{Fe} \frac{1}{6} b h^2$ . pero por el diagrama se ve que vale  $P l / 4$ . Luego:

$$\sigma_{Fe} \frac{1}{6} b h^2 = \frac{P \cdot l}{4} \quad \text{para poner en cu}$$

Despejo P (Kss)

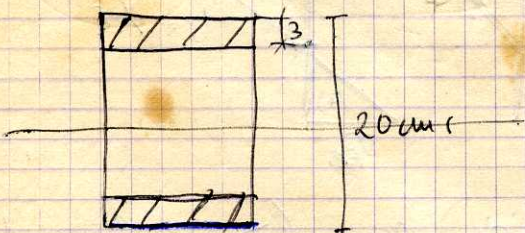
3º caso. La carga P aumenta hasta hacer trazar a la viga en las condiciones del punto

Diagramas  $\sigma \cdot \epsilon$



$$\phi \epsilon = \frac{\sigma_{Fe}}{y_0} \rightarrow \boxed{\phi = \frac{\sigma_{Fe}}{E y_0}}$$

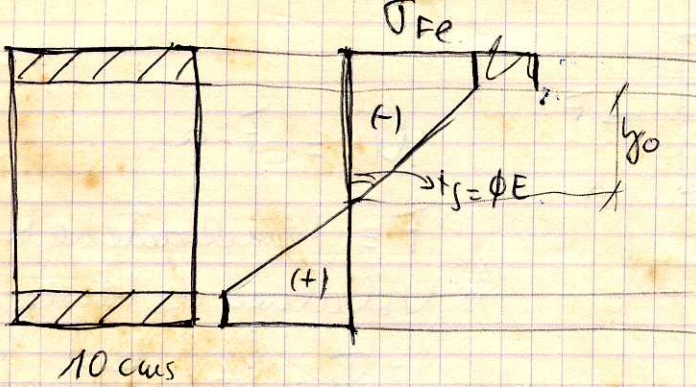
Problema: la sección de la figura tiene plastificada la zona rayada  $\rightarrow$  sea, la zona rayada ha entrado en fluencia.



1) Calcular la curva de la viga en esa sección.  
2) Momento que está soportando la sección.

3) Valor de la carga P que produce la fluencia en la

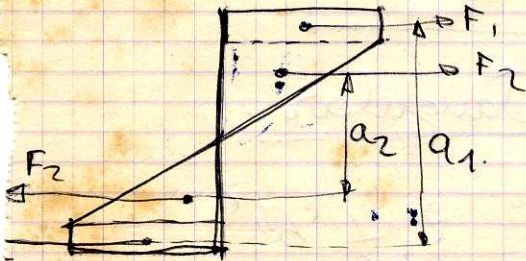
en el supuesto de ser esta sección la más peligrosa de la viga.



(96)  $\phi E = \frac{\sigma_{FE}}{y_0} \rightarrow \phi = \frac{\sigma_{FE}}{E y_0}$   
 $y_0 = 7 \text{ cm}$   
 $\phi$  en  $\text{cm}^{-1}$

2º)

$$M = F_1 a_1 + F_2 a_2 \quad (1)$$



$$F_1 = \sigma_{FE} \cdot 3 \cdot 10$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \sigma_{FE} \cdot y_0 \cdot 10$$

$$a_1 = 20 - 3 = 17 \text{ cm}$$

$$a_2 = 2 \cdot \frac{2}{3} y_0$$

flexo a (1)  
 y calculo  
 el momento

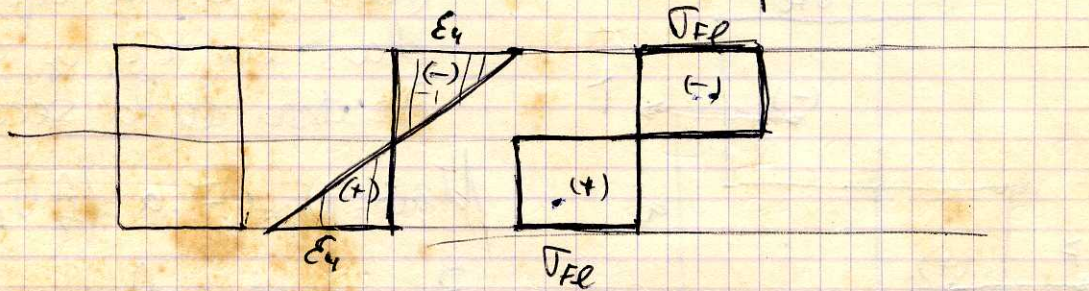
3º)

$$M = P \cdot \frac{l}{4} \text{ del diagrama de } M$$

$$(1) = P \cdot \frac{l}{4} \cdot 10^2 \text{ (porque } l \text{ viene en metros)}$$

4º caso

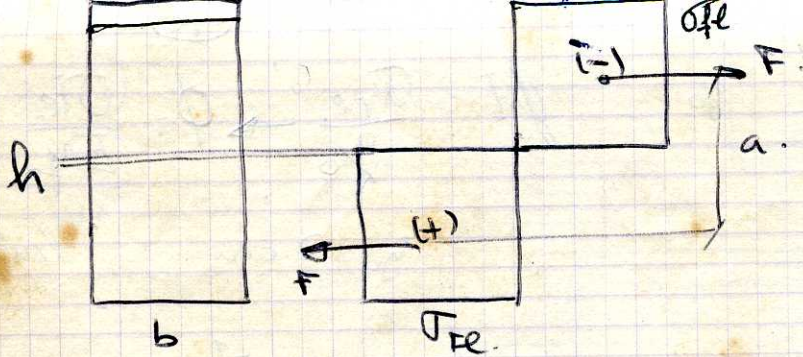
La carga  $P$  hace trabajar a la sección en las condiciones del pto. 4



Se considera que toda la sección está en fluencia

El momento que está soportando la sección cuando toda ella ha entrado en fluencia (se ha plastificado) se le llama momento último o momento plástico.

Cálculo del momento plástico para una sección rectangular.



$$M_p = F \cdot a$$

$F =$  Resultante de tensiones  
 $=$  Volumen de tensiones  
 $= \sigma_{re} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \left(a = \frac{h}{2}\right)$   
 (En este caso)

$$M_p = \sigma_{re} \cdot \frac{1}{4} b h^2$$

### Módulo plástico de la sección rectangular:

En elasticidad  $\rightarrow \sigma_{máx} = \frac{M}{Z}$        $Z = \frac{1}{6} b h^2$

En plasticidad  $\rightarrow \sigma_{re} = \frac{M_p}{Z_p}$

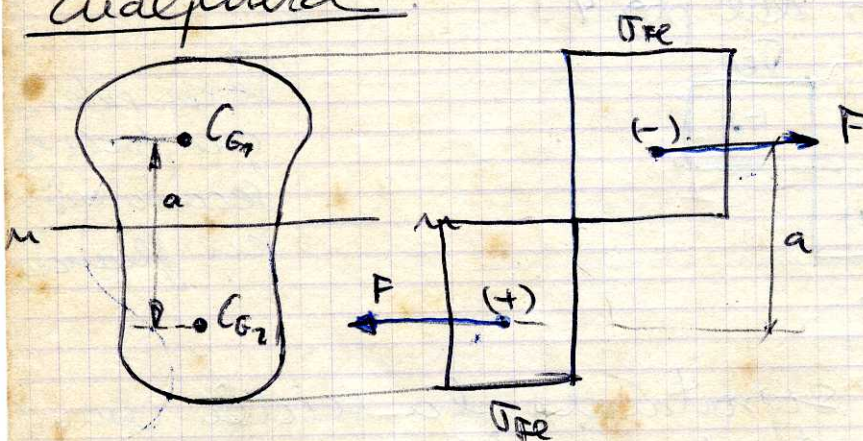
$$Z_p = \frac{M_p}{\sigma_{re}} = \frac{1}{4} b h^2$$

$$\boxed{\text{Módulo plástico } Z_p = \frac{1}{4} b h^2}$$

$Z_p$  solo depende de las dimensiones de la sección.  
 Se llama factor de forma de la sección al cociente entre el módulo plástico y el resistente.

$$f = \frac{Z_p}{Z} = \frac{6}{4}$$

### Cálculo del momento plástico de una sección simétrica cualquiera



Las F están aplicadas en  $C_{G1}$  y  $C_{G2}$   
 $A =$  área de la sección

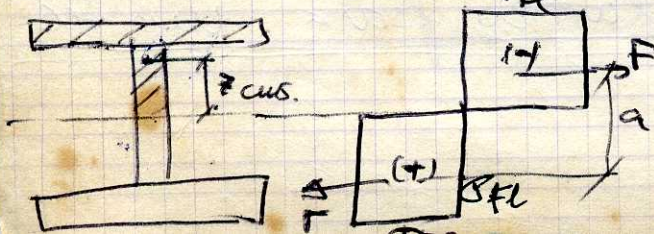
$$M_{ult} = M_p = (F \cdot a = \left(\frac{A}{2} \sigma_{re}\right) \cdot a)$$

$$Z_p = \frac{M_{ult}}{\sigma_{re}} = \frac{A}{2} \cdot a$$

Ejemplo: Calcular el  $M_p$  y el  $Z_p$  de una sección en doble T, con área  $100 \text{ cm}^2$  sabiendo que la dist. del c.g. del área respecto a n-n es  $7 \text{ cms}$ .

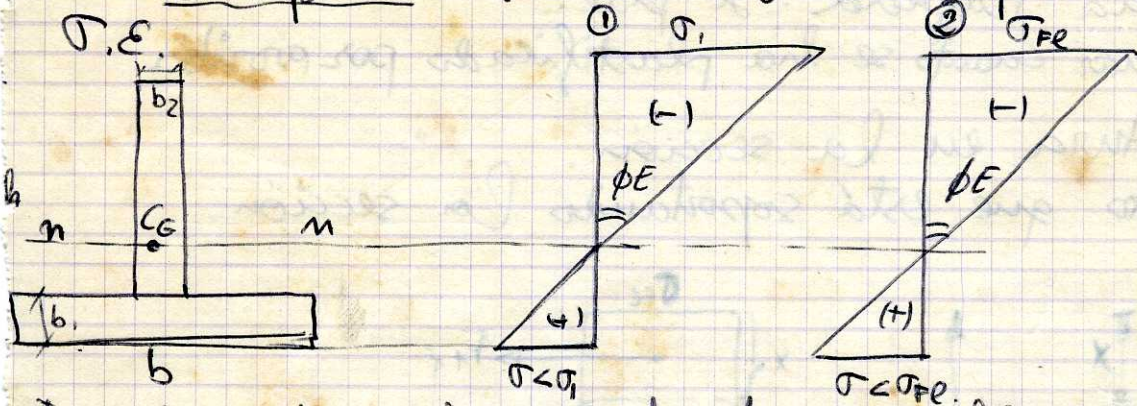
$$M_p = F \cdot a = \frac{A}{2} \sigma_{re} \cdot 14 = 50 \sigma_{re} \cdot 14$$

$$Z_p = \frac{M_p}{\sigma_{re}} = 50 \cdot 14 \text{ cm}^3$$



# ESTUDIO DE UNA SECCIÓN ASIMÉTRICA.

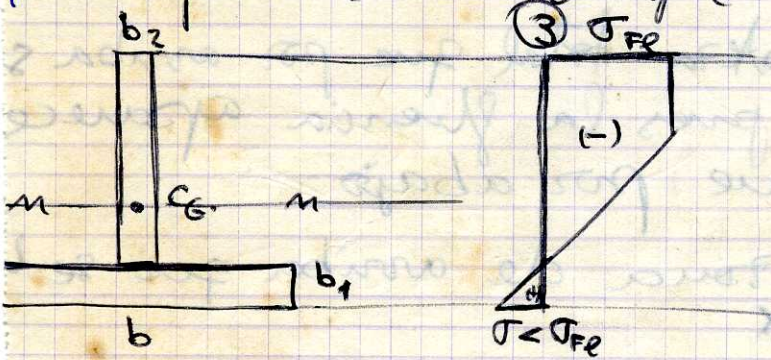
- Simple T. Se estudia en los pto 1, 2, 3, 4 del diagrama



En el punto 2 han entrado en fluencia los pto. de arriba, pues en ellos la tensión es la  $\sigma_{FFE}$ .

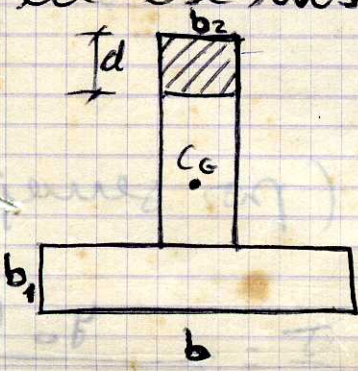
En 1 y 2 la L.N. pasa por el c.d.g. de la sección pues se cumple Hooké.

En 3 y 4 la L.N. no pasará por el c.d.g. de la sección pues no se cumple Hooké.



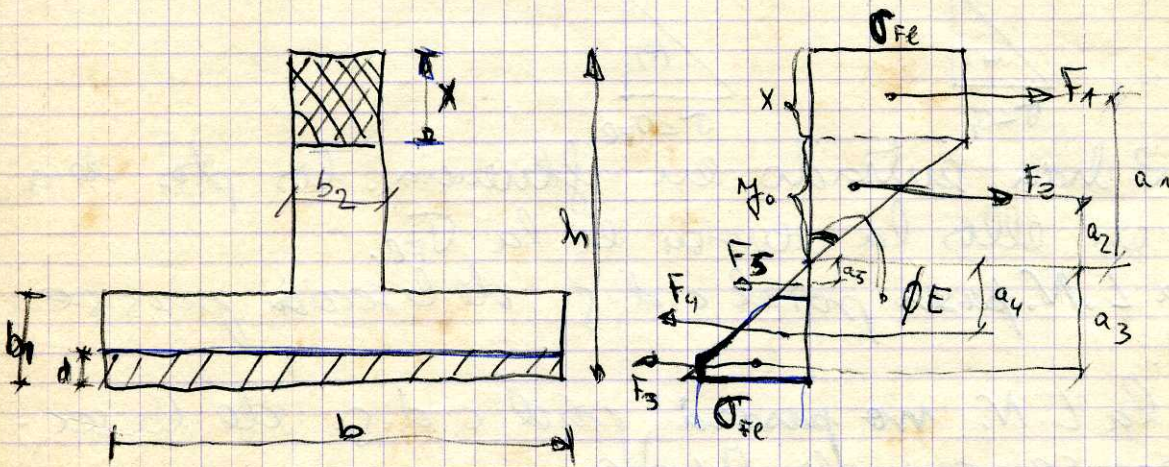
Problema: Dada la simple T de la figura, en la que sabemos que por lo menos se ha plastificado la zona rayada, se pide:

- 1º) Averiguar si se ha plastificado algo por abajo.
- 2º) Curvatura de la viga en la sección.
- 3º) Momento que está reportando la sección en ese instante.



Problema En la simple T de la figura se ha plastificado la zona rayada. Se pide:

- ① Averiguar cuanto se ha plastificado por arriba
- ② Curvatura en la sección.
- ③ Momento que está soportando la sección.



En este caso se con certeza total que por arriba se ha plastificado algo, pues la fluencia aparece antes por arriba que por abajo

Para calcular la zona de arriba que se ha plastificado, hallo  $x$

Si no existe esfuerzo normal en la sección se cumplirá

$$F_1 + F_2 = F_3 + F_4 + F_5 \quad (1)$$

$$F_1 = x b_2 \sigma_{Fe}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \sigma_{Fe} \cdot y_0 \cdot b_2$$

$$F_3 = b \cdot d \cdot \sigma_{Fe}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} (\sigma_{Fe} + \sigma) (b_1 - d) \cdot b$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \sigma (h - x - y_0 - b_1) b_2$$

Sustituyendo en (1) obtenemos una ecuación con tres incógnitas:  $x, y_0, \sigma$

Calculo  $x$  con lo que tendríamos la parte que...

Plantearé otras dos ecuaciones (por semejanza de triángulos)

$$\frac{\sigma}{\sigma_{Fe}} = \frac{h - x - y_0 - b_1}{h - x - y_0 - d} \quad (2) \quad \frac{\sigma}{\sigma_{Fe}} = \frac{y_0}{h - x - y_0 - d}$$

Se ha plastificado por arriba  
 Cálculo  $y_0$ . Con  $x$  e  $y_0$ . luego situa de la  
 línea neutra.

La curvatura:  $\phi E = \frac{\sigma_{FE}}{y_0} \Rightarrow \phi = \frac{\sigma_{FE}}{E \cdot y_0}$

③ Será el momento de los esfuerzos respecto  
 de la línea neutra.

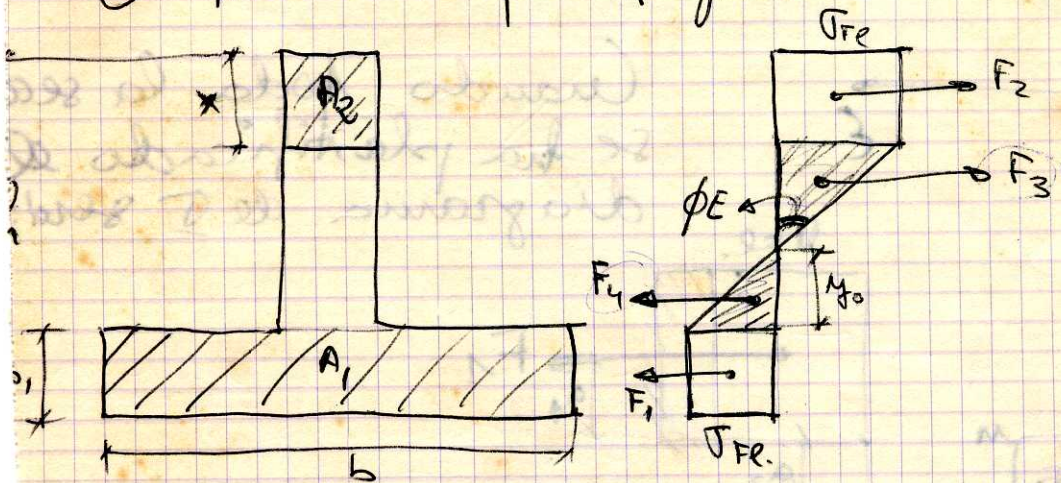
$$M = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + F_4 \cdot a_4 + F_5 \cdot a_5$$

Problema: En la simple T de la figura. se  
 ha plastificado todo el ala. Se pide:

① Averiguar cuánto se ha plastificado por  
 arriba.

② Curvatura en la sección.

③ Momento que soporta la sección.



Por arriba según que se ha plastificado en  
 una zona que le llamo  $A_2$

Voy a demostrar que el área de la zona plasti-  
 ficada de arriba  $A_2$  es igual al área del ala  
 (que está plastificada)  $A_1$

Si no hay esfuerzo normal en la sección, se  
 cumplirá

$$F_2 + F_3 = F_1 + F_4 \rightarrow \text{pero } F_3 = F_4 \text{ luego } F_1 = F_2$$

$$A_1 \cdot \sigma_{FE} = A_2 \cdot \sigma_{FE} \rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$$

$$x \cdot b_2 = b \cdot b_1 \rightarrow \boxed{x = \frac{b \cdot b_1}{b_2}}$$

$$h = x + 2y_0 + b_1 \rightarrow y_0 = \frac{h - x - b_1}{2} \rightarrow \text{conoc. de } l_n$$

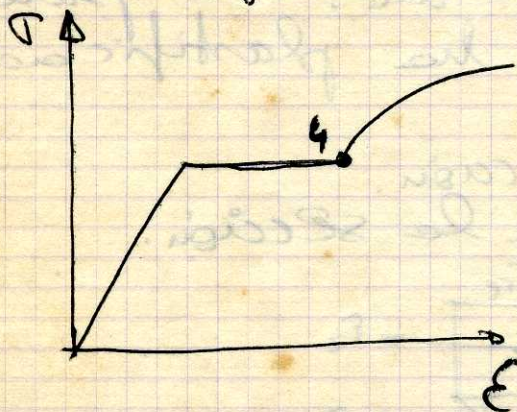
② La curvatura  $\phi \epsilon = \frac{\sigma_{FE}}{y_0} \rightarrow \phi = \frac{\sigma_{FE}}{E y_0}$

③ Momento que está soportando la sección:

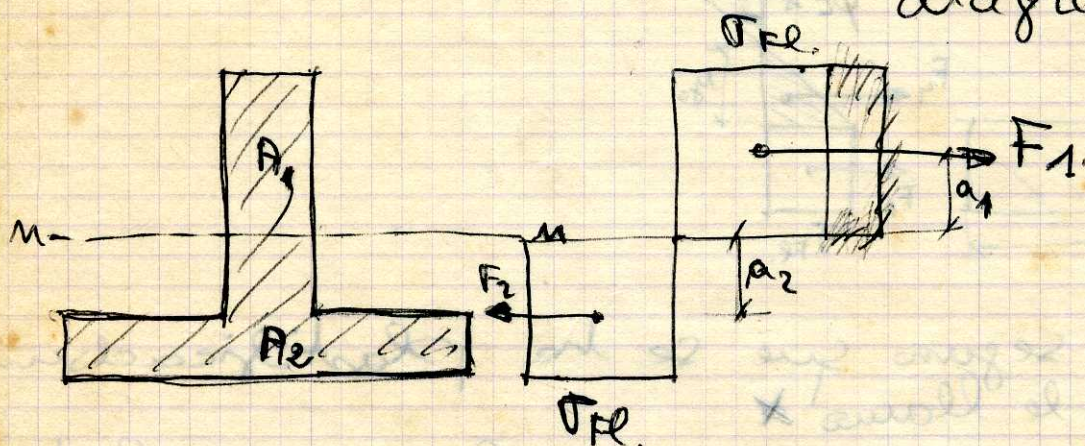
$$M = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + F_4 a_4$$

Cálculo del momento último o del momento plástico de la simple T.

Será el momento que está soportando la sección cuando toda ella se ha plastificado, es decir cuando está en las condiciones del punto 4.



Cuando toda la sección se ha plastificado el diagrama de  $\sigma$  será



Si no existe esfuerzo normal  $F_1 = F_2$

$$A_1 \sigma_{FE} = A_2 \sigma_{FE} \rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$$

Cuando toda la sección se ha plastificado, la línea neutra es una línea que divide a toda la sección en dos partes iguales

El momento plástico  $M_p$  es el momento de  $F_1$  y  $F_2$  respecto de la línea neutra

$$M_p = F_1 a_1 + F_2 a_2.$$

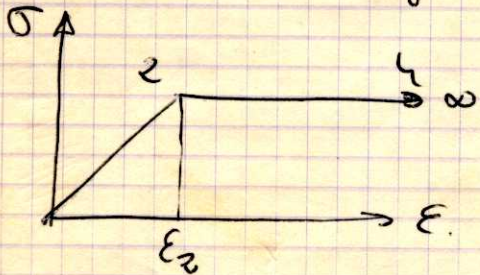
(99)

Tendría que descomponer  $F_2$  en dos fuerzas.

