ACADEMIA NEWTON

Apuntes de Geometría Descriptiva

NOTAS

1º) En los problemas de monos los datos del problema, vienen encerrados en el dibujo por un circulo.

2º) Por error ajeno a nuestros estudios y sin que fuese nuestra intención, las hojas nº 7, 19, 47 y 83 han quedado en el mas profundo de los anonimatos

3º) Como compensación al apartado 2º) la hoja nº 67 se encuentra bis

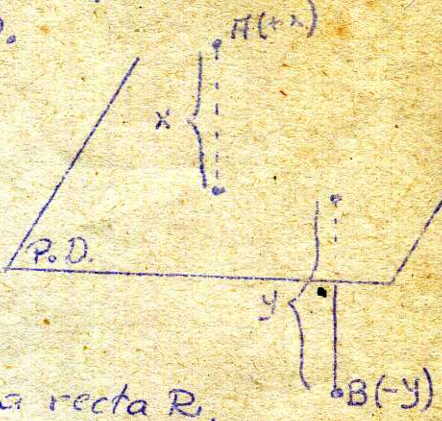
INDICE

Sistema Acotado

Punto

El punto se proyecta ortogonalmente sobre un plano llamado del dibujo. Se define como cota de un punto a la distancia a que se encuentra del plano del dibujo.

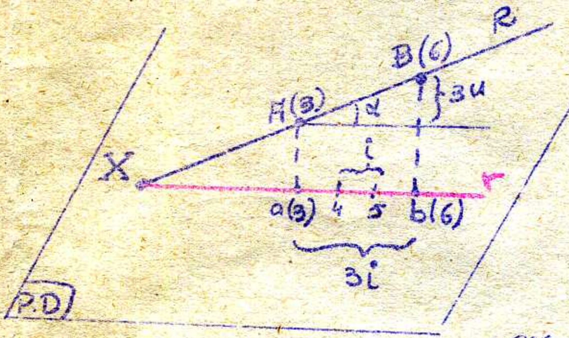
Los puntos situados por encima del P.D. tienen cota (+) y los de debajo cota (-).



Recta

Es el resultado de unir dos puntos.

Sean los puntos A(3) y B(6) que definen una recta R.



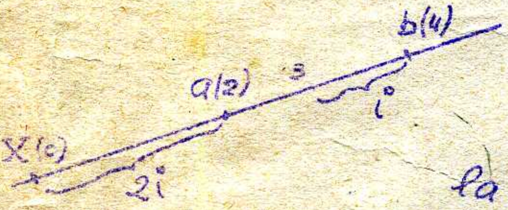
La representación de la recta sobre el plano del dibujo será r

Al punto X, donde la recta del espacio corta al plano del dibujo se llama punto de cota cero.

Intervalo i de una recta es la distancia en proyección entre dos puntos de cota consecutivos.

Siempre se cumple que $tg\alpha = \frac{3u}{3i} = \boxed{\frac{u}{i} = tg\alpha}$ siendo u la unidad de altura.

Si nos dan una recta en proyección definida por dos puntos a (2), b(4) y nos piden hallar el punto de cota cero. Hallamos el intervalo de la recta que vendrá dado por $\frac{\overline{ab}}{2} = i$, y a partir de a. tomamos una distancia $\overline{2i}$ hacia la izquierda de a, con lo que calculamos el punto X de cota cero.



Una recta queda definida por:

1°) Dos puntos con sus cotas definidas
2°) Un punto, el intervalo de la recta y la dirección de esta.

Casos Particulares

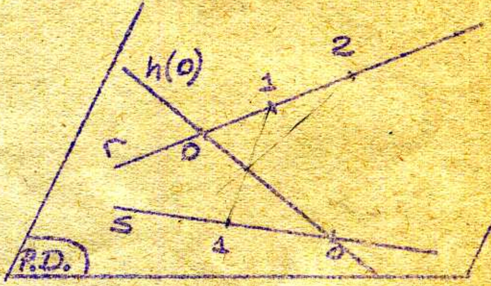
a) Cuando la recta es paralela al plano del dibujo. Entonces todos sus puntos tienen la misma cota y la recta se representa por r(x). Donde x es la altura a que se encuentra la recta en el espacio respecto al plano del dibujo.

b) Cuando la recta es perpendicular al del dibujo. Entonces su representacion es un punto en el plano del dibujo.

Plano

Un plano se representa en el P. del D. por dos rectas r y s que se cortan.

Para hallar su representacion unimos dos puntos de la misma cota y tendremos una recta del plano de altura la de los puntos.



Un plano en el espacio tambien queda definido por su linea de maxima pendiente.