El módulo plástico

$$Z_p = \frac{M_p}{\sigma_{FL}}$$

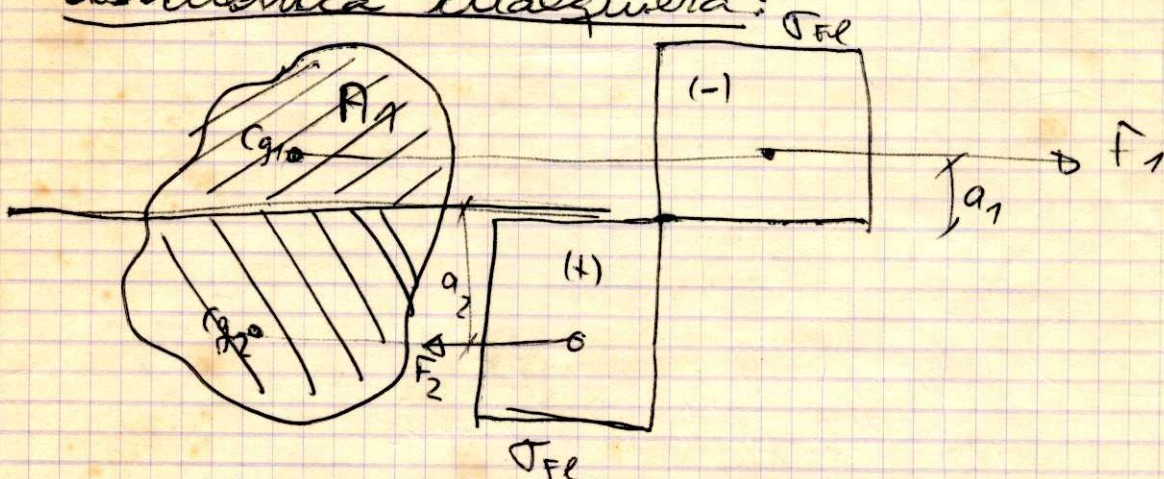
Para que el diagrama de  $(\sigma)$  sea el de arriba, el diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  sería



Flasto-plástico perfecto.

Cálculo del momento plástico de una sección.

asimétrica cualquiera:



$I_s$  es el momento que está soportando la sección cuando toda ella se ha plastificado.

Suponiendo que no haya esfuerzo normal en la sección.

$$F_1 = F_2.$$

$$A_1 \sigma_{FL} = A_2 \sigma_{FL} \rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$$

Cuando toda la sección se ha plastificado la L.N. es una línea tal que divide a la sección en dos partes iguales.

El momento plástico será:

$$M_p = F_1 a_1 + F_2 a_2$$

$$Z_p = \frac{M_p}{\sigma_{FL}}$$

## Módulo plástico de la sección rectangular:

En elasticidad viene  $J_{max} = \frac{M}{\sigma}$

En plasticidad  $J_{PE} = \frac{M_p}{\sigma}$

$$Z_p = \frac{M_p}{\sigma}$$

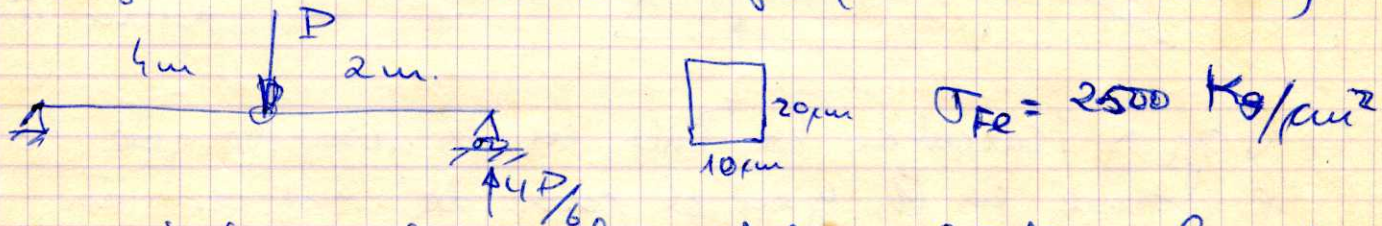
RESUMEN: Si la sección es simétrica, la L.N. pasa por el c.d.g. de la sección, tanto cuando trabaja dentro de la zona de proporcionalidad, como cuando se plastifica. Si la sección es asimétrica, la L.N. pasa por el c.d.g. cuando trabaja dentro de la zona de proporcionalidad pero cuando comienza a plastificarse, la L.N. deja de pasar por el c.d.g. de la sección y cuando toda la sección ha plastificado, la L.N. es tal que divide al área en dos partes iguales. Tanto si la sección es simétrica como

si es asimétrica, el momento último o momento plástico de la sección es el momento que soporta cuando toda ella se ha plastificado.

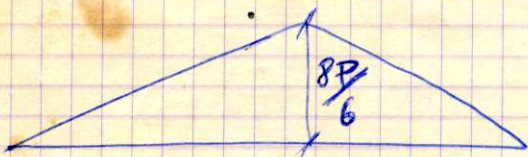
## Calculo de la carga última de una viga. (100)

Viga isostática: Cuando una sección se ha plastificado enteramente dire que en esa sección se ha formado una rotula plástica articulación con rotamiento.

D = Calcular el valor de la carga  $P$  que produce el agotamiento de la viga (o sea,  $P$  última)

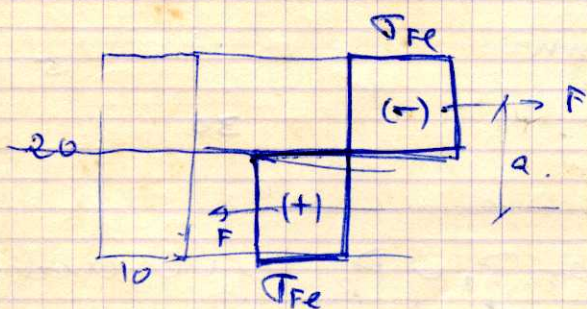


En cuanto se forme la rotula plástica, la viga se derrumba. Se formará en la sección más peligrosa, donde el mom. flector sea máximo. Calcule las reacciones y el diagrama de  $(M)$ .



O sea, la rotula plástica se forma en  $P \rightarrow$  cuando se forme cuando la sección se plastifica enteramente, esto quiere decir que aguanta el  $M_p$ .

$$\frac{8P}{6} \times 10^2 \text{ Kg. cm.} = M_p \rightarrow P = \frac{6 M_p}{8 \times 10^2}$$



$$M_p = F \cdot a = (\overbrace{10 \cdot 10}^{\text{Area.}}) \sigma_{Fe} \cdot 10$$

$$\text{Calculo } P_{\text{ultima}} \text{ en Kgs.} = 18.75$$

II) Calcular Púltima en la viga de la fig

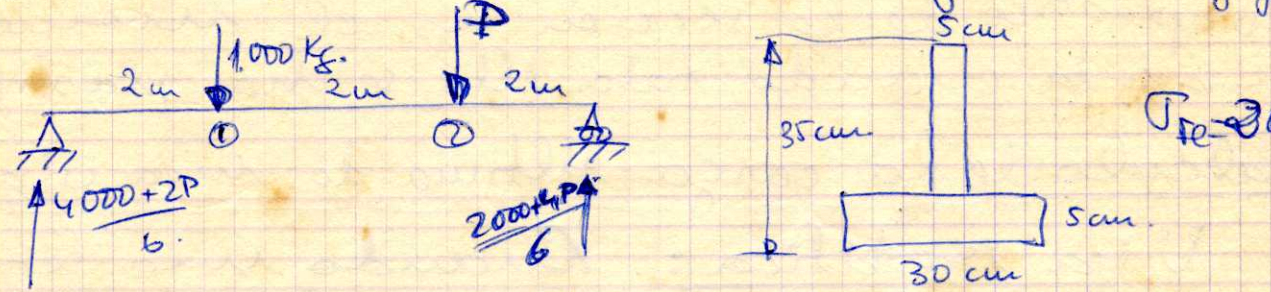
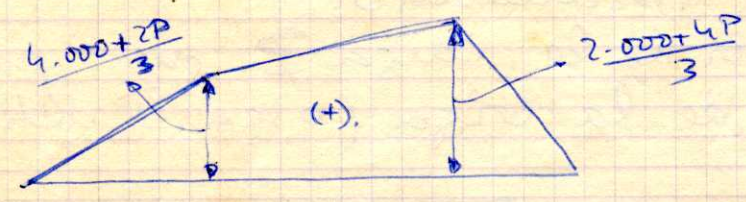


Diagrama de  $M$  para ver el mom. máximo



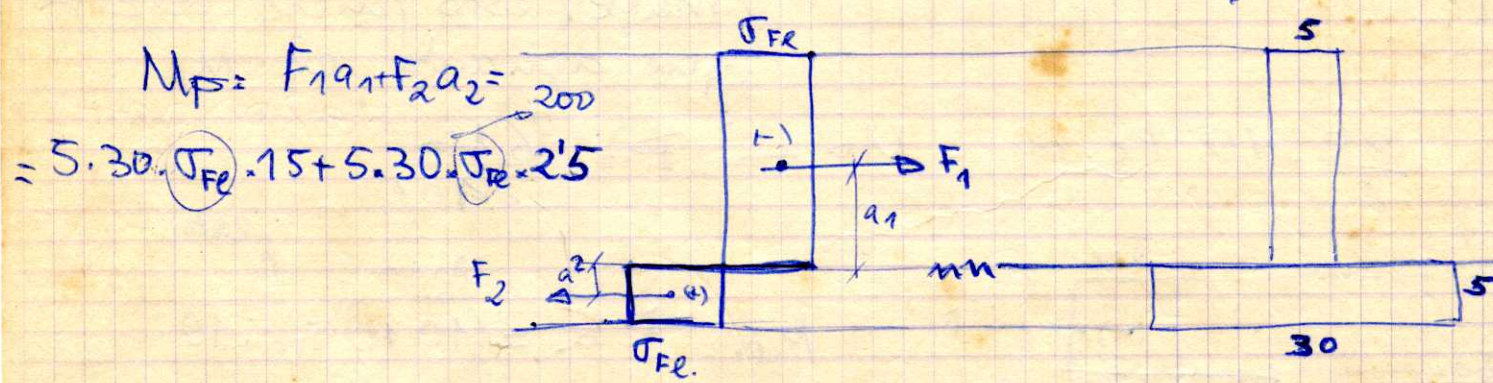
No sabemos cual es el máximo: ① o ②

Voy a calcular la Púlt. en el caso de que la rot. se forme en ① y en el caso de que sea en ② los dos tomaré el menor, porque es el mínimo que produce el derrumbamiento

①  $M_p = \frac{4000 + 2P_1}{3} \cdot 10^2$  para que la rot. se produzca

$$P_1 = \frac{3M_p - 4000 \cdot 10^2}{2 \times 10^2}$$

②:  $M_p = \frac{2000 + 4P_2}{3} \cdot 10^2 \rightarrow P_2 = \frac{3M_p - 2000 \times 10^2}{4 \times 10^2}$

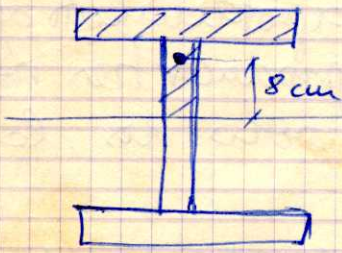


$$M_p = F_1 a_1 + F_2 a_2 = 5 \cdot 30 \cdot \sigma_{Fe} \cdot 15 + 5 \cdot 30 \cdot \sigma_{Fe} \cdot 2.5$$

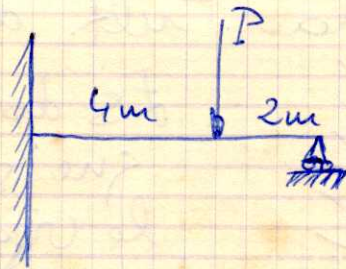
Devo a las dos expresiones  $P_1$  y  $P_2$  y veo cual es la menor; esa será la Púlt.

# Viga hiperestática:

(101)



$A = 200 \text{ cm}^2$   
 $\sigma_{Fe} = 200 \text{ Kg/cm}^2$



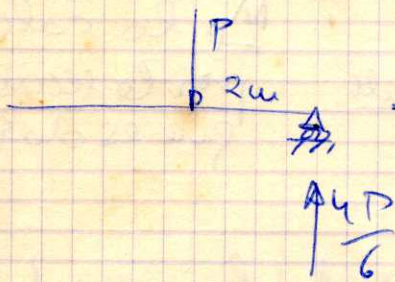
Simplymente hiperestática.

Si se produce una rótula plástica, la viga no se derrumba sino que se convierte en isostática. Para que se derrumbe hacen falta dos rótulas plásticas que se producirán en las dos secciones más peligrosas. La primera en P, la segunda en el empotramiento.

Por semejanza de  $\Delta$  saco  $y$ :



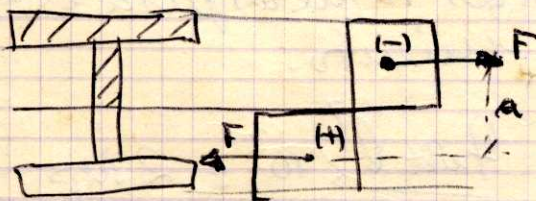
$$\frac{y}{M_p} = \frac{2}{6} \rightarrow y = \frac{M_p}{3}$$



Luego  $M_{p+y} = \frac{8P_{ult}}{6} \cdot 10^2$

$M_p + \frac{M_p}{3} = \frac{8P_{ult}}{6} \cdot 10^2 \rightarrow P_{ult}$

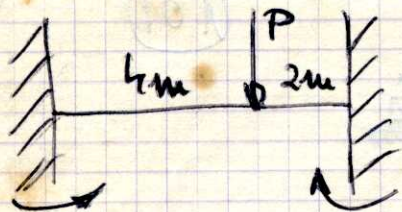
Vamos a calcular cuanto vale  $M_p$ :



$M_p = F \cdot a = 100 \sigma_{Fe} \cdot 16$



# Calcular la Pult. de la viga de la figura



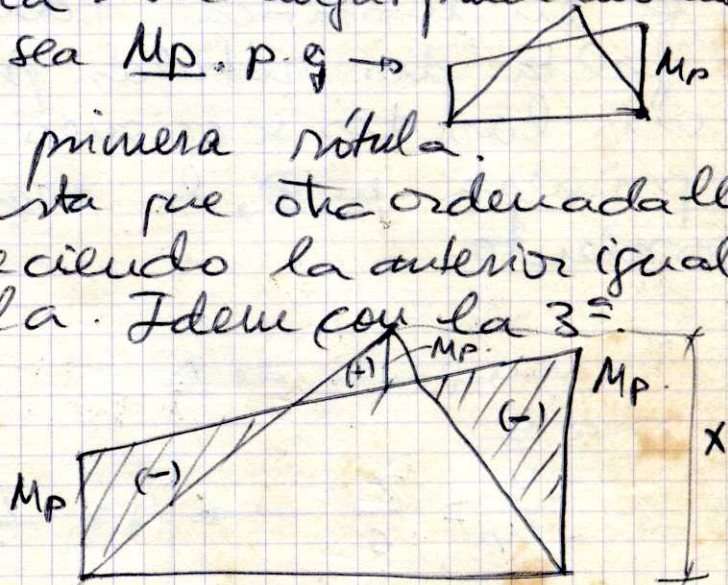
Es doblemente hiperestática. Para que se produzca el apotamiento de la viga se tienen que producir tres rótulas porque si se formarían solo dos, la viga se convertiría en isostática.



Si ninguna de estas tres ordenadas es  $M_p$ , no se forma rótula plástica. La carga  $P$  puede aumentar hasta que una ordenada sea  $M_p$ .

Entonces ya tenemos la primera rótula.  $P$  seguirá creciendo hasta que otra ordenada llegue a ser  $M_p$ , (permaneciendo la anterior igual) y se forme la 2ª rótula. Idem con la 3ª.

El diagrama final será →



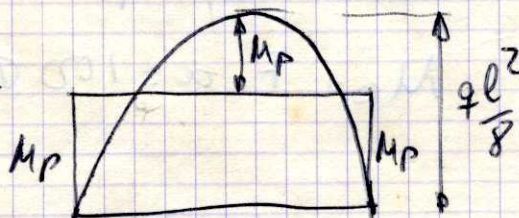
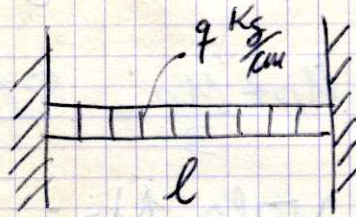
Hallo  $x$  de la misma forma que antes:  $x = \frac{8P}{6}$

$$\frac{8 P_{ult} \cdot 10^2 (Kg \cdot cm)}{6} = 2 M_p (Kg \cdot cm) \rightarrow P_{ult}$$

$M_p$  lo calculo por la sección que es dato

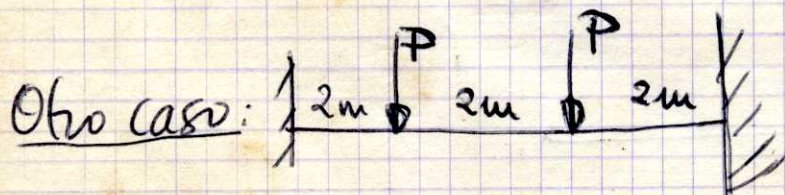
## Otro caso:

Calcular el valor de  $q$  que produce el apotamiento de la viga.

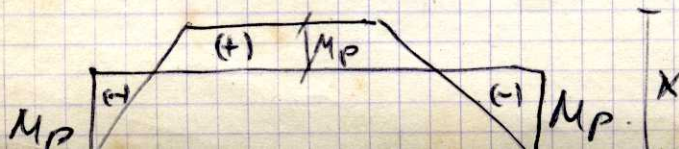


Doblemente hiperestática por tanto serían necesarias tres rótulas para el apotamiento.

$$\frac{q_{ult} l^2}{8} \cdot 10^2 = 2 M_p \rightarrow$$

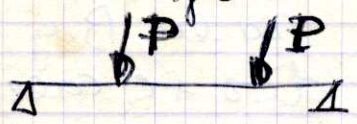


Doblemente hiperestática por tanto tres rótulas.



Toda la zona central, comprendida entre P-P, ha estado en fluencia.

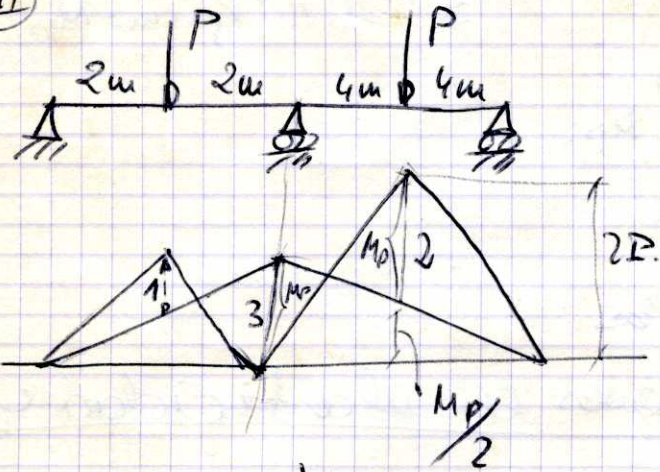
(102)



Hallamos  $x$ .  $x = 2P$ .

$$2P_{ult} \cdot 10^2 = 2M_p$$

(III)

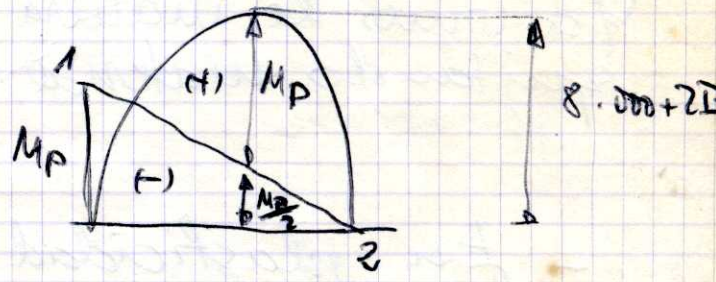
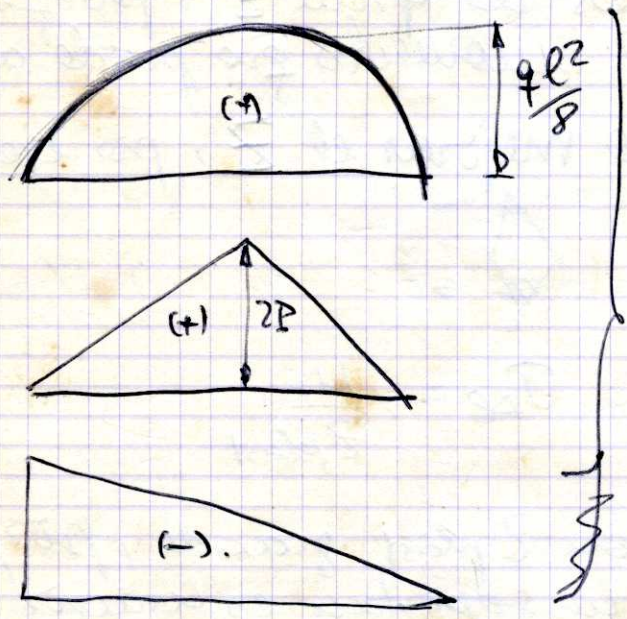
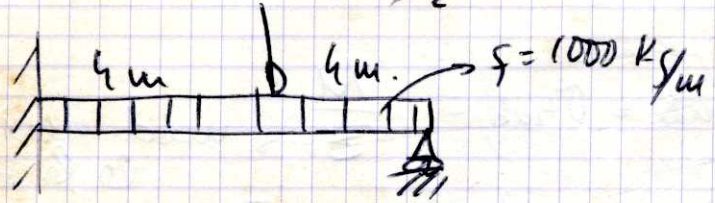


Simplemente hipostáticas, dos rótulas.

$1 < 2$  (siempre), luego en 1 no puede estar  $M_p$ . La otra será la 3.

$$2P_{ult} \cdot 10^2 = M_p + \frac{M_p}{2} = \frac{3}{2} M_p$$

(IV)

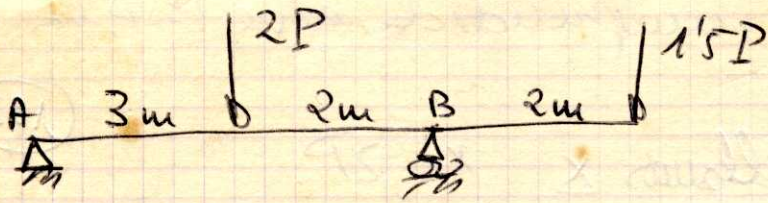


El máx. no sería en el pto. medio, sino en el que tuviera una tgente 11 1-2, pero aproximadamente podemos tomar el punto medio

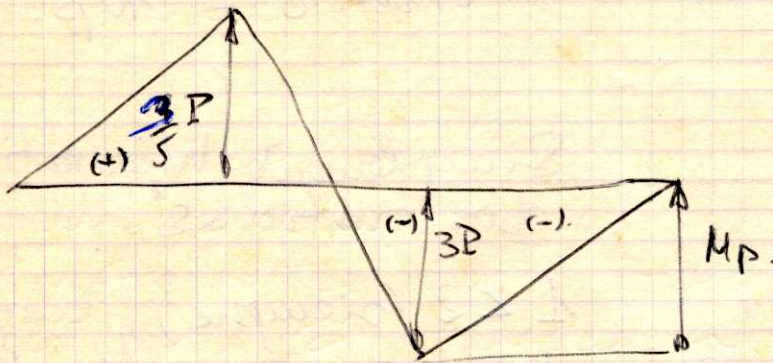
$$[8 \cdot 10000 + 2P_{ult}] \cdot 10^2 = M_p + \frac{M_p}{2} \rightarrow P_{ult}$$

(V)





La rótula se forma en B, y el voladizo se cae.



$$3 P \text{ ult. } 10^7 \text{ Kg} \cdot \text{cm} = M_p$$

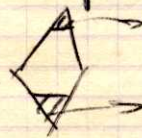
⑥ Pasa a las hojas sueltas:

Secciones más convenientes en elasticidad y en plasticidad:

- En elasticidad:  $(\sigma_{\max} = \sigma_{\text{trab}}) = \frac{M}{Z}$  → mod. resistente de la sección

Interesa tener secciones de gran  $Z$ , por qué para  $\sigma_{\text{trab}}$  dada, mayor es el momento que puede aguantar.

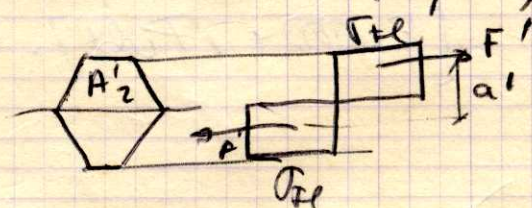
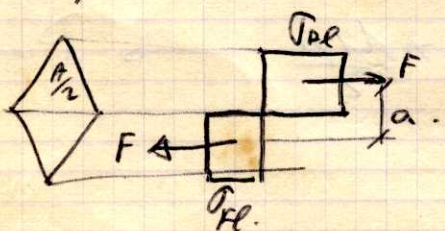
Ya vimos la manera de mejorar el  $Z$ , por ejemplo quitando material.



- En plasticidad:  $\sigma_{pe} = \frac{M_p}{Z_{\text{plast}}}$

Interesa secciones con  $Z_{\text{plast}}$  grande, por qué para  $\sigma_{pe}$  dada, el mom. que soportan es mayor cuanto mayor sea  $Z_p$ .

No interesa quitar material (área), por qué:



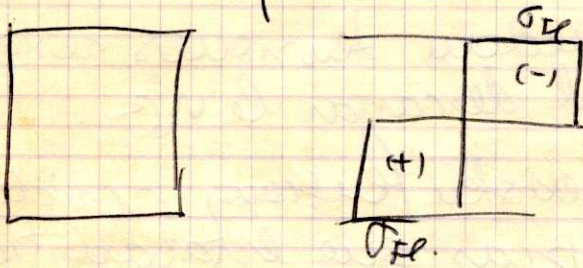
$$M_p = F \cdot a = \frac{A}{2} \sigma_{pe} \cdot a$$

$$M_p = F' \cdot a' = \frac{A'}{2} \sigma_{pe} \cdot a'$$

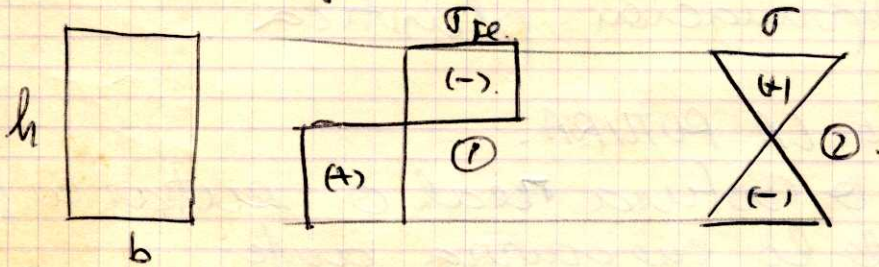
$$A > A' \quad a > a'$$

# Tensiones residuales en plasticidad:

Supongamos que esta sección se ha plastificado completamente.



Si a la viga le quitamos las cargas exteriores, la sección no tendría momento flector. → al descargarse la viga se descarga elásticamente, según este diagrama:

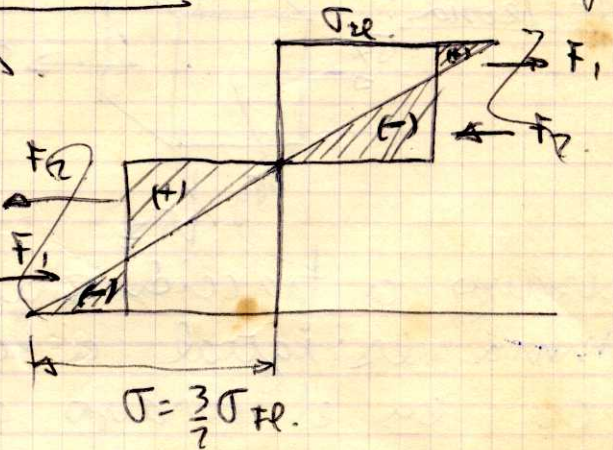


Para que la sección se quede sin momento, el momento de las tensiones tiene que ser nulo. Mom. de la dcha igual y de sentido contrario al. mom. de la l. dcha

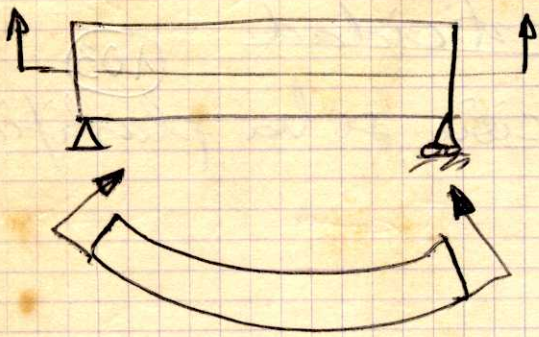
$$\begin{cases} \textcircled{1} & M_P = \sigma_{PP} \frac{1}{4} b h^2 \\ \textcircled{2} & M = \sigma \frac{1}{6} b h^2 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases}} \right\} \sigma = \frac{3}{2} \sigma_{PP} \quad (\text{pues } M_P = M)$$

Para ver las tensiones residuales vamos a superponer los dos diagramas.

El momento de las fuerzas de arriba respecto a la l.u. es contrarrestado por el momento de las de abajo.



Si a la viga le doy un corte por la l.u. que se curra pues ya existe un momento flector



Si no se hubiera plasticificado enteramente, ocurriría lo mismo, pues ya quedan tensiones residuales al descargar la viga.

La interpretación de porqué existen tensiones residuales es una sección es: las fibras que estaban trabajando dentro de la zona elástica, al descargar la viga tienden a volver a su estado inicial y tiran de las que estaban trabajando en la zona plástica, ya que estas últimas quedan con una deformación plástica.

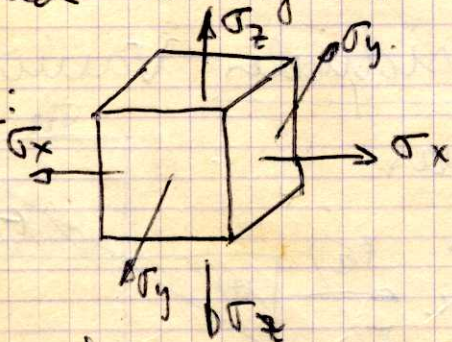
### TEORÍAS DE LA ROTURA.

Rotura: puede ser o rotura real o entrar en fluencia; depende de lo que ocurra antes.

Hay 4 teorías:

- 1) Atribuye la rotura a  $\sigma$  (la rotura se produce cuando  $\sigma$  alcanza un valor determinado)
- 2) La atribuye a  $\epsilon$  (deformación)  $\rightarrow$  se produce cuando  $\epsilon$  llega a un valor determinado.
- 3) A la  $\tau$
- 4) A la energía de deformación.

1ª Teoría:

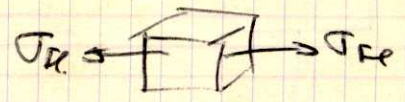
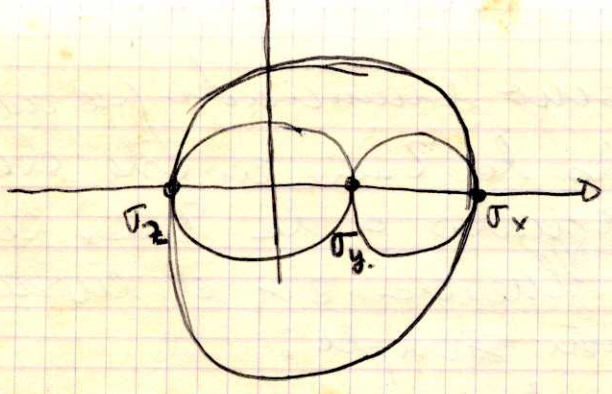


Se produce la rotura en un elemento cuando la tensión máxima en el elemento = tensión en el pto. de fluencia en el

ensayo a tracción simple, o cuando la tensión mínima es igual a la tensión en el pto. de fluencia en el ensayo a compresión simple

Voy a suponer  $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ . Los círculos de Mohr de elemento serán  $\rightarrow$

- Tomamos el elemento, le sometemos a tracción y simple y vemos cuanto vale la  $\sigma (= \sigma_{FE})$ .



- luego a compresión y vemos que la tensión es la  $\sigma'_{FE}$  a compresión.

La teoría de rotura nos dice que:  $\sigma_x = \sigma_{FE}$  (máxima)  
 $\sigma_z = \sigma'_{FE}$  (mínima)



Lo que ocurra antes, producirá la rotura.

2ª Teoría: la rotura se produce en el elemento cuando la deformación máxima de dicho elemento sea igual a la deformación en el punto de fluencia en el ensayo a tracción simple o cuando la deformación mínima sea igual a la deformación en el pto. de fluencia en el ensayo a compresión simple.

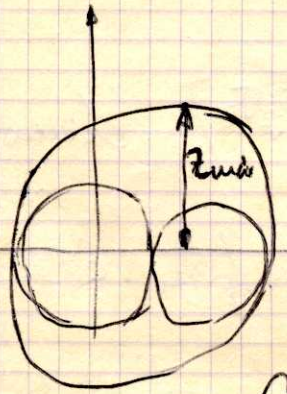
Mirando el círculo, la  $\epsilon$  max es según el eje x:  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

Por tanto  $\frac{\sigma_x}{E} = \gamma \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} = \frac{\sigma_{FE}}{E} \rightarrow$  defor. a traac. simple.  $-\gamma \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \right)$

El  $\epsilon$  mínimo:  $\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \gamma \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}; \frac{\sigma_z}{E} - \gamma \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} = \frac{\sigma'_{FE}}{E}$  (a comp)

3ª Teoría: la rotura en el elemento se produce cuando la tensión cortante máxima de dicho elemento sea igual a la tensión cortante máxima en el punto de fluencia en el ensayo a tracción simple.

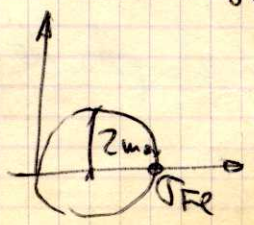
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$$



luego:  $\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_{FE}}{2}$

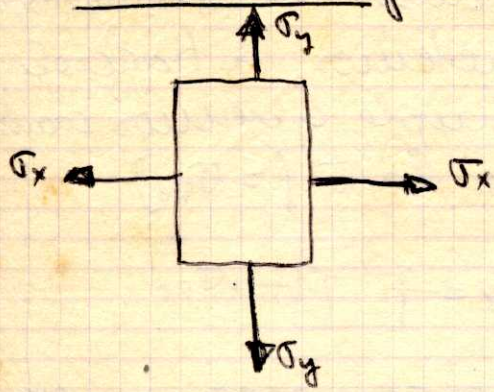
En el ensayo a tracción simple, la  $\tau_{max}$  vale:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{FE}}{2}$$

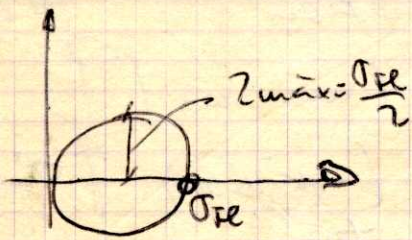


luego:  $\sigma_x - \sigma_z = \sigma_{FE}$

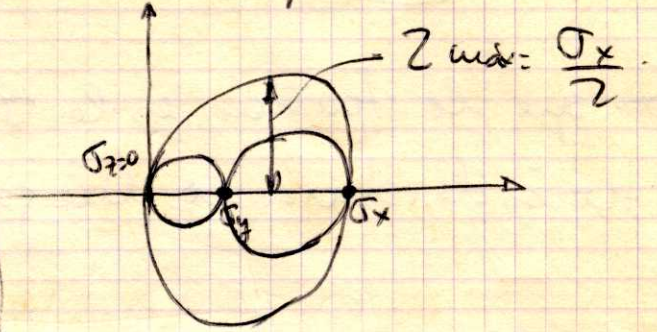
3ª Teoría para el estado doble de tensiones.



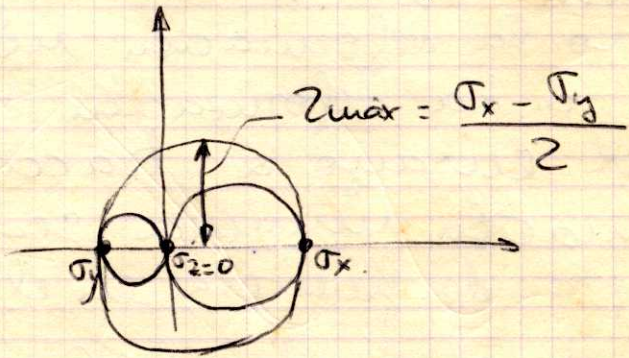
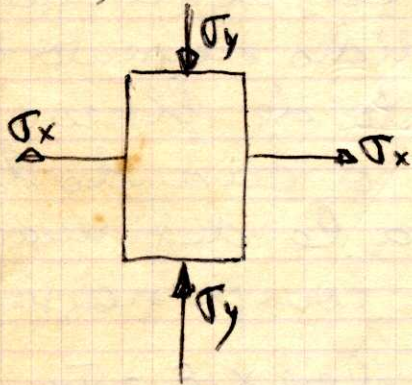
(Mismo enunciado que antes)  
 Calculo de  $\sigma_{máx}$  en este elemento y le igualo a la  $\sigma_{máx}$  en el pto de fluencia en el ensayo a tracción simple:



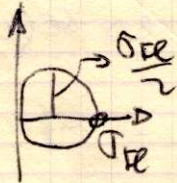
$$\boxed{\frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_{FE}}{2}}$$



b) Si una de las tensiones es a tracción y la otra a compresión



En el pto de fluencia:



$$\boxed{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_{FE}}{2}}$$

4ª Teoría: la rotura se produce en el elemento cuando la energía de deformación almacenada por dicho elemento sea igual a la energía que se almacenaría en el pto. de fluencia en el ensayo a tracción simple.

La fórmula de la energía es:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2] - \frac{1}{E} [\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z] \quad (\text{demostrado en...})$$

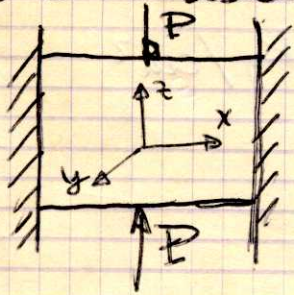
En el pto de fluencia  $\sigma_{FE}$   $\sigma_{FE}$

$$\boxed{U = U'}$$

$$U' = \frac{1}{2} \sigma_{FE} \cdot \epsilon = \frac{1}{2} \sigma_{FE} \cdot \frac{\sigma_{FE}}{E}$$

$$U' = \frac{1}{2E} \sigma_{FE}^2$$

• Ejemplo: Calcular  $P$  según las distintas teorías de la rotura, para que se rompa un elemento cúbico de arista unidad;  $\sigma_{Fe} = 2.500 \text{ Kg/cm}^2$   $\nu = 0.3$ .



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x + \sigma_z}{E}$$

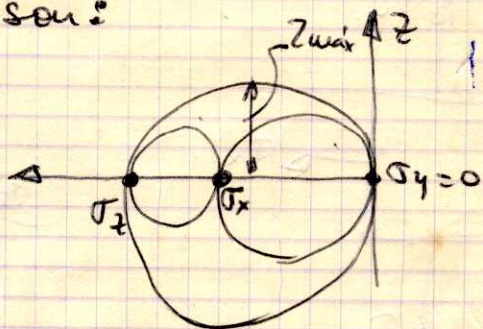
$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}$$

(105)

También se pide:  $\sigma_y = 0$   $\epsilon_x = 0$   $\sigma_z = -P$

Operando resulta  $\sigma_x = -\nu P$   $\sigma_y = 0$   $\sigma_z = -P$

Los círculos de Mohr son:



Según la 1ª teoría  $\sigma_z = \sigma_{Fe}$ ;  $-P = -2500$

Según la 2ª teoría  $\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} = \frac{\sigma_{Fe}}{E}$

$$-\frac{P}{E} + \nu \frac{\nu P}{E} = -\frac{2500}{E} \rightarrow P = \frac{2500}{1-\nu^2}$$

Según la 3ª teoría: la  $\tau_{max}$  (fig. de arriba):  $\tau_{max} = \frac{\sigma_z}{2} = \frac{P}{2}$

En el pto. de fluencia de tracc. simple  $\tau_{max} = \frac{\sigma_{Fe}}{2}$

$$\frac{P}{2} = \frac{2500}{2}$$

Según la 4ª teoría: La energía de deformación es:

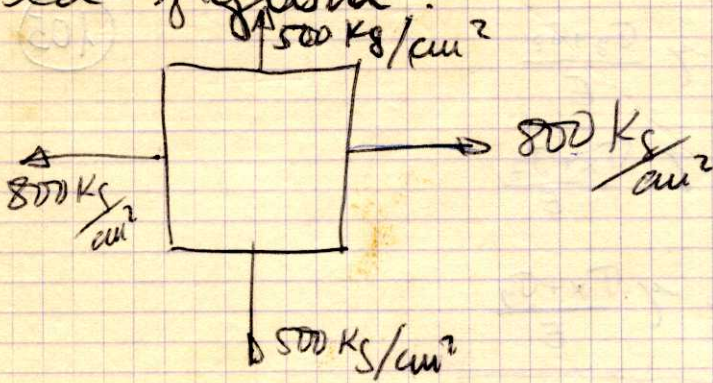
$$U = \frac{1}{2E} [(-\nu P)^2 + (-P)^2] - \frac{\nu}{E} [(-\nu P)(-P)] = \frac{1}{2E} (-2500)^2$$

de aquí despejo  $P$ .

Problema: calcular el coeficiente de seguridad segun las distintas teorias de la rotura, segun el cual se produciria la rotura en el elemento de la figura.

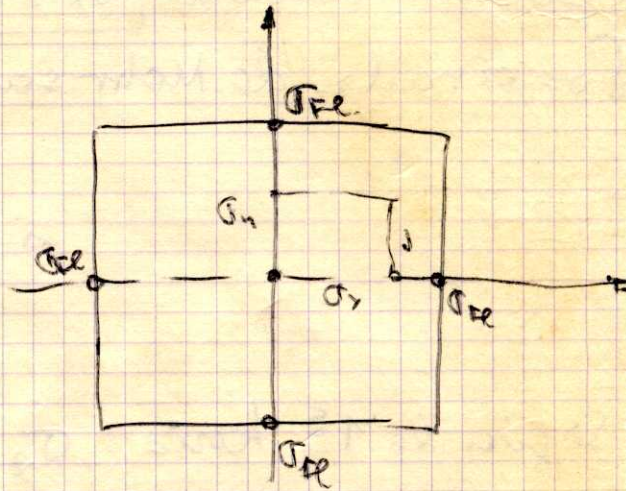
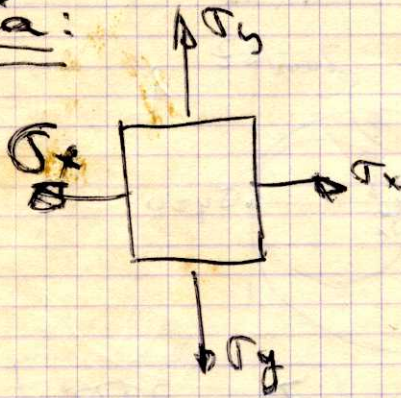
$$\sigma_{Fe} = 2000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\gamma = 0,4$$

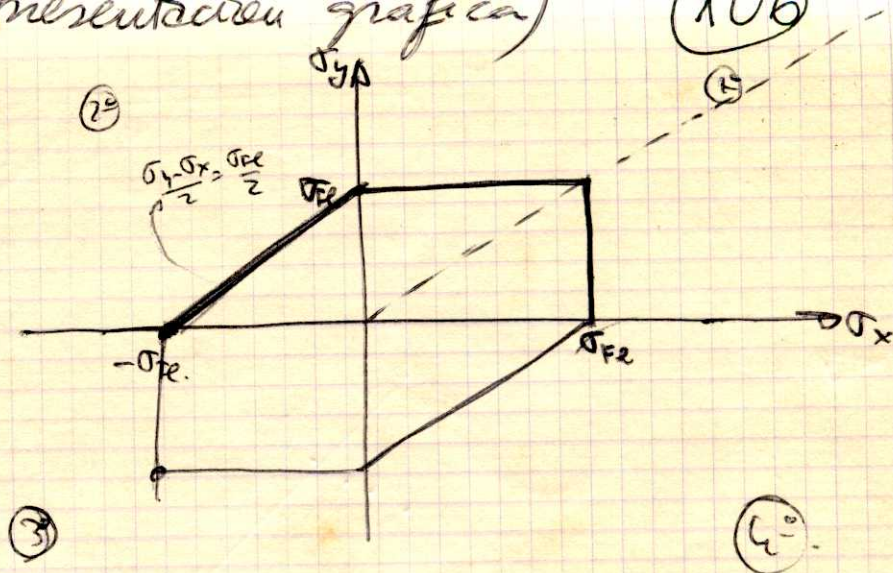
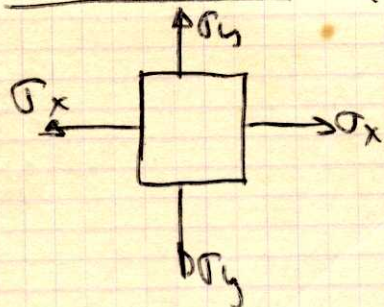


### REPRESENTACION GRAFICA

1ª Teoría:



3ª teoría. (Representación gráfica)



1º cuadrante  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$  (+)  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y > \sigma_x \rightarrow \sigma_y = \sigma_{Fl} \\ \sigma_x > \sigma_y \rightarrow \sigma_x = \sigma_{Fl} \end{array} \right.$  (del círculo de Mohr)

2º cuadrante  $\sigma_y > 0$   
 $\sigma_x < 0$

$z_{max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \frac{\sigma_{Fl}}{2}$  f.c. de una recta  $y-x = k$

Los otros dos cuadrantes, por simetría.