Esta linea de Max. Pendiente se la representa por dos rectas paralelas y tiene la propiedad de ser perpendicular a la recta Po de corte del plano P de linea de maxima pendiente con el plano del dibujo.

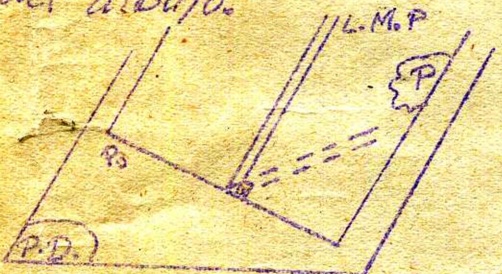


fig (1)

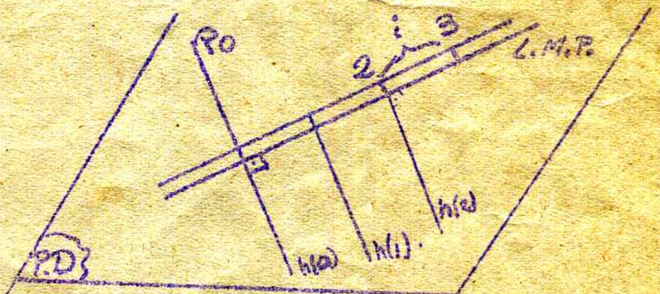


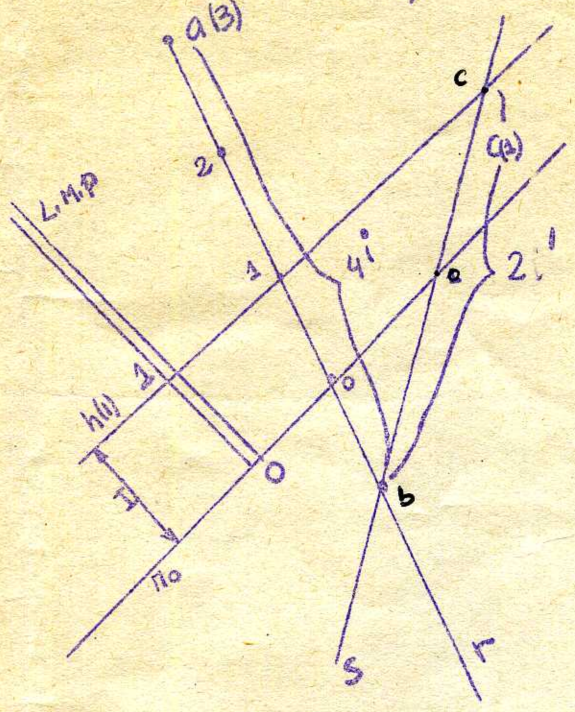
fig (2)

Con la linea de M.P. queda perfectamente definido el plano, ya que podemos hallar el punto de cota cero (fig.(2)) y sabemos que la Po de intersecion es ⊥ a L.M.P. Las rectas de cota 1, 2, ... son paralelas a la Po por los puntos 1, 2, ...

Plano formado por tres puntos

Sean los puntos a(3), b(-1), c(1) vamos a definir el plano formado por estos tres puntos. Para ello hallaremos la L.M.P.

Unimos a y b con lo que tenemos una recta r



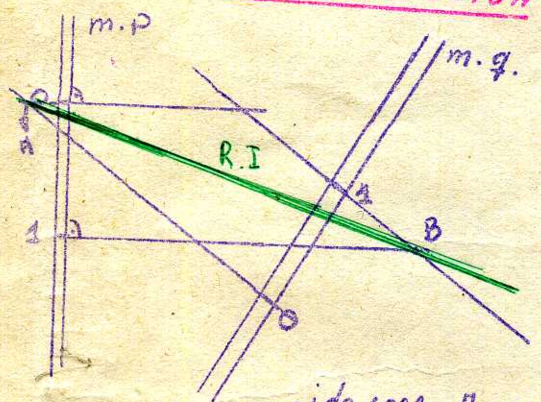
Como a tiene de cota (3) y b (-1) divido el segmento AB en 4 partes y hallamos el punto de cota cero correspondiente a r

Unimos despues el punto b con el C y hallamos igualmente el punto cero de la recta S

Uniendo ambos puntos cero hallo la Πo del plano.

Una ⊥ a Πo sera la linea de Maxima pendiente del plano

INTERSECCION DE PLANOS.