Resulta un exágono.

Si el punto representativo del estado de tensiones que actúa sobre el elemento cae dentro del exágono, en ese elemento no habría rotura según la 3ª teoría.

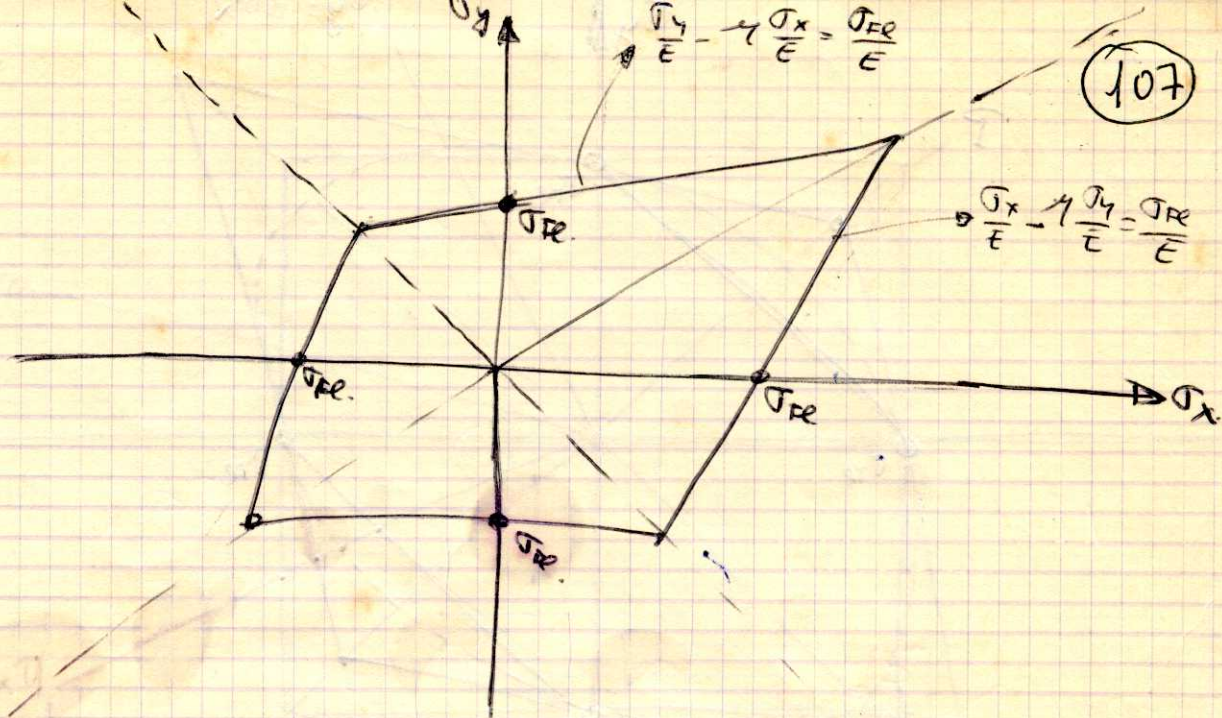
2ª teoría. (representación gráfica)

a) Supongamos  $\sigma_x > \sigma_y$   $\sigma_x$  (+). Da lo mismo que  $\sigma_y$  sea + o -

La máx. deformación:  $\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_{Fl}}{E}$  ocurre según  $\sigma$

Represento esta recta:

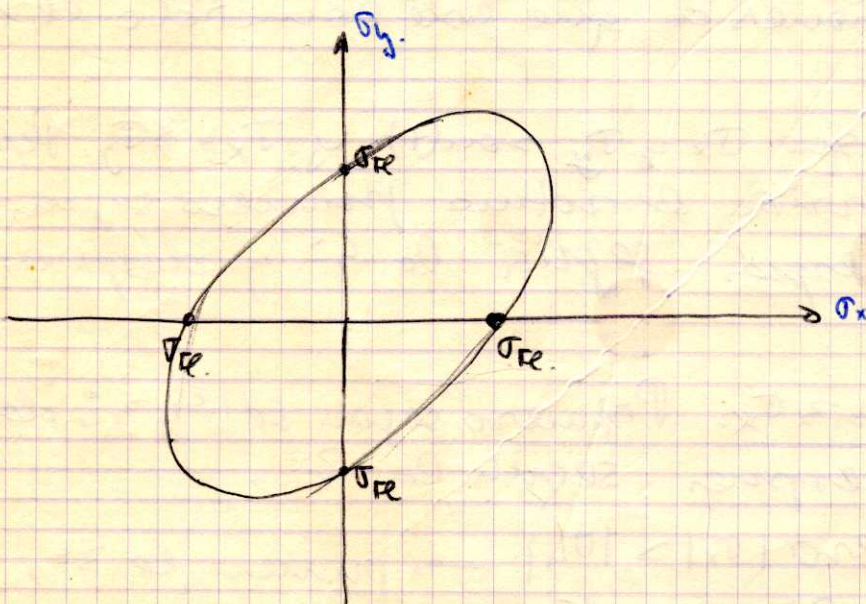
b)  $\sigma_y$  (+)  $> \sigma_x$ :  $\frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_{Fl}}{E}$ : la represento.



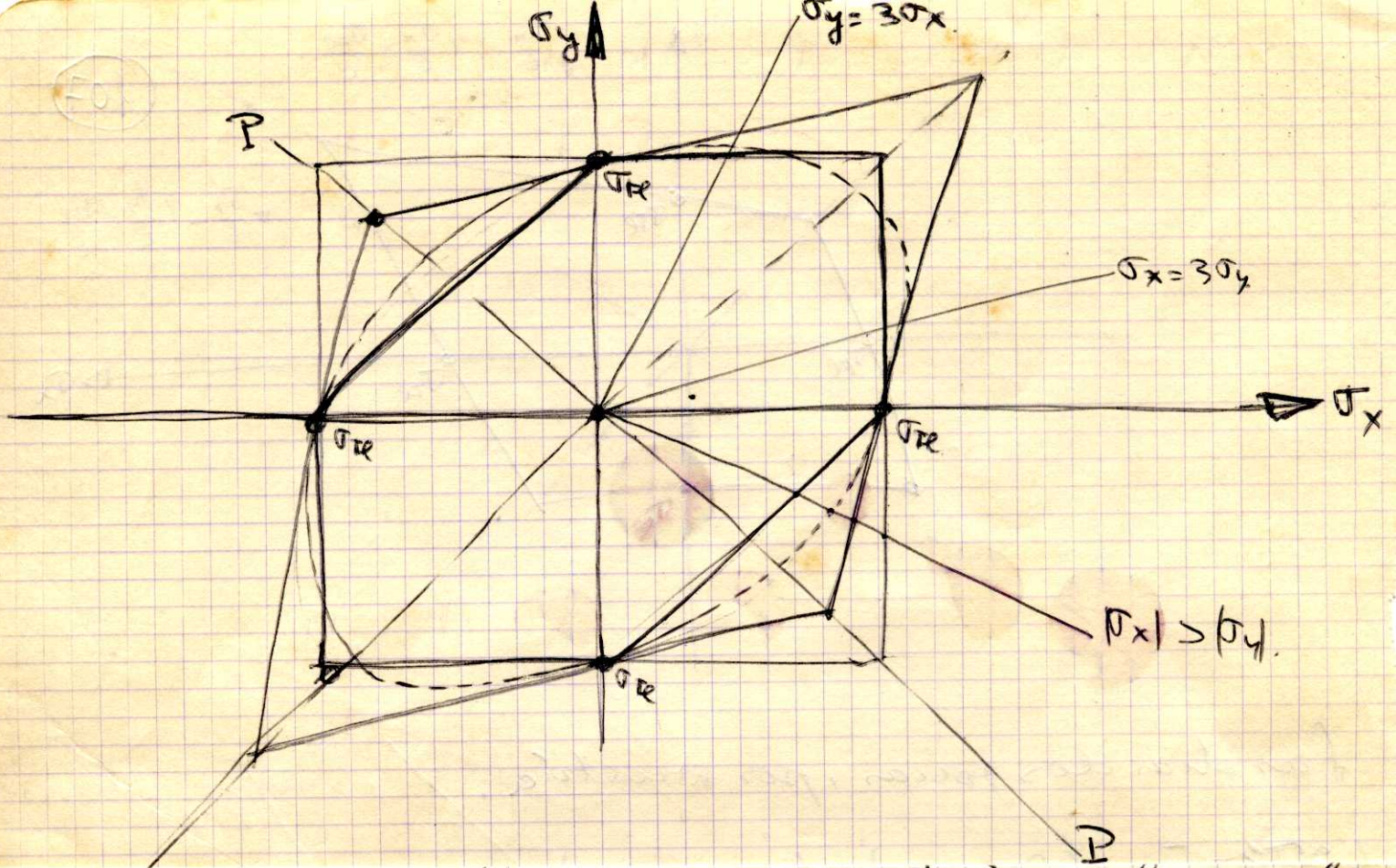
Las otras dos zonas, por simetría.

4ª Teoría (Representación gráfica)

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2] - \frac{\gamma}{E} (\sigma_x \sigma_y) = \frac{1}{2E} \sigma_{Re}^2. \text{ Es una elipse:}$$



Representación de las cuatro teorías:



¿Qué teoría es la más exigente? → depende del estado de tensiones a que esté sometido el elemento

Ejemplo: - Supongamos que  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son (+) y  $\sigma_x = 3\sigma_y$ . Representando esta recta - Ocurriría el rotura primero según la 1ª, 3ª teoría, después según la 4ª y después según la 2ª.

- Si es  $\sigma_x(+)$   $\sigma_y(+)$  y  $\sigma_y = 3\sigma_x$ . Primero según la 1ª y 3ª, después según la 4ª y después según la 2ª.

- Si  $\sigma_x(+)$  y  $\sigma_y(-)$  pero  $|\sigma_x| > |\sigma_y|$  → primero la 3ª, después la 4ª, la 2ª y la 1ª.

A la línea P-P se le llama línea de la tensión constante pura → el rotura se produce 1ª según la teoría III, después según la 4ª, la 2ª y la primera.

A la 1ª teoría de la rotura se le llama teoría de la tensión máxima o de la fatiga máxima la 2ª, de la deformación máxima.

La 3<sup>ª</sup>, de la tensión cortante máxima (108)

La 4<sup>ª</sup>, de la energía de def. máxima.

Para materiales dúctiles, por ejemplo acero, se suele aplicar la 3<sup>ª</sup> teoría de la rotura, porque es la que da mejores resultados. En materiales frágiles, p. ej. hormigón se suele aplicar la 1<sup>ª</sup> teoría de la rotura.

### TIPOS DE ROTURA en un material.

Un material puede ser dúctil o frágil. Es dúctil cuando la resistencia al deslizamiento es menor que la resistencia a la separación. Si ocurre lo contrario, al material se le llama frágil.

Los tipos de rotura pueden ser por deslizamiento o por separación.

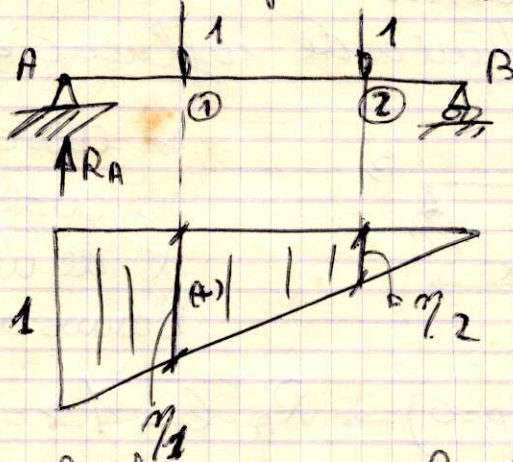
Definición: es un diagrama que da la variación de un cierto efecto en una sección cuando una causa unidad se traslada a lo largo de la estructura.

LÍNEAS DE FLUENCIA

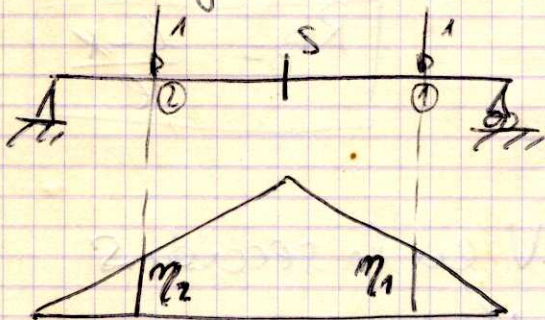
(108)

La carga unidad puede ser carga o momento aunque nosotros consideramos una carga unidad. El efecto en la sección puede ser  $N, V, \theta, \dots$  etc.

Ejemplos



El diagrama de la figura es la línea de influencia de la reacción en A. Decir esto equivale a que cuando la carga unidad esté en ① determina la ordenada  $\eta_1$ , en ② la  $\eta_2$  etc. ... dando como la reacción en A para las distintas posiciones de la carga unidad.



El diagrama de la fig. es la línea de influencia del mom. flector en S: representando los diferentes valores de  $M_s$  para distintas posiciones de la carga unidad.  $M_s = \eta_2$   $M_s = \eta_1$  etc. ...

Diferencia entre línea de influencia y diagrama de solicitaciones.

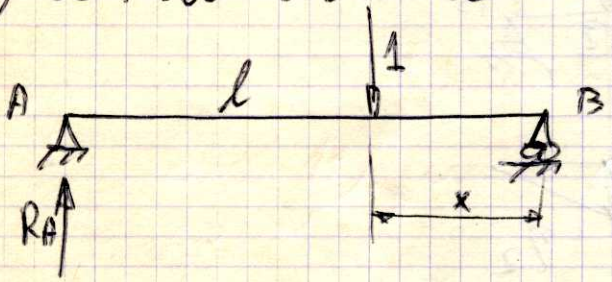
Línea de influencia	Diagrama de solicitaciones
Es creado por causa unidad	Creado por cualquier causa
Es para una sección dada.	Vale para todas las secciones
La causa unidad es móvil	Las causas son fijas

# MÉTODOS PARA DETERMINAR LINEAS DE INFLUENCIA.

- 1º) Método ANALÍTICO (casos isostáticos).
- 2º) " TRABAJOS VIRTUALES (sin interés)
- 3º) " TRABAJOS RECÍPROCOS (casos hiperestático)

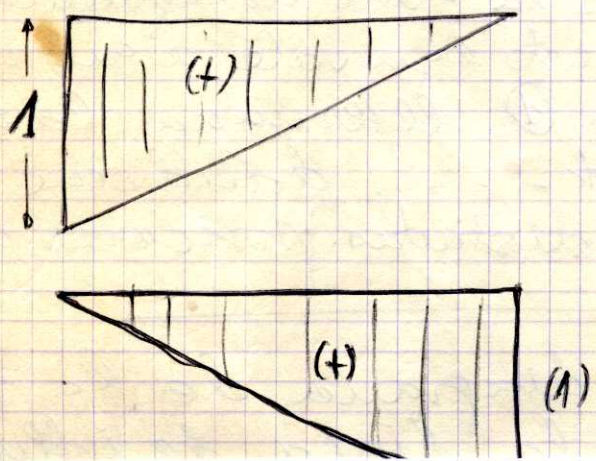
## ① MÉTODO ANALÍTICO

a) Determinar la línea de influencia de la reacción en B



Se coloca la carga unidad en cualquier sitio, a una distancia  $x$  de un apoyo. Vamos a calcular  $R_A = f(x)$

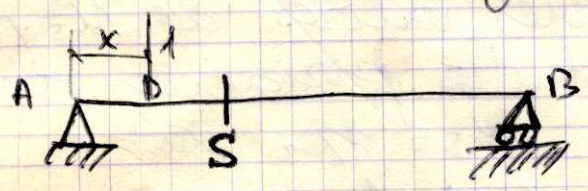
(p. ej, tomando  $\sum M_B = 0$ )  $\rightarrow R_A \cdot l - 1 \cdot x = 0$ ;  $R_A = \frac{x}{l}$



La línea de influencia de la reacción en B: poniendo  $R_B = f(x)$ .  $\sum M_A = 0$ .  $R_B \cdot l = 1(l - x)$

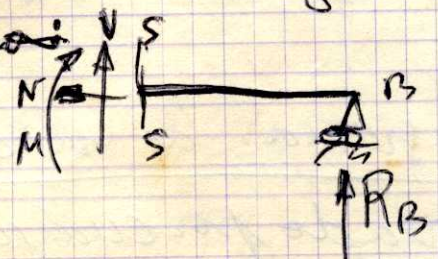
$R_B = \frac{l-x}{l}$

b) Línea de influencia del V en la sección S

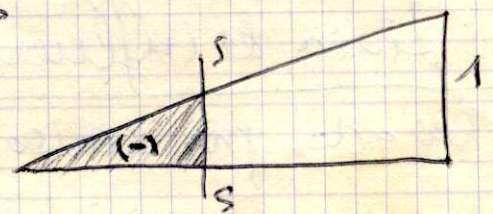


hipótesis:  
a) que la carga unidad se mueva a la izda de S.

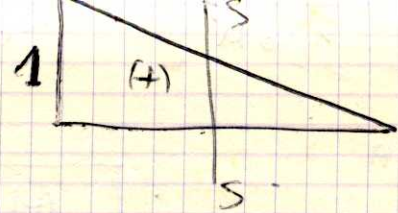
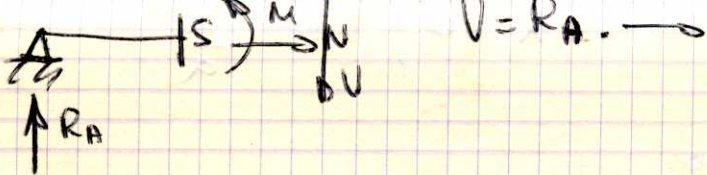
Cortamos la viga y vemos el equilibrio de la parte dcha:



$$V = -R_B$$

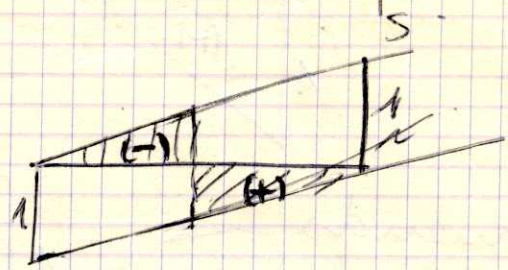


b2) La carga unidad se mueva a la dcha de S. Equilibrio de la parte izda  $\rightarrow$

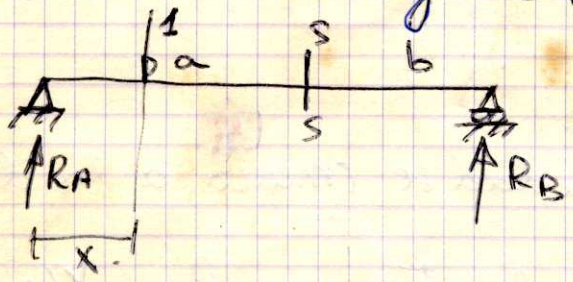


(109)

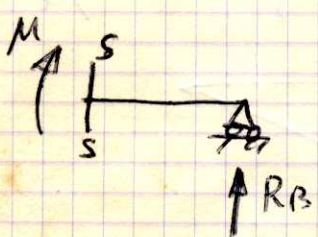
Superponiendo los dos:



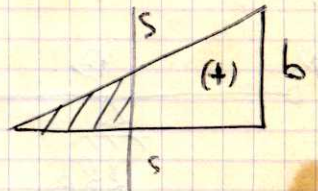
c) Línea de influencia del  $M$  en la sección  $S$



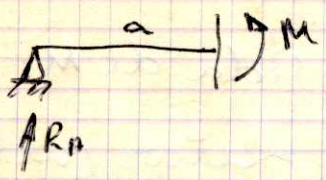
Hipótesis:  
1) Que 1 se mueva a la dcha  $\rightarrow$  equilibrio parte derecha.



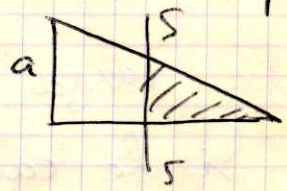
$$M = R_B \cdot b$$



2) Que 1 se mueva a la dcha  $\rightarrow$  equilibrio parte dcha.

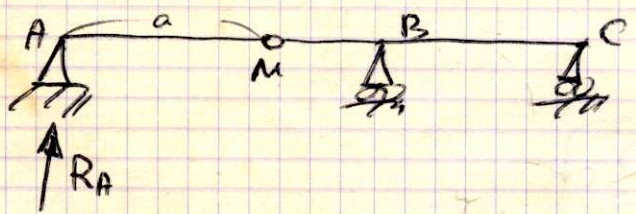


$$M = R_A \cdot a$$



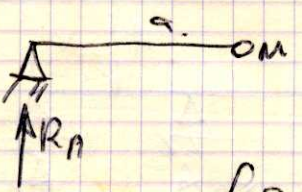
LÍNEAS DE INFLUENCIA EN VIGAS GERBER. (vigas continuas con tantas articulaciones como apoyos intermedios).

Línea de influencia de la reacción en A



Hipótesis:

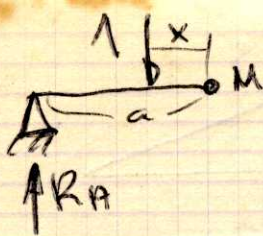
1) Que la carga unidad se mueva a la dcha de M.



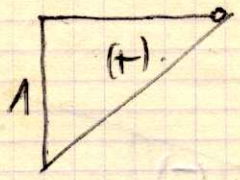
$$R_A \cdot a = 0 \rightarrow R_A = 0$$

Línea de influencia: de M  $\rightarrow$

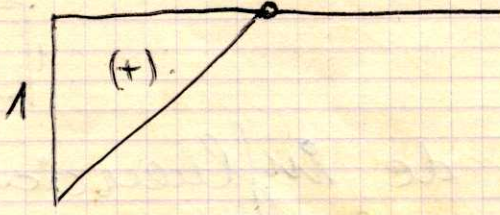
2) Que la carga unidad se mueva a la izda de M.



$$R_A \cdot a - 1 \cdot x = 0; R_A = \frac{x}{a}$$

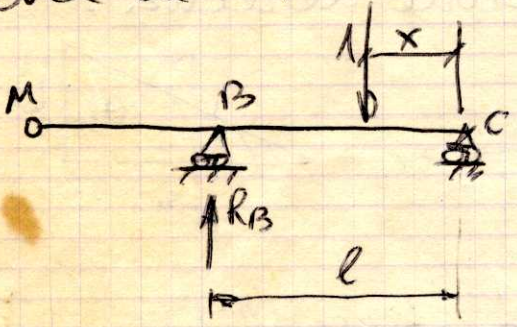


Comprimiendo →

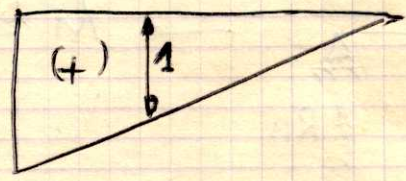


Línea de influencia de  $R_B$ :

1ª) Que la carga unidad se mueva a la derecha de M

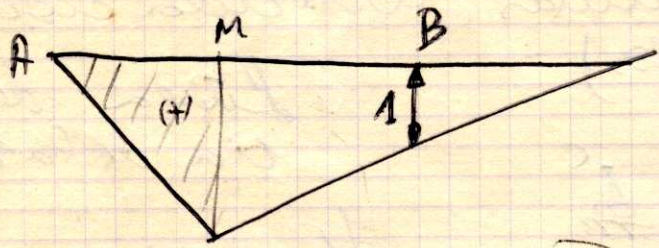


$$R_B \cdot l - 1 \cdot x = 0; R_B = x/l$$



2ª) La carga unidad se mueva a la izda de M:

Si la carga unidad está en A, vemos que  $R_B = 0$  porque  $R_A = 1$ , con lo que...



Línea de influencia de  $R_C$

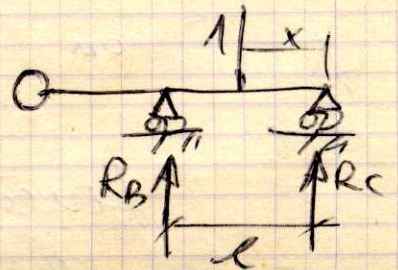
1ª) Que la carga unidad se mueva a la derecha de

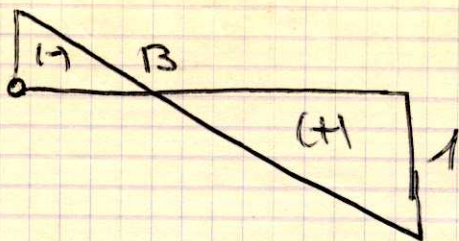
$$R_A \cdot a = 0 \quad R_A = 0$$

Esto equivale a lo siguiente viz.

$$R_C \cdot l - 1 \cdot (x - l) = 0 \quad R_C = \frac{l - x}{l} \rightarrow$$

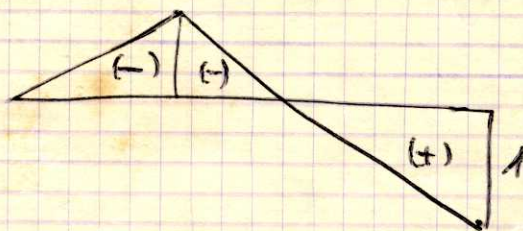
$$0 \quad l - x$$





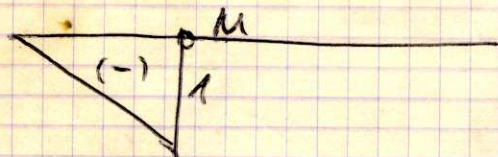
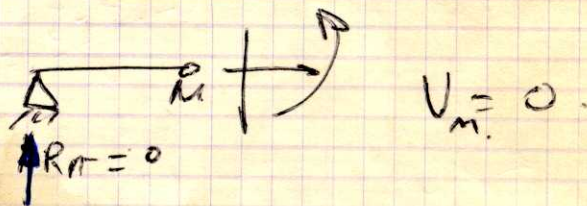
110

2º) La carga unidad se mueve a la izda. de M.  
 Si la  $P=1$  está en A  $\rightarrow R_A=0 \rightarrow R_C=0$ . Al pasar de A a M.

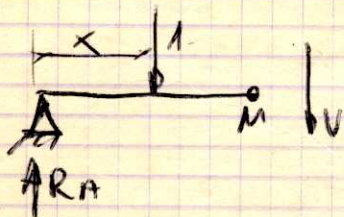


Línea de influencia del esfuerzo cortante en M:

1º) La  $P=1$  se mueve a la dcha de M.  
 $R_A \cdot a = 0 \rightarrow R_A = 0$ .

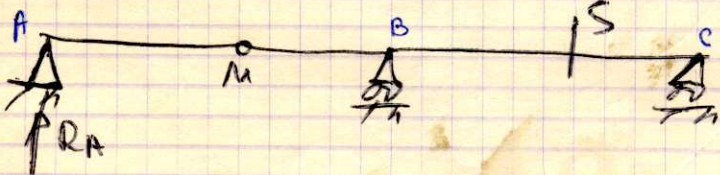


2º)  $P=1$  a la izda de M



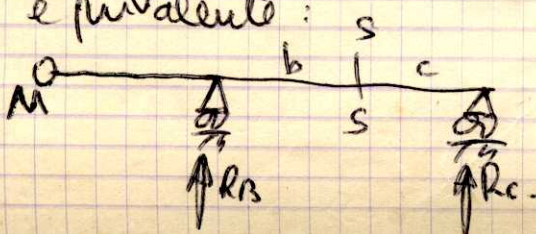
$$V \cdot a + 1 \cdot x = 0 \rightarrow V_M = -\frac{x}{a}$$

Línea de influencia del mom. flector en S:



1º)  $P=1$  a la dcha. de M  $\rightarrow R_A = 0$

Alge e. equivalente:



a). Carga unidad a la dcha de S.

# Línea de influencia de la reacción en C.

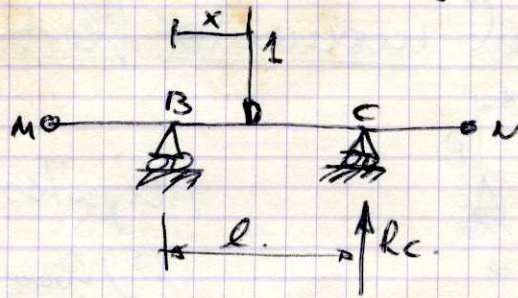
(111)



Hipótesis:

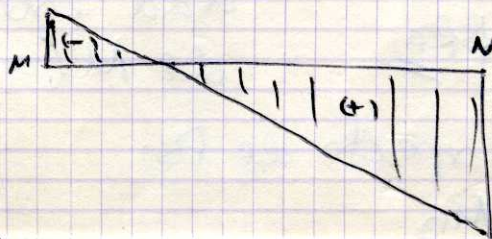
1º) Que la carga unidad se mueva entre M y N.

$R_A = 0$   
 $R_D = 0$  } Por tanto, la viga es equivalente a la siguiente:

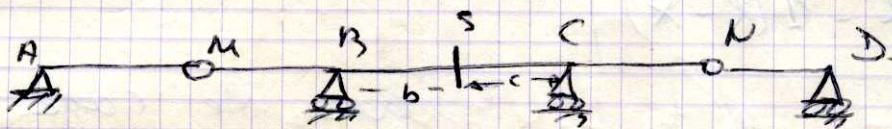


$$R_C \cdot l - 1 \cdot x = 0$$

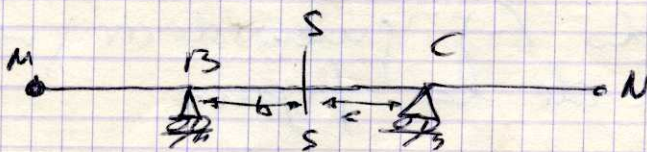
$$R_C = \frac{x}{l}$$



# Línea de influencia del momento flector en la sección S



Hipótesis: 1º) Que la carga unidad se mueva entre M y N. →  $R_A = 0$   
 $R_D = 0$  } Entonces, la viga sería:



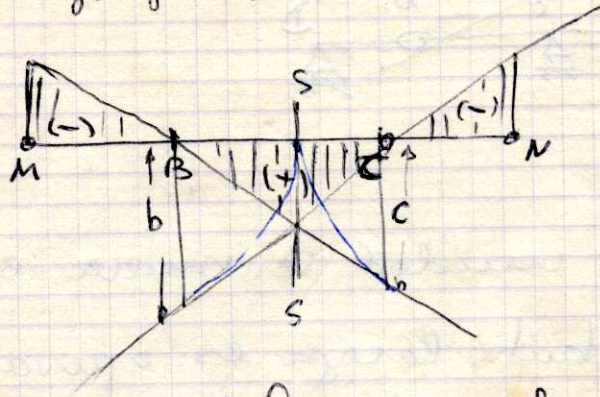
a) Que la carga unidad se mueva entre S y M:

$$M_S = R_C \cdot c$$

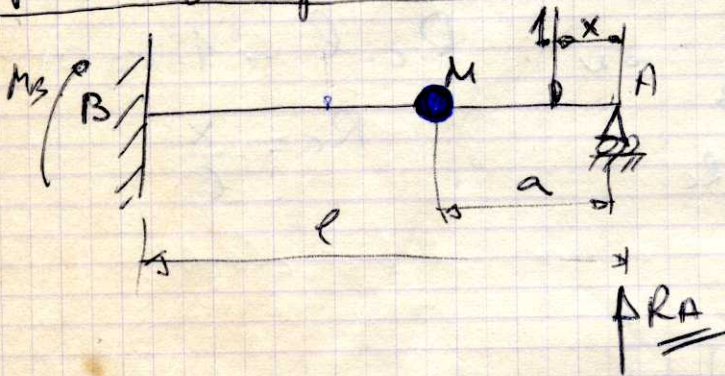
b) Que la carga unidad se mueva entre S y N:

$$\rightarrow \boxed{M_S = R_B \cdot b}$$

Representación gráfica:



Línea de influencia del momento flector en B:



Hipótesis:

1ª) Que la carga unidad esté a la derecha de M (a < x de A)

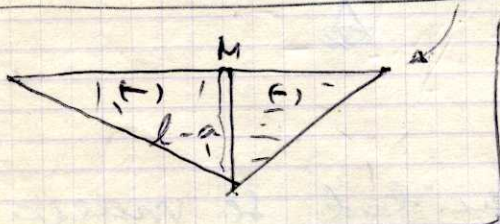
Tomando moments. respecto de B:

$$R_A \cdot l - 1(l-x) = M_B$$

Moments respecto de M:

$$R_A \cdot a - 1(a-x) = 0 \rightarrow \underline{R_A} \text{ y llevo arriba:}$$

$$\boxed{M_B = \frac{a-x}{a} l - 1(l-x)}$$



2ª) Que la carga unidad se mueva a la izquierda de M.

Entonces  $R_A = 0$ .

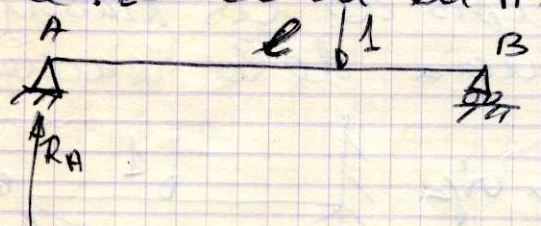
$$1 \cdot x + M_B = 0 \rightarrow \boxed{M_B = -x}$$

El que salga todo (-) quiere decir que  $M_B$  es de sent. contrario al de la figura

# II) PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES para determinar líneas de influencia. (112)

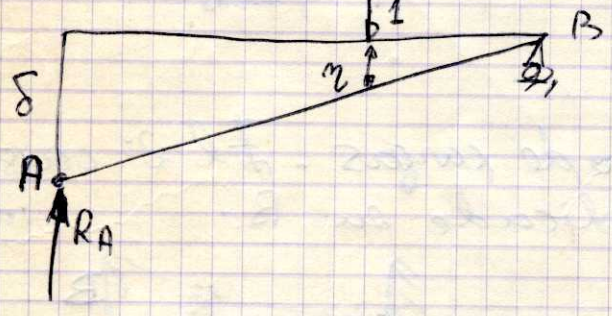
- Si a un sistema en equilibrio le damos un desplazamiento virtual diferencial, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores al sistema es nulo. Para aplicar este principio en la determinación de una línea de influencia, **darle** un despl. virtual al sistema tal que haga trabajar al efecto cuya línea de influencia quiero determinar.

Ejemplo. Determinar la línea de influencia de la reacción en A.



Carga unidad en cualquier posición. Se considera fuerza exterior (ídem  $R_A$ )

Dar un desplaz.  $\delta$  al apoyo A, para que trabaje  $R_A$ .



Trabajo de  $R_A$ .

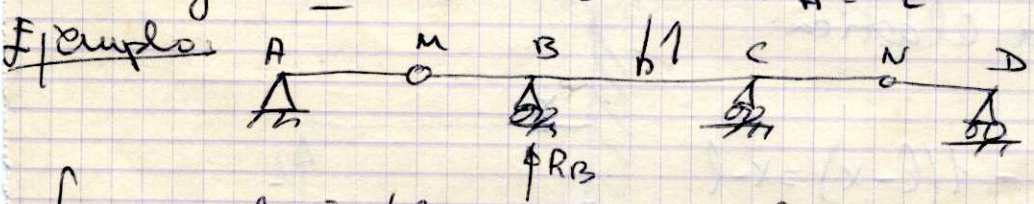
-  $R_A \cdot \delta$  (- porque  $\delta$  y  $R_A$  son de sent. contrario)

Trabajo de la carga unidad:

1.  $\eta$ .

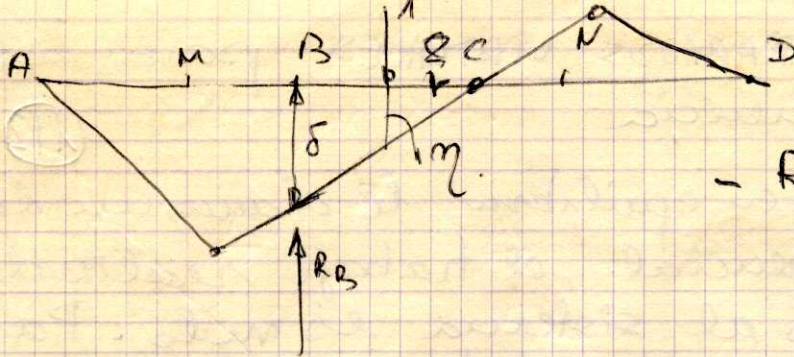
$$1 \cdot \eta - R_A \cdot \delta = 0 \rightarrow R_A = \frac{\eta}{\delta}$$

Si quiero que  $R_A$  venga medido por las ordenadas  $\eta$  le doy a  $\delta$  el valor 1.  $\rightarrow R_A = \eta$



Línea de influencia de la reacción en B.

Calculo  $R_B$  para una posición cualquiera de la carga unidad y le doy un desplazamiento  $\delta$  que le haga trabajar.



$$-R_B \cdot \delta + 1 \cdot \eta = 0$$

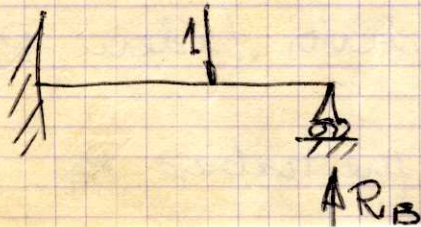
$$R_B = \frac{\eta}{\delta}$$

Puedo hacer  $\delta=1$  para que la reacción  $R_B$  venga dada directamente por las  $\eta$ .

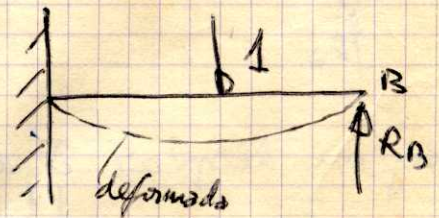
### III PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS RECÍPROCOS

[Enunciado y demostración en la lección X]

1.) Determinar por el principio de los trabajos recíprocos la línea de influencia de la reacción en B.

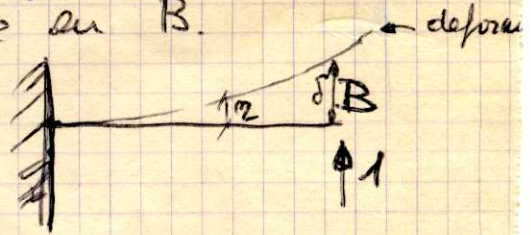


Considero otra viga



Y la considero como 1<sup>er</sup> estado de cargas. El 2<sup>o</sup> considero que es la carga unidad aplicada en B.

Aplico el ppo. de los trabajos recíprocos.



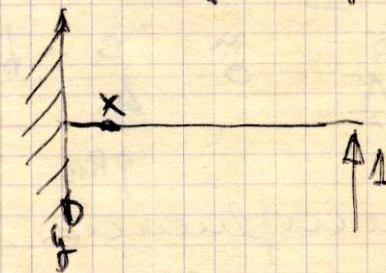
$$R_B \cdot \delta - 1 \cdot \eta = 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow R_B = \frac{\eta}{\delta}$$

$\eta \equiv$  ordenadas de la elástica de esa viga y  $\delta \equiv$  flecha en B.  
Voy a obtener la elástica:

$$EI_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -1(l-x) = x-l$$

$$EI_2 \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - lx + C_1$$

$$EI_2 y = \frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} + C_1 x + C_2$$



Para  $x=0$   $y=0 \rightarrow C_2 = 0$

Para  $x=0$   $\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow C_1 = 0$

$\eta$  son las ordenadas o sea  $\eta = y = \frac{1}{EI_2} \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right]$

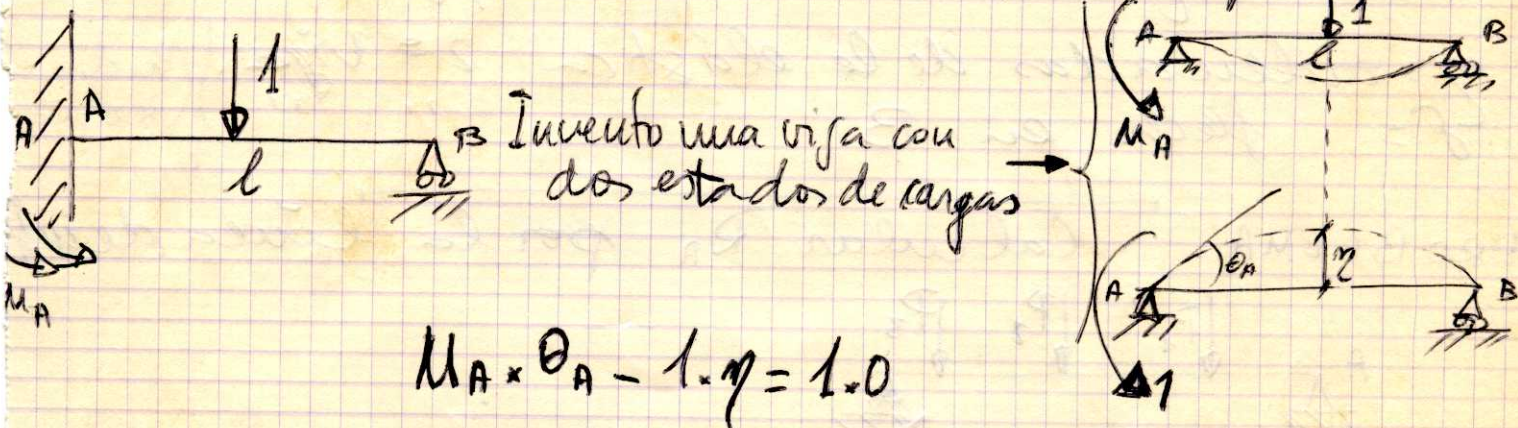
La  $\delta$  es el valor de  $y$  para  $x=l$ .

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} \right]$$

(113)

Llevo a  $R_B = \frac{M}{\delta}$  y calculo  $R_B = \psi(x)$

Ejemplo: Línea de influencia del mom. flector en A. por trabajos recíprocos.

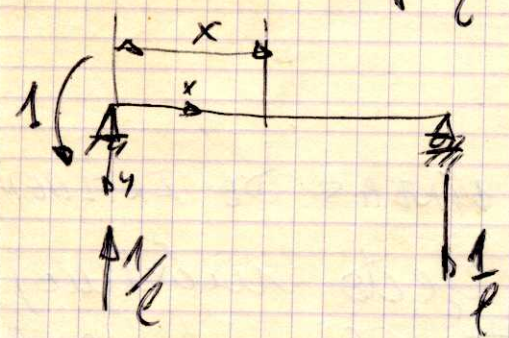


$$M_A \times \theta_A - 1 \cdot \eta = 1.0$$

$$M_A = \frac{\eta}{\theta_A}$$

$\eta$  = ordenadas de la elástica de la 2ª viga  
 $\theta_A$  = giro en A " " "

Se calculan  $\theta_A$  y  $\eta$  en función de  $x$ .



$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = 1 - \frac{x}{l}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = x - \frac{x^2}{2l} + C_1$$

$$EI y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2$$

Para  $x=0$   $y=0 \rightarrow C_2=0$   
 "  $x=l$   $y=0 \rightarrow C_1$

Como  $\eta = y$ .

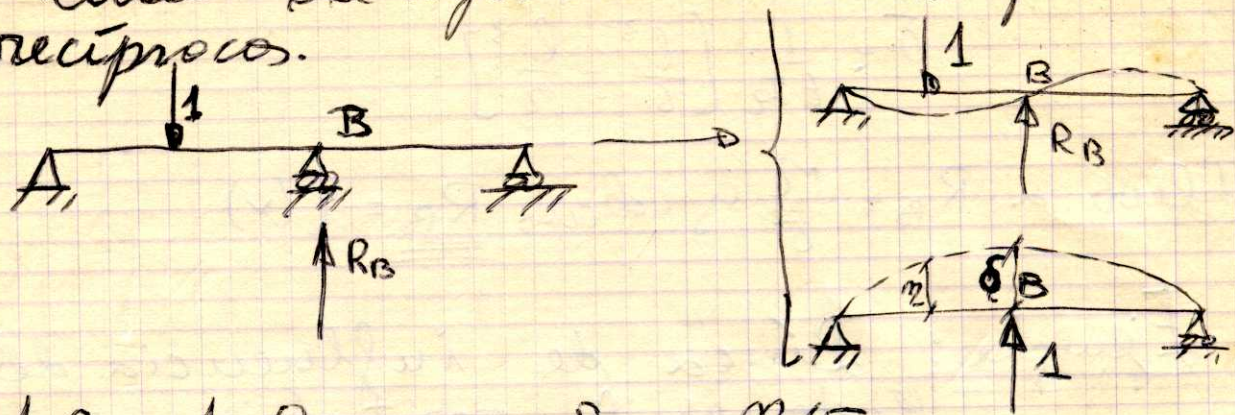
$$(1) \quad \eta = \frac{1}{EI} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} + C_1 x + C_2 \right]$$

$$\theta_A = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{C_1}{EI}$$

(2) Llevo (1) y (2) a  $M_A = \frac{\eta}{\theta_A}$

y calculo  $M_A = f(x)$ .

Ejemplo: líneas de influencia de  $R_B$  por trazo  
recíprocos.

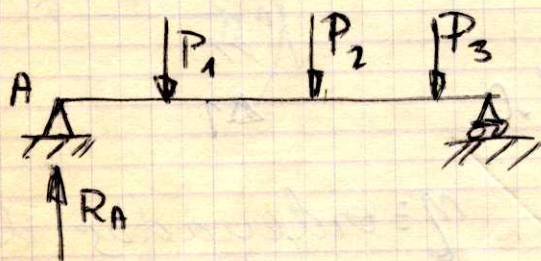


$$R_B \cdot \delta - 1 \cdot \eta = 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow R_B = \eta / \delta$$

$\eta$  = ordenadas de la elástica       $\delta$  = Viga. (Puedo en teoría)

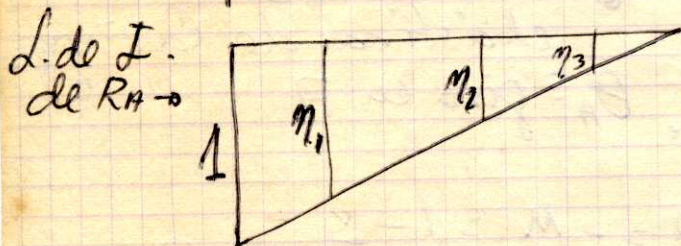
$\delta$  = flecha en B      " " " "

PROBLEMA. Calcular  $R_A$  por la línea de inf



$$R_A = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3$$

(por el ppo. de superposición)

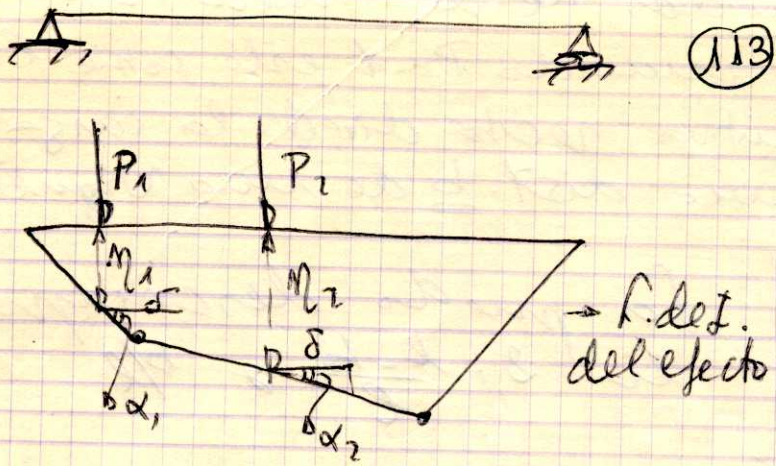


## TEOREMAS GENERALES DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

### 1er teorema (teorema del efecto máximo)

Si un tren de cargas se traslada a lo largo de una viga, el efecto en una sección es máximo cuando una de las cargas del tren pasa por uno de los vértices de la línea de influencia del efecto en esa sección.

Voy a suponer una posición tal del tren que ninguna de sus cargas pase por ningún vértice de la línea de influencia, y voy a demostrar que en este caso el efecto no puede ser máximo.



La dist. entre  $P_1$  y  $P_2$  permanece invariable y se trasladan hacia la derecha.

Para esta posición del tren, el efecto en la sección vale:

$$E = P_1 M_1 + P_2 M_2$$

$E$  es máx. si al trasladarse el tren  $\delta$  hacia la dcha es  $\Delta E (-)$  y dem hacia la izda.



Voy a trasladarlo  $\delta$  hacia la dcha y voy a ver cuanto vale el  $\Delta E$

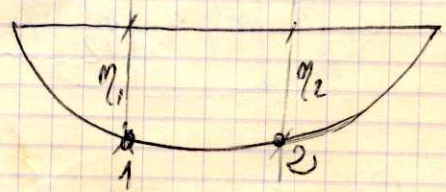
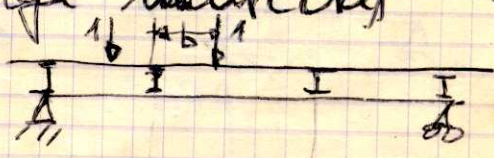
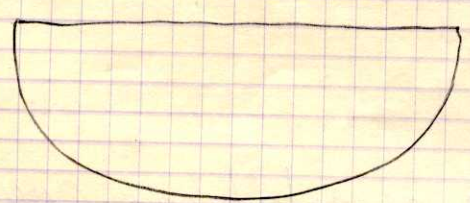
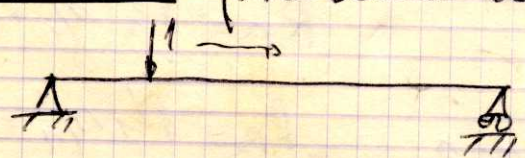
$$\Delta E = P_1 \Delta M_1 + P_2 \Delta M_2 = \underbrace{P_1 (\delta \tan \alpha_1)}_1 + \underbrace{P_2 (\delta \tan \alpha_2)}_2$$

Si me sale  $\Delta E (-)$ :

traslado el tren  $\delta$  hacia la izda (a partir de lo pos. primitiva) tendría la misma expresión, pero con signo contrario, o sea, positivo, o sea, el efecto no puede ser máximo.

> Si me sale  $\Delta E (+)$ , queda demostrado el teorema.

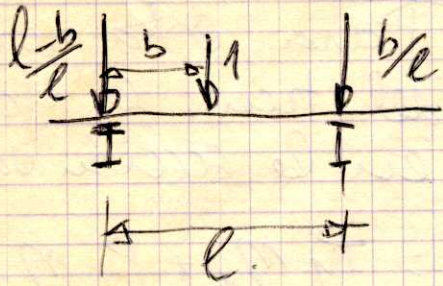
2º Teorema (Teorema de la carga indirecta) - No.



Sobre la viga coloco otra y la carga unidad se mueve sobre esta

$\eta_1$  y  $\eta_2$  serán ordenadas de la nueva L. de I. que busco, porque cuando  $P=1$  esté sobre las viguetas, la viga primitiva recibe direct. la carga.

- Cuando  $1$  esté a una dist.  $b$  de una vigueta.

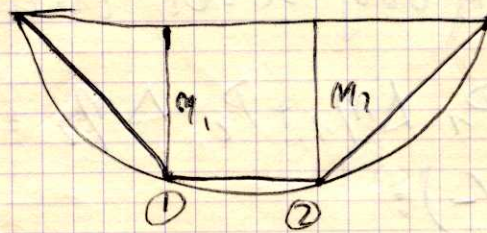


La puedo descomponer en 2:  $\frac{l-b}{l}$  y  $\frac{b}{l}$

La ordenada de la nueva línea de influencia (cuando  $1$  esté ahí) será:

$$E = \frac{l-b}{l} \eta_1 + \frac{b}{l} \eta_2 \quad (\text{Función lineal de } b)$$

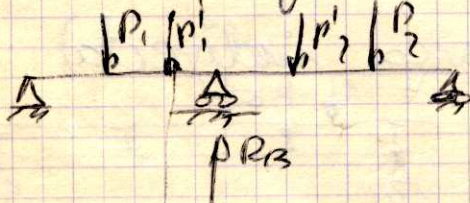
Por tanto, la línea de influencia varía linealmente entre los pts. 1 y 2.



PARA QUE SIRVE UNA L. de I.

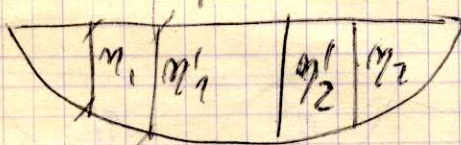
1.) Para calcular efectos máximos en el caso de cargas móviles

2.) Para calcular un efecto bajo distintas condiciones de carga



$$R_{B3} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2$$

$$R_{B3} = P_1' \eta_1' + P_2' \eta_2'$$



L. de I. de  $R_{B3}$

3.) Resolver estructuras hiperestáticas complicadas sometidas a gran n.º de cargas

Pregunta de examen - Hablar sobre líneas de influencia

(114)

a) Definición

b) Diferencia entre líneas influencia - diag. solicitaciones

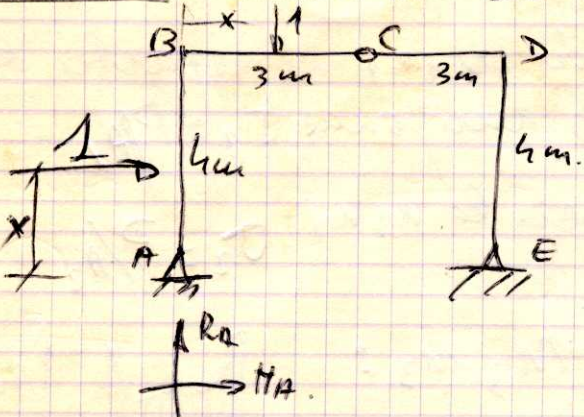
c) Métodos para determinar líneas de influencia

(poner ejemplo de cada uno)

d) Teoremas generales

e) Para qué sirve una línea de influencia.

PROBLEMA I. de I. de la Reacc. horiz. en A:

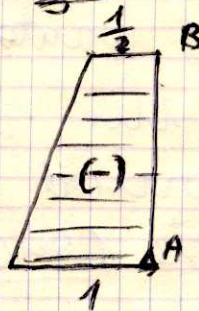


1º) Supongo  $P$  entre A y B

$$\begin{cases} M_C = 0 & R_A \cdot 3 - H_A \cdot 4 - P(4-x) = 0 \\ \sum M_E = 0 & R_A \cdot 6 + P \cdot x = 0 \\ & R_A = -\frac{P}{6} \end{cases}$$

$$H_A = \frac{P}{8} - 1$$

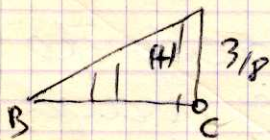
llevo arriba y calculo  $H_A$



2º) Cuando  $P$  entre B y C:

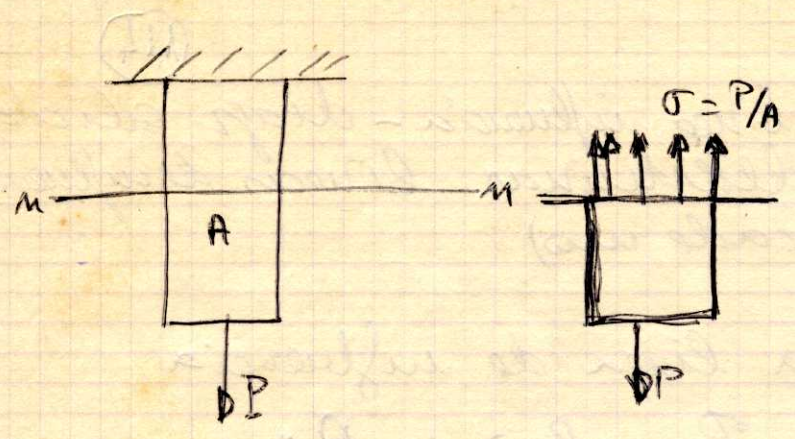
$$\begin{cases} M_C = 0 & R_A \cdot 3 - H_A \cdot 4 - P(3-x) = 0 \\ \sum M_E = 0 & R_A \cdot 6 - P(6-x) = 0 \end{cases}$$

$$H_A = \frac{P}{8}$$

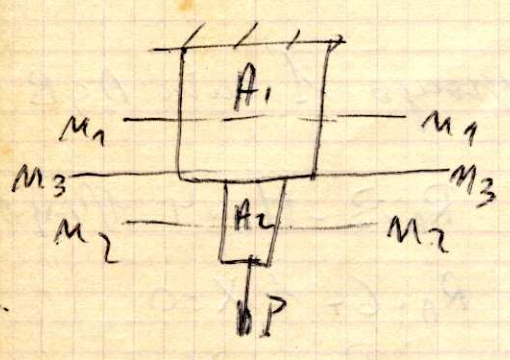


3º) Idem cuando  $P$  entre C y D  $\rightarrow$  todo igual.

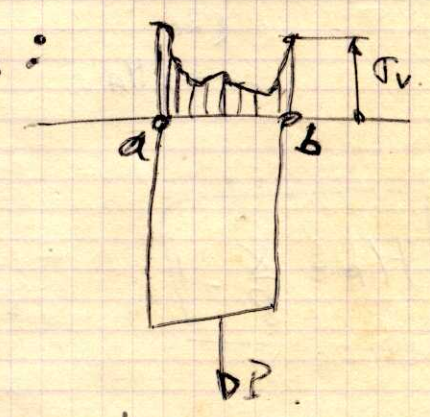
# CONCENTRACIÓN DE TENSIONES



Como  $\sigma = E\epsilon$  y todas las fibras tienen el mismo  $\epsilon$ , el  $\sigma$  es de reparto uniforme



- En la sección  $n_1 n_1$  el reparto de tensiones es uniforme  $\sigma_1 = P/A_1$
- Idem en la  $n_2 n_2$   $\sigma_2 = P/A_2$
- En la  $n_3 n_3$ :



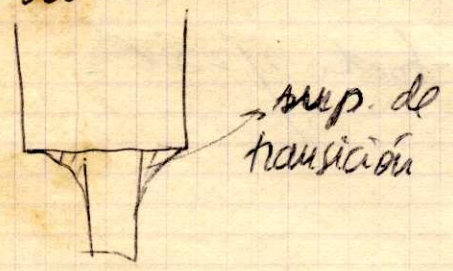
Solo sabemos que la tensión máxima es en los puntos **a y b**

Siempre que hay un reparto de tensiones anormal como esto, dire que existe concentración de tensiones.

Si a lo máx. le llamo  $\sigma_v$  (verdadera).

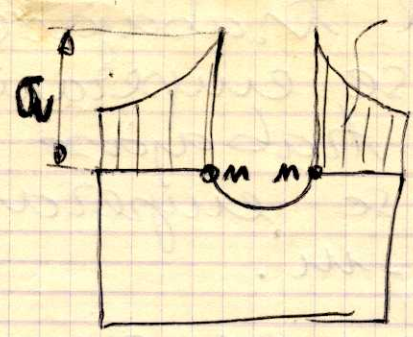
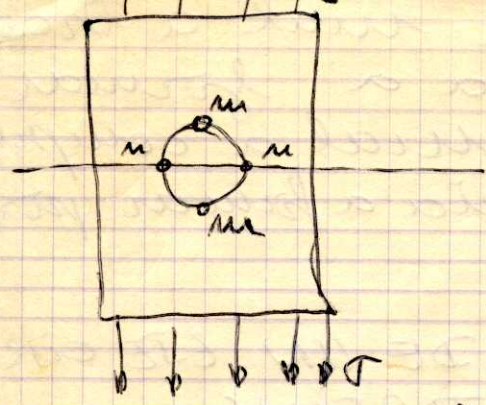
se cumple:  $\sigma_v = K \frac{P}{A_2}$   $K \equiv$  coef. de concentración de tensiones

Para atenuar esa concentración de tensiones hay que procurar que no haya cambio brusco de sección, con superficies de transición.



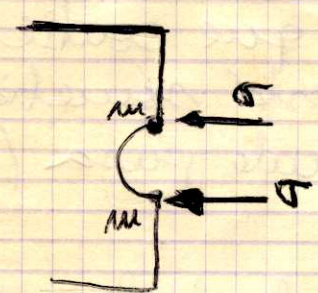
El K se puede obtener experimentalmente.

Otro caso de concentración de tensiones: placa con un agujero: con un agujero

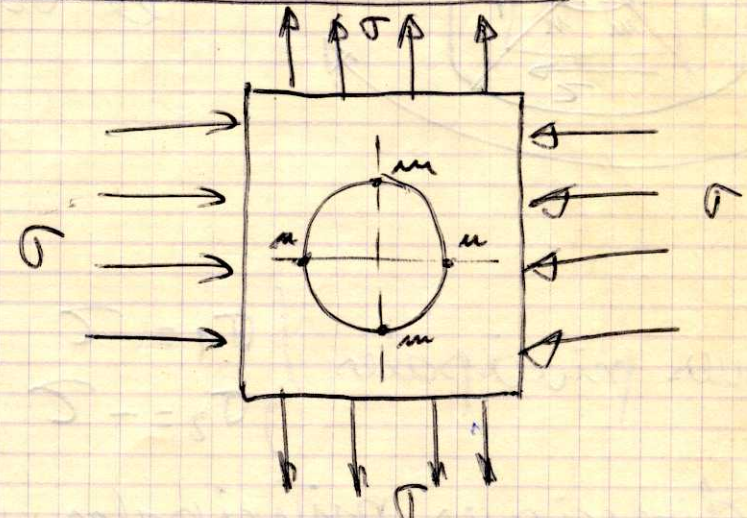
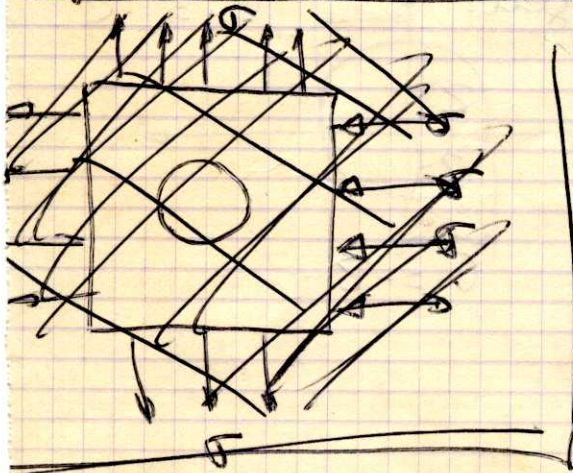


Línea n-n de  $\sigma$ .  
 $\sigma_v = k \cdot \sigma$  en este caso  $k = 3$ .  
 $\sigma_v = 3\sigma$

En los pts  $m-m$  aparece una tensión  $\sigma$  a compresión.



Ejemplos de concentración de tensiones:



Vamos a calcular las tensiones en los puntos  $m-m$  y  $n-n$ .

En  $m-n$   $\left\{ \begin{array}{l} 3\sigma + \sigma = 4\sigma \\ \downarrow \\ \text{debida a la tracción.} \end{array} \right.$

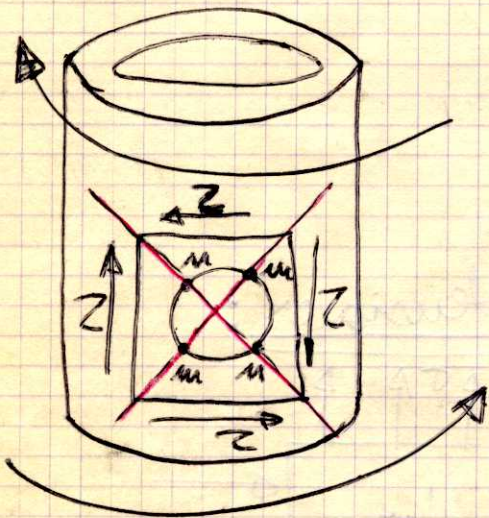
En los puntos  $m-m$   $\left\{ \begin{array}{l} -3\sigma - \sigma = -4\sigma \\ \downarrow \\ \text{negativa por ser a compresión} \end{array} \right.$

Luego  $k=4$  para los puntos  $m-m$

Si el material trabajase mal a tracción la grieta se empezaría a formar por m-m y si trabajase mal a compresión la grieta se empezaría a formar por los puntos m-m.

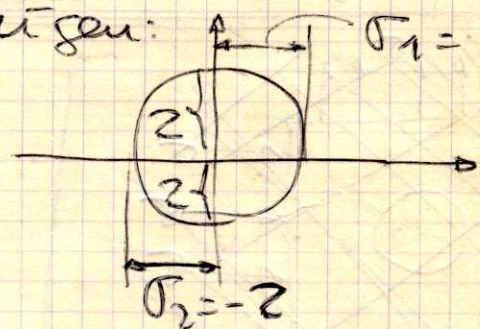
### TENSIONES EN UN AGUJERO DE UN EJE CIRCULAR HUECO SOMETIDO A TORSION.

Tenemos un cilindro circular hueco con un agujero



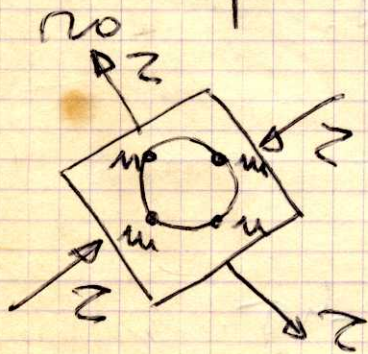
El elemento que contiene al agujero está sometido a tensión cortante pura (vista en torsión)

El círculo de Mohr de este elemento tiene centro en el origen:



Tensiones principales  $\begin{cases} \sigma_1 = \tau \\ \sigma_2 = -\tau \end{cases}$

Las direcciones principales van a  $45^\circ$  (líneas n-n y m-m). Voy a aislar un elemento sometido a las tensiones principales y que contenga al agujero



En los puntos m y n:

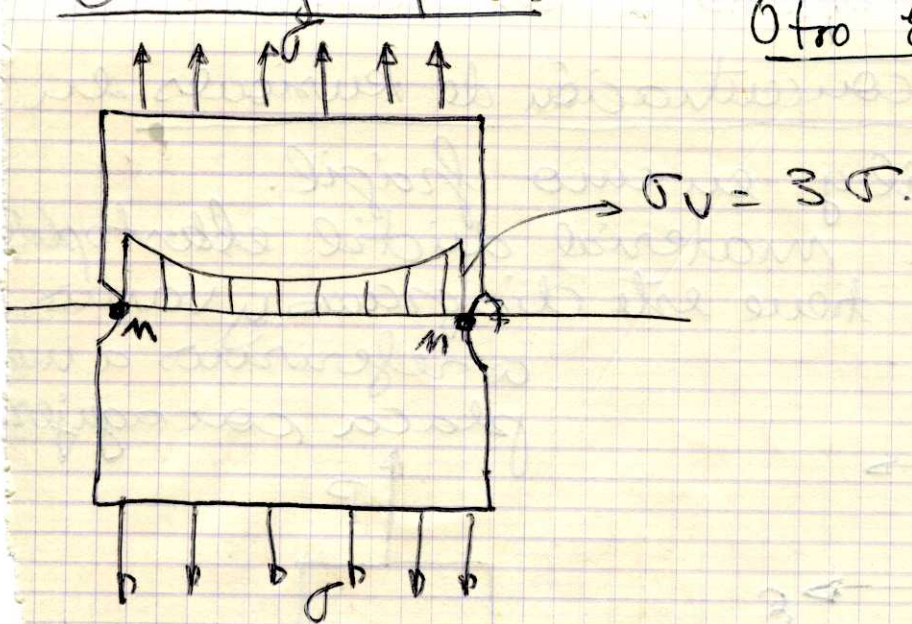
$$-\tau - \tau = -2\tau$$

En m y m:

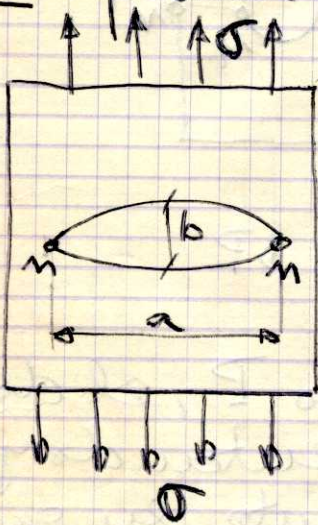
$$3\tau + \tau = 4\tau$$

O sea, el coeficiente de concentración

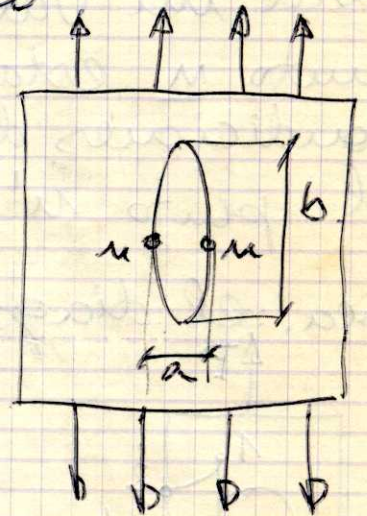
mas vale tambien  $\frac{4\tau}{\tau}$  de ser el



Otro: placa con agujero elíptico



El agujero también se puede poner así →



En los dos casos, la máxima tensión se da en los puntos n-n y vale  $\sigma_n = K\sigma$  siendo  $K = 1 + \frac{2a}{b}$ . Como  $K$  es mayor en el 1º caso, es más peligroso el agujero que el del 2º caso.

Determinación experimental de K: Cogemos una probeta de acero, con sección variable para que haya concentración de tensiones. y le damos una capa de laca para ver las grietas. Aumentamos la carga  $P$  hasta que se forme la 1ª grieta y llamamos a ese valor de  $P \rightarrow P_1$ . Aumentamos  $P$  hasta  $P_2$  (hasta que las grietas se generalicen). El coeficiente  $K$  vale

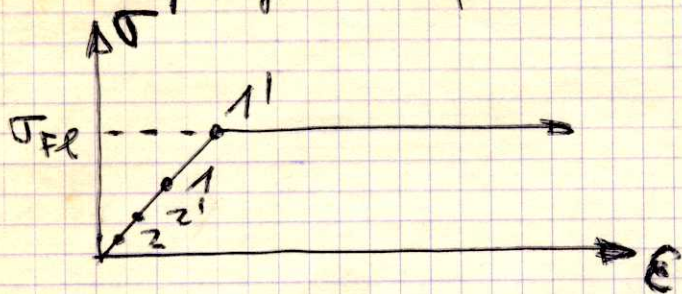
$$K = \frac{P_2}{P_1}$$

Representa el grado de adelantoamiento de la

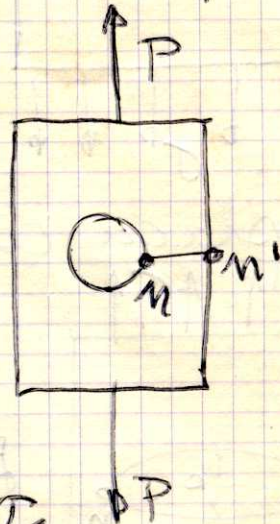
primera grieta respecto a las demás.

Importancia de la concentración de tensiones en un material dúctil y en uno frágil.

Supongamos un material dúctil elastoplástico perfecto que tiene este diagrama y vamos a referirnos a una placa con agujero.

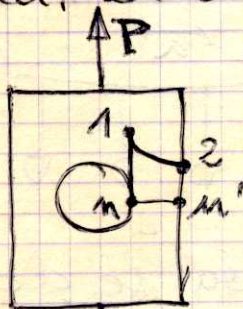


a referirnos a una placa con agujero



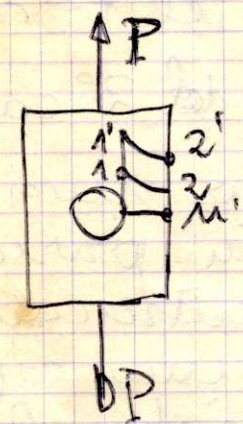
Para un valor de  $P$ , el punto  $n$  estará en las condiciones del punto  $1$  y el punto  $n'$  en las del  $2$ .

O sea, el diagrama de  $\sigma$  será:  $\sigma_2 < \sigma_1$ .



Si sigo aumentando  $P$ , el diagrama sigue aumentando y llegará un momento en que la tensión en el punto  $n$  será la del  $1'$ , o sea la de fluencia.

El punto  $n'$  tendrá una tensión como la que corresponde al  $2'$ .



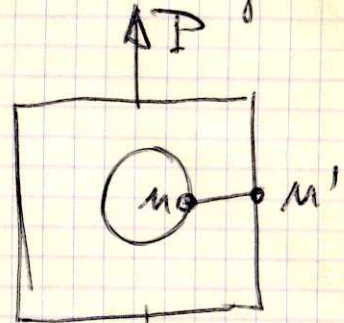
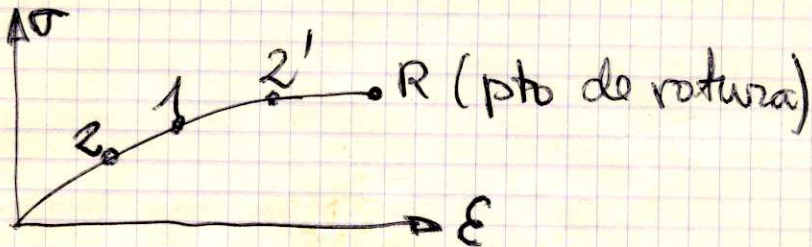
- Si sigo aumentando  $P$ , la tensión en  $n$  ya no crece pero sí crece la de  $n'$  hasta llegar a la tensión de fluencia. Entonces se produce el agotamiento de la placa y desaparece la

concentración de tensiones, ya que estas se distribuyen en un rectángulo.

Conclusión: la concentración de tensiones no tiene importancia en un material dúctil.

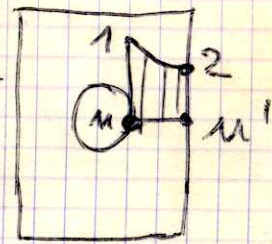
La zona alrededor del punto  $m$  tiene mayor  $\neq$  deformación que la zona alrededor de  $m'$  porque le llega antes la fluencia. (117)

Si se trata de un material frágil: por ejemplo un material con el siguiente diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$

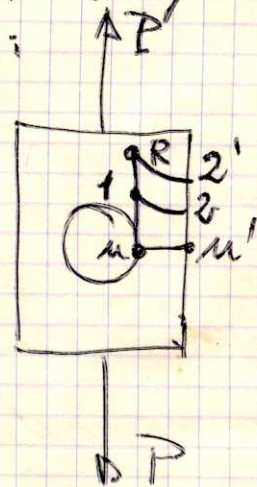


Para un valor dado de  $P$ , el pto  $m$  estará en las condiciones del pto 1 y el  $m'$  en las del 2, o sea el diagrama de tensiones será:

Si aumento la carga  $P$  este diagrama aumenta y llegará un momento en que la tensión en el pto  $m$  sea la de rotura y en el material se formará grietas.



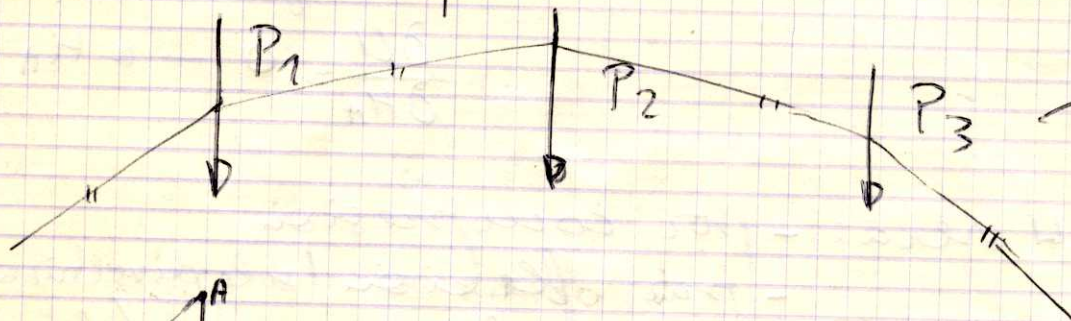
Por tanto en un material frágil la tensión en  $m$  es importante y hay que dar importancia a la concentración de tensiones:



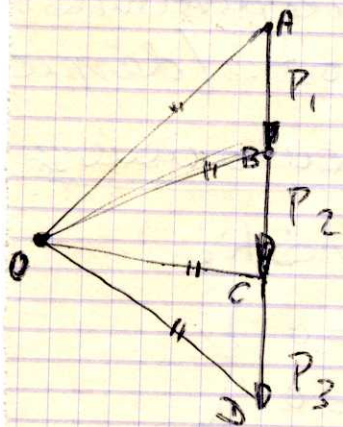
$\text{= ARCOS =}$

Un arco es una curva de forma parabólica. cuyo fin principal es eliminar la flexión y procurar que trabaje exclusivamente a compresión.

~~Def~~ Línea de presiones de un arco: es el polígono articular del sistema de cargas. Es el mismo funicular con el polo a la izquierda



Calcular la línea de presiones.

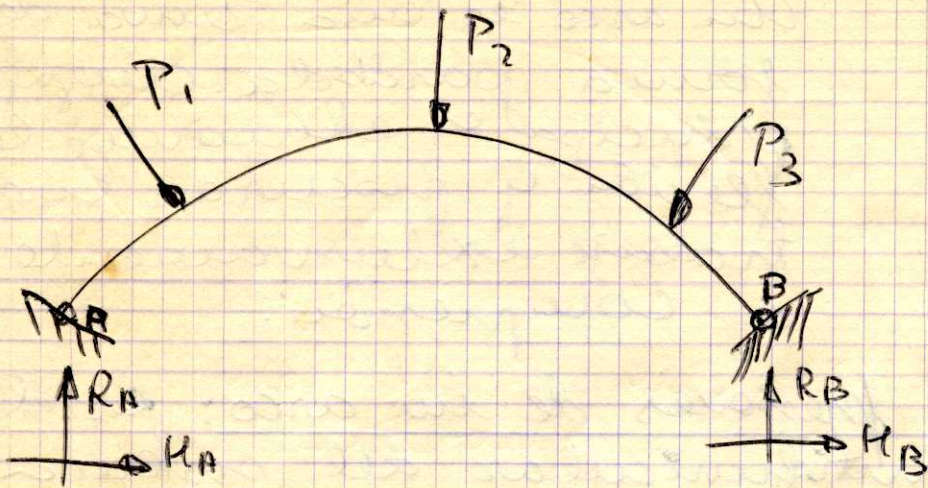


Si quiero que el arco trabaje a compresión y no a flexión, le tendré que dar una directriz que coincida con la línea de presiones. Si la directriz no coincide con la línea de presiones,

trabajaría a compresión y a flexión, tanto más acentuada cuando más se aparte de la línea de presiones. (o sea cuanto mayor sea  $\delta$ )



## Resolución de un arco hiperestático:



Simply supported  
hyperstatic.

$$\sum F_v = 0$$

$$\sum F_H = 0$$

$$\sum M_H = 0$$

Eq. couple m: p

Castigliano:

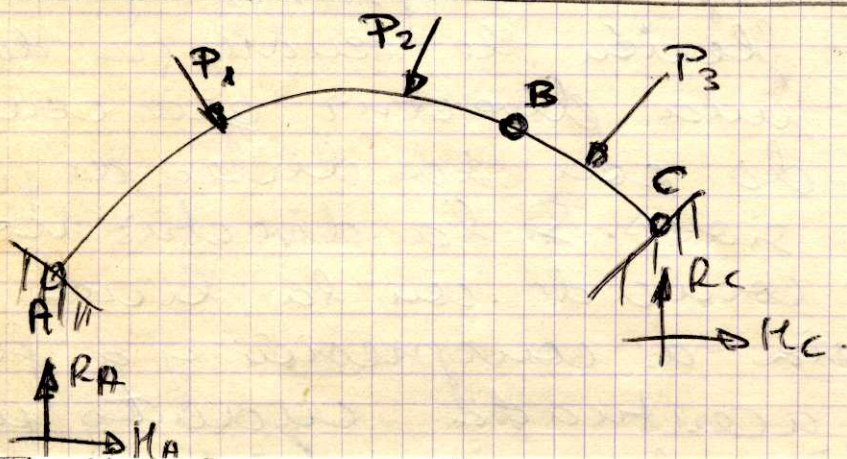
$$U = f(H_A) \quad (\text{p.ej.})$$

$$\frac{\partial U}{\partial H_A} = 0 \rightarrow H_A$$

La energía  $U$  será:

- por compresión.
- por flexión. (si lo directiva no ca)
- por esfuerzo cort. (despues)

## Resolución de un arco con tres articulaciones:



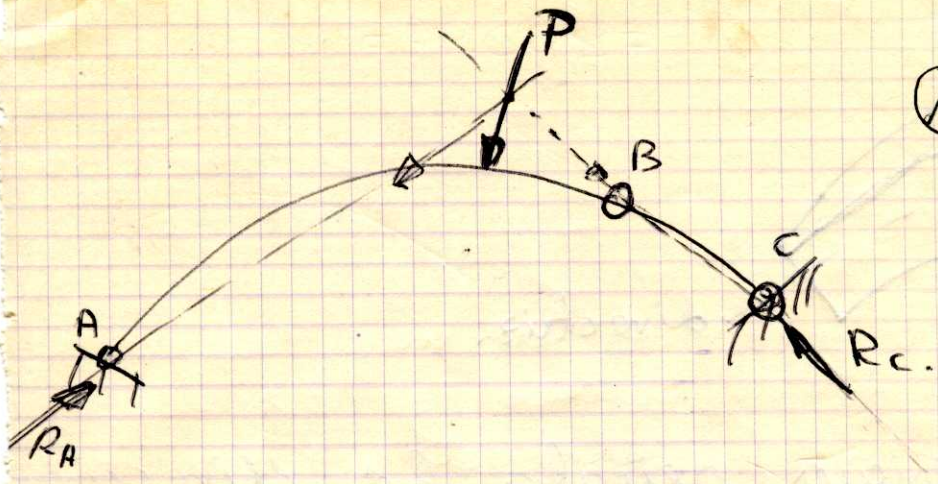
Isostático.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_v &= 0 \\ \sum F_H &= 0 \\ \sum M_H &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$M_B = 0$$

## Cálculo gráfico de las reacciones de un arco con tres articulaciones:

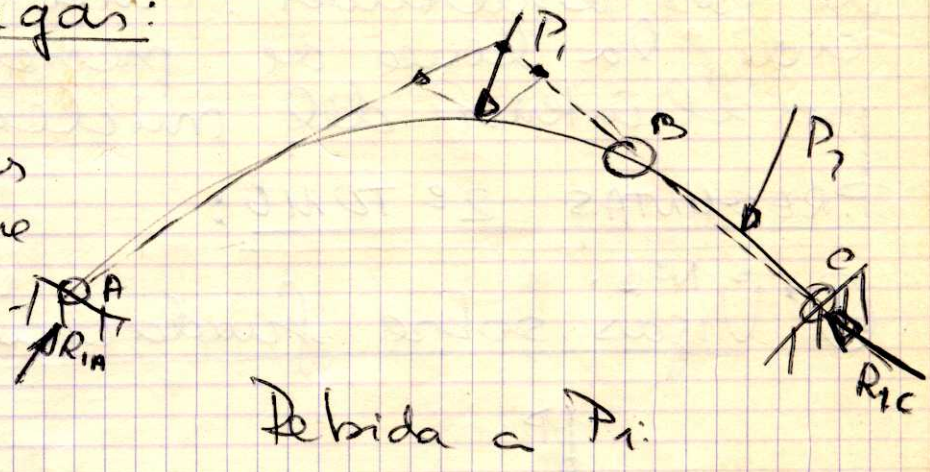
Voy a suponer que actúa sólo una carga. La reacción en C tiene que pasar por B para que no produzca momento flector. Para que haya equilibrio, las tres fuerzas se tienen que cortar en un punto o sea, que también conozco la dirección de  $R_A$ .



Descompongo la carga P en esas dos direcciones y ya obtengo las reacciones.

Si hay dos cargas:

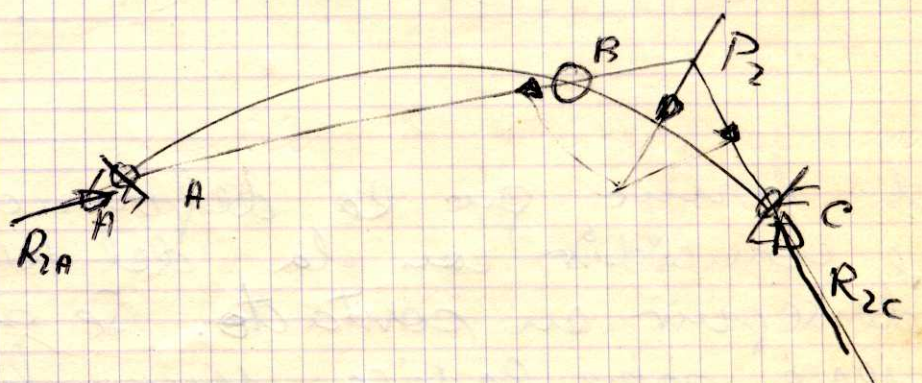
Calculo las reacciones igual que antes, primero la debida a la P1 y despues a la P2, y aplico el ppo de superposicion.



Las reacciones son tales:

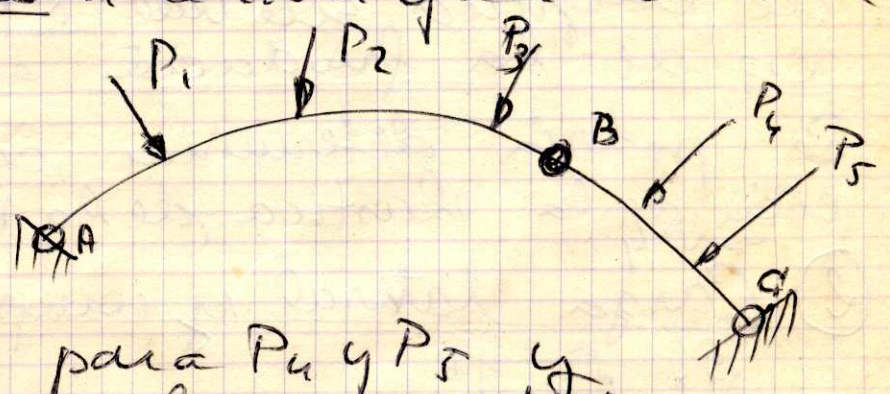
$$R_A = R_{1A} + R_{2A}$$

$$R_C = R_{1C} + R_{2C}$$



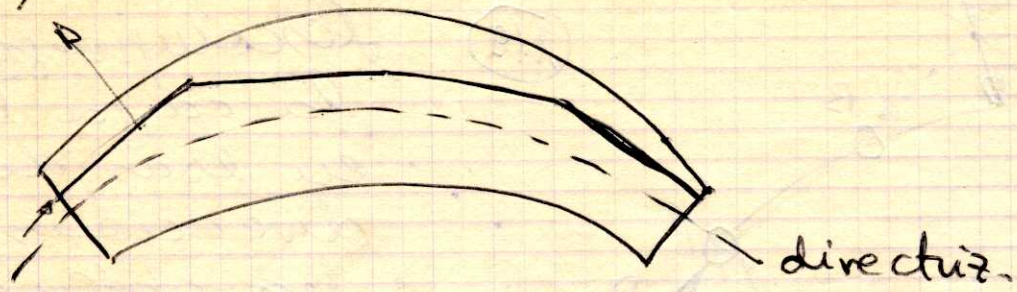
Si hay varias cargas a la izda y la dcha de la articulacion.

Se calcula la resultante de P1, P2 y P3 por el poligono funicular. Idem para P4 y P5 y resultos como en el caso anterior.



Distancia máxima que puede haber entre la línea de presiones y la directriz para que el arco no trabaje a traccion

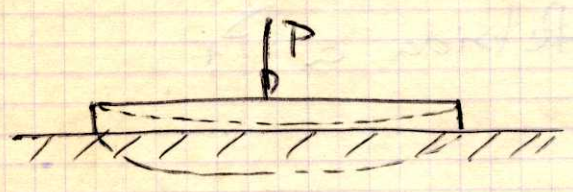
línea de presiones



La línea de presiones señala la dirección de las resultantes. Para que no haya tracción, la línea de presiones tiene que pasar por el interior del núcleo de la sección.

PREGUNTAS 2º TOMO:

① <sup>Nº 1.</sup> Vigas sobre fundación elástica:

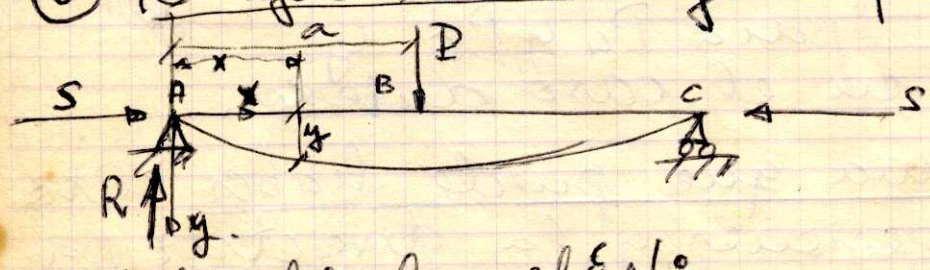


Viga colocada sobre el suelo cargada con P.

Hay deformación de la viga y del suelo. Se supone que la deformación de la viga coincide con la del terreno pues han de seguir en contacto. Se supone que el suelo ejerce sobre la viga una fuerza por unidad de longitud que vale  $Ky$ , siendo  $K$  módulo de la fundación e  $y$  la flecha de la viga.

Se podría determinar, conociendo esto, la ecuación de la elástica de la viga.

② <sup>Nº 4</sup> Carga lateral y compresión axial combinada



habrá dos ecuaciones de la elástica, una para el tramo AB y otra para el BC

Se podría determinar, conociendo esto, la ecuación de la elástica de la viga.

$$M = Rx + Sy$$

$$M = Rx + Sy - P(x-a)$$

TRAMO AB

TRAMO BC

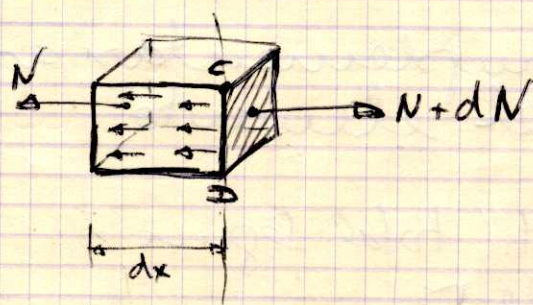
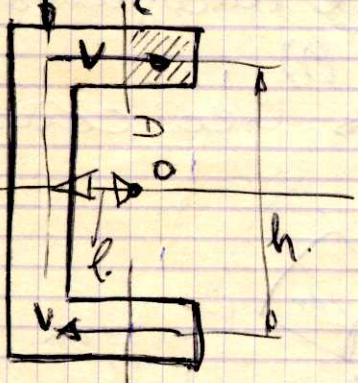
$$E I_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$

(120)

$$E I_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$

En este caso no es aplicable el principio de superposición, porque la ecuación de la elástica es función de  $P$  y  $S$ .  $y = f(P, S)$  y al duplicar  $P$  y  $S$  no se duplica  $y$ . Para que el principio de superposición fuese aplicable, se tendrían que cumplir las dos condiciones siguientes: 1°) que el material siga la ley de Hooke 2°) Las deformaciones deben ser pequeñas, de forma que no modifiquen el modo inicial de actuar de las fuerzas. En este caso, la  $P$  hace que la  $S$  trabaje a flexión y a compresión, y no solo a compresión como al principio.

3) Flexión de vigas en un plano ppal que no es plano de simetría (centro de torsión)



~~La resultante de las fuerzas~~

En esa cara aparecerán unas  $Z$  para que haya equilibrio entre  $N$  y  $N + dN$ . En la cara rayada (perpendicular a este otro) aparecerán unas  $Z$  iguales y de sentido contrario, cuya resultante valdrá  $V$ . Abajo serán en sentido contrario, porque  $N + dN$  sería a compresión; (resultante  $V$ ). llamando  $h$  a esa distancia

⊗  $V \cdot h = \text{mom. torsor } M_t$

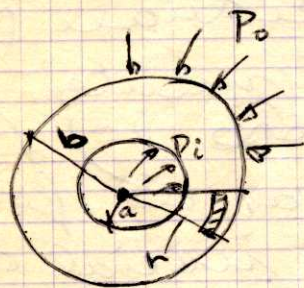
El centro de torsión  $O$ :

$$V \cdot h = P \cdot e \rightarrow \boxed{e = \frac{Vh}{P}}$$

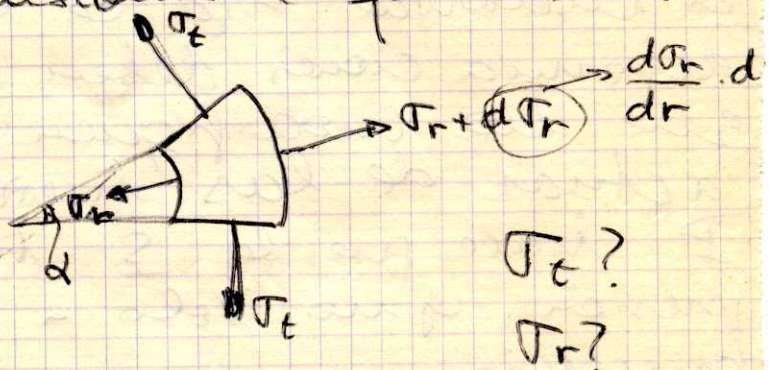
Si a  $P$  le hago actuar en un plano vertical que pasa por el centro de torsión, la viga trabajaría sólo a flexión, pero no a torsión. (El momento torsor  $V \cdot h$  se anula)

### CAP. V

Deformación de tubos de pared gruesa



Analizo el elemento  $dr$  y calculo las tensiones a que está sometido:



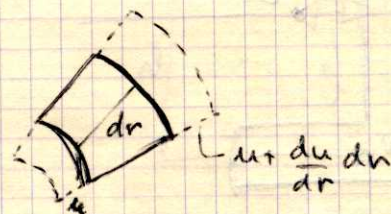
Proyecto las tensiones según la dirección del radio y su suma tendrá que valer 0. Operando:

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (2 \text{ incógnitas}) \quad (1)$$

Ecuaciones complementarias  $\rightarrow$  veo como se deforma el elemento

- El alarg. unit. total según la dirección de  $r$ :

$$\epsilon_r = \frac{u + \frac{du}{dr} \cdot dr - u}{dr} ; \epsilon_r = \frac{du}{dr}$$



- El alarg. unit. según la dirección de la  $\sigma_t$ :

$$\epsilon_t = \frac{u}{r}$$

porque el alarg. unitario de una fibra es el alarg. unitario del radio

Puedo poner  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  en función de  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_t$  porque se fue:  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \gamma \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E}$  (2)

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \gamma \frac{\sigma_t + \sigma_z}{E}$$

Resultado:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\gamma^2} \left[ \frac{du}{dr} + \gamma \frac{u}{r} \right] \quad (2)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\gamma^2} \left[ \frac{u}{r} + \gamma \frac{du}{dr} \right] \quad (3)$$

Llevando  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  a (1) resulta:

$$\left[ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \right] \rightarrow u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Llevo el valor de  $u$  a (2) y (3) obtengo:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\gamma^2} \left[ C_1(1+\gamma) - C_2 \left( \frac{1-\gamma}{r^2} \right) \right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\gamma^2} \left[ C_1(1+\gamma) + C_2 \left( \frac{1-\gamma}{r^2} \right) \right]$$

Para determinar las constantes

$$\begin{cases} \text{Para } r=a & \sigma_r = -P_i \\ \text{Para } r=b & \sigma_r = -P_o \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 \text{ y } C_2 \text{ que lleven} \\ \text{las formulas.} \end{array} \right.$$

### CONSECUENCIAS:

1º)  $\sigma_t + \sigma_r = cte$  (no depende de  $r$ )

2º) Si llamo  $z$  al eje del tubo

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \gamma \frac{\sigma_r + \sigma_t}{E}$$

$\epsilon_z = -\gamma \frac{\sigma_r + \sigma_t}{E}$ . Todas las fibras tienen el mismo alargamiento unitario (no depende de  $r$ )

3º) 3º Voy a suponer que la presión exterior sea 0

$$\sigma_r = \frac{a^2 P_i - b^2 P_o}{b^2 - a^2} - \frac{(P_i - P_o) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 P_i - b^2 P_o}{b^2 - a^2} + \frac{(P_i - P_o) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

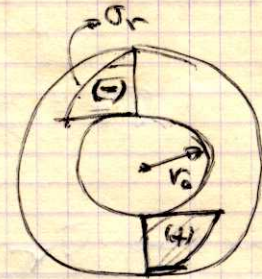
$$P_0 = 0$$

$$\sigma_r = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} - \frac{P_i a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$\downarrow$  (+)                       $\leftarrow$  (+)

Por tanto  $\sigma_r (-)$  } Max. para  $r = a$ .  
 } Min para  $r = b \rightarrow \sigma_r = 0$

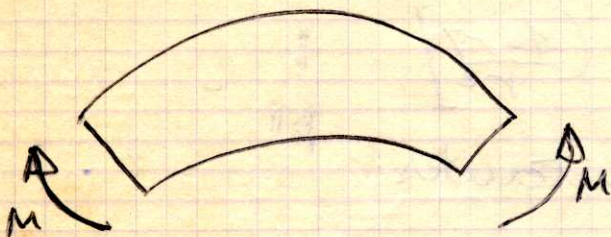
Represent. de  $\sigma_r$ :



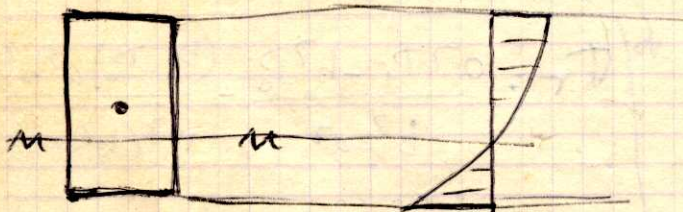
Represent. de  $\sigma_t$ :  
 siempre es (+).

$\sigma_t$  } Max. para  $r = a$ .  
 } Min  $\neq 0$  para  $r = b$

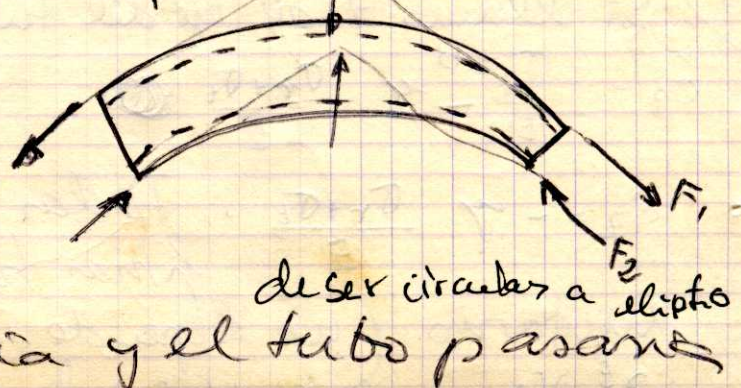
## FLEXION PURA DE EJES CURVOS



La n-u. deja de pasar por el c.d. de la sección, aunq. el material sigue homogéneo y el diag. de esfuerzos es triangular y por tanto siempre el

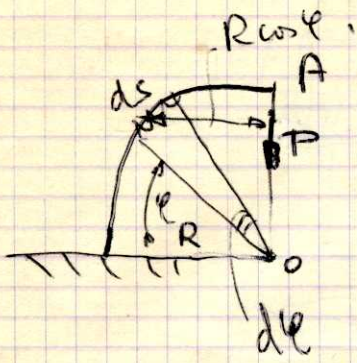


Si el eje es un tubo o pared estrecha



Las resultantes de  $F_1$  y  $F_2$  son hacia adentro, o sea que el tubo se aplastaría y el tubo pasaría de ser círculo a elipso.

Problema: Un anillo es un cuadrante de  $\odot$  cargado con  $P$ . Calcular el movimiento vertical de  $A$ . Por Castigliano:



$$U = f(P)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \underline{\underline{\delta A}}$$

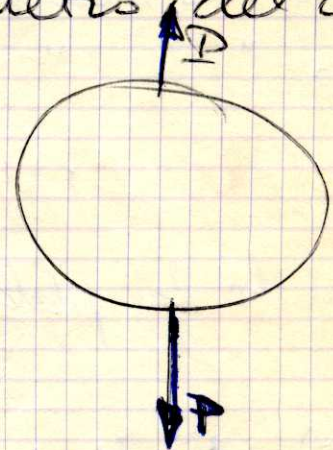
$$U = \int \frac{M^2 ds}{2EI_z}$$

$$ds = R d\varphi$$

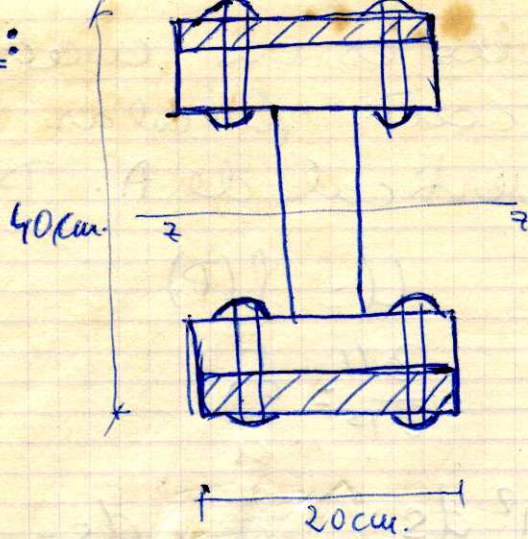
$$M = PR \cos \varphi$$

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{(PR \cos \varphi)^2 \cdot R d\varphi}{2EI_z}$$

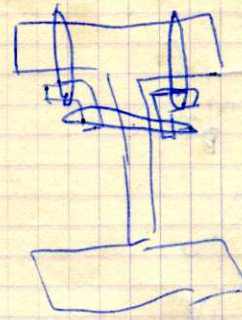
Problema: Calcular el alargamiento del diámetro del anillo.



# Remaches:



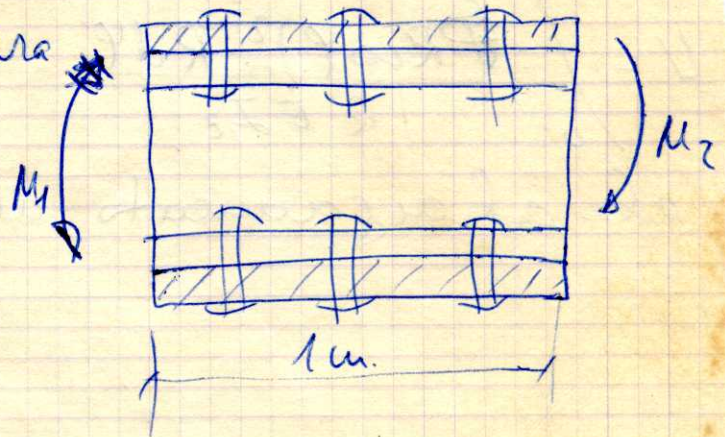
$I_z \rightarrow$  dato



En un tramo de longitud 1 metro hay  $M_1$  y  $M_2$  (datos)  
 Calcular el n° de remaches necesario para este tramo para sujetar la platabanda al ala.

Diámetro de los remaches: 20 mm.

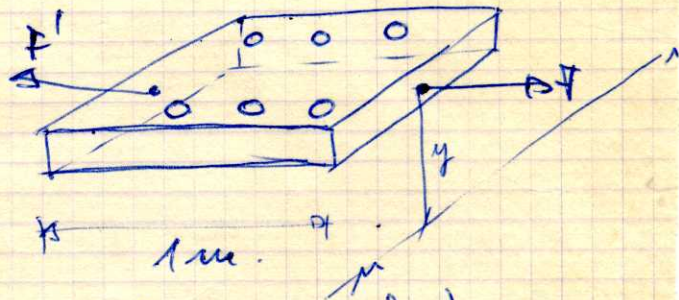
$\tau_{trabajo}$  " " " :  $800 \frac{Kg}{cm^2}$



Aislando la platabanda:

$$R = F - F' = \frac{M_2 - M_1}{I_z} M_e$$

(desgarramiento)

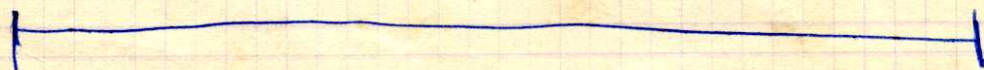


Cada remache aguantará:  $\frac{R}{n}$  ( $n =$  n° de remaches) de la platabanda de arriba.

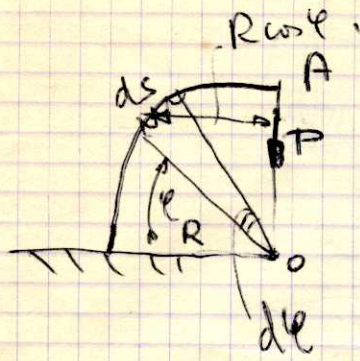
mom. estático del área rayada respecto línea neutra

Aísla un remache:

$$\tau_{trab} = \frac{R/n}{\frac{\pi d^2}{4}} \rightarrow \textcircled{n}$$



Problema: Un anillo es un cuadrante de  $\odot$  cargado con  $P$ . Calcular el corrimiento vertical de  $A$ . Por Castigliano



$$U = f(P)$$

(122)

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \underline{\underline{\delta A}}$$

$$U = \int \frac{M^2 ds}{2EI_z}$$

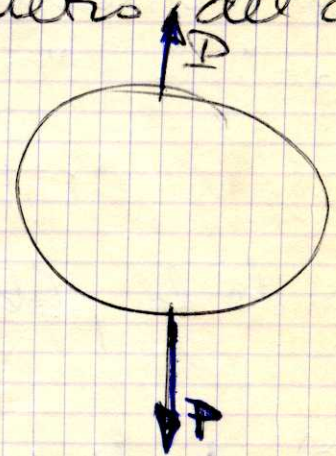
$$ds = R d\varphi$$

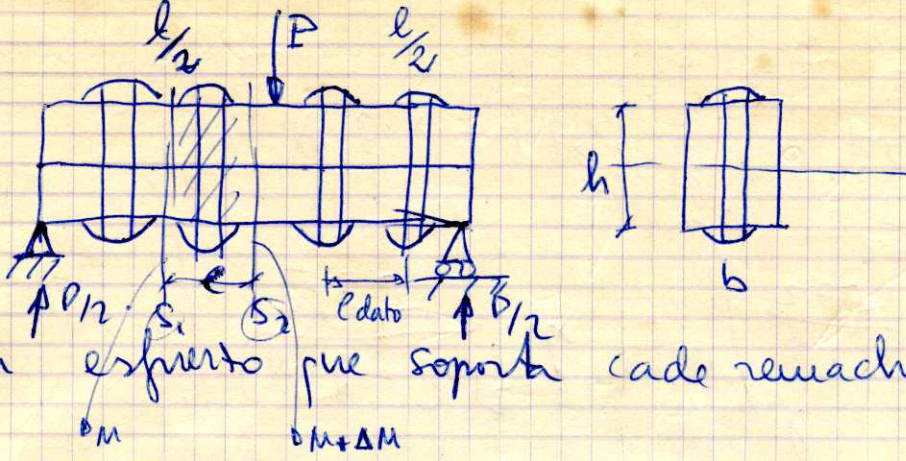
$$M = PR \cos \varphi$$

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{(PR \cos \varphi)^2 \cdot R d\varphi}{2EI_z}$$

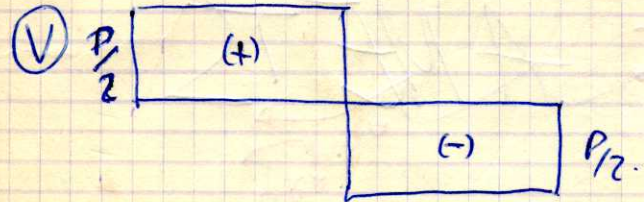
el alargamiento del diámetro del anillo:

Problema: Calcular

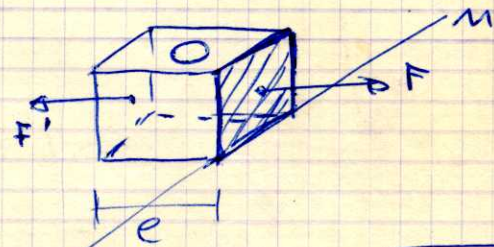




Calcular esfuerzo que soporta cada remache



Tomar dos secciones  $S_1, S_2$  de paradas por el par de remache  $e$



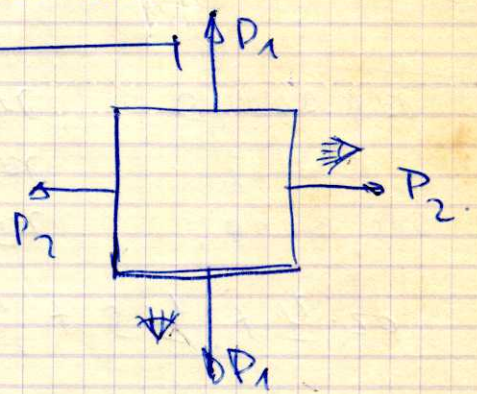
$$R: F - F' = \frac{\Delta M}{I_z} M e = \frac{V \cdot e}{I_z} M e$$

$\frac{1}{12} b h^3$

$\Delta M = V \cdot e$  ?  
esf. cortante que actúa en la sección

en que está el remache. En este caso es constante.

Diagr. de mom. flectores:



Lo descompongo en barras:



Calculo  $M$  igualando ángulos girados  
 $\theta_B = \theta'_B$  sale (-)