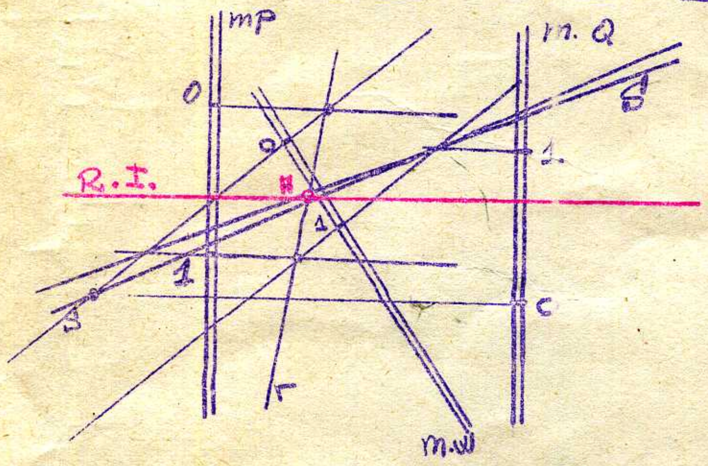


Sean los planos P y Q dados por sus L.M.P (m.p) y (m.q)

Trazamos las rectas Po y Qo de los planos, que se cortaran en un punto A de la recta de interseccion.

Haciendolo mismo con las rectas de altura (1) nos da otro punto B(1), que unido con A me da la recta de interseccion

Caso particular cuando las L.M.P son paralelas.



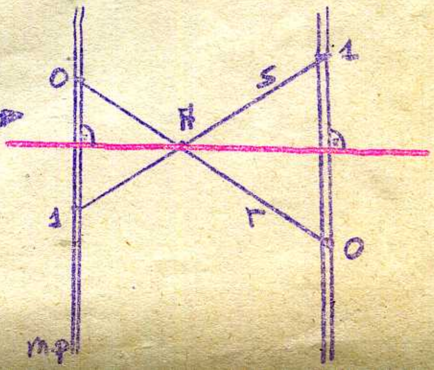
Se toma un plano auxiliar W que se cortara con P y Q segun dos rectas r y S'

Donde R y S' se cortan me da un punto A de la recta de interseccion

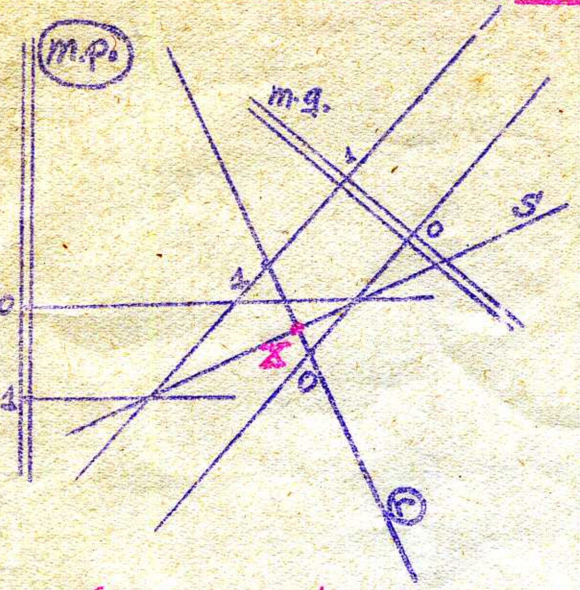
La recta de interseccion ha de ser ⊥ a las L.M.P de P y Q.

Un metodo mas rapido es el que sigue →

- Unimos los puntos ceros → r.
- Unimos los puntos unos → S'
- Corte de R y S → A.
- Por A la recta de interseccion ⊥ a la L.M.P



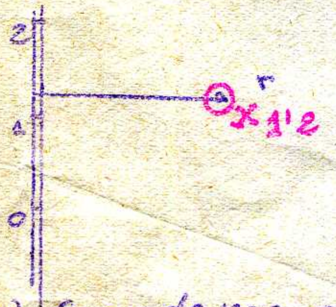
Intersección de recta y plano.



Sea la recta r y el plano P dado por su línea de max pendiente
Para hallar la interseccion de r y P hago pasar por la recta r un plano Q
Hallo la interseccion de P y Q nos da la recta S
Corte de r y S ⟶ X

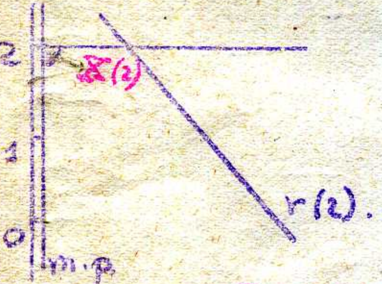
Casos Particulares.-

a) Cuando r es ⊥ al plano del dibujo.



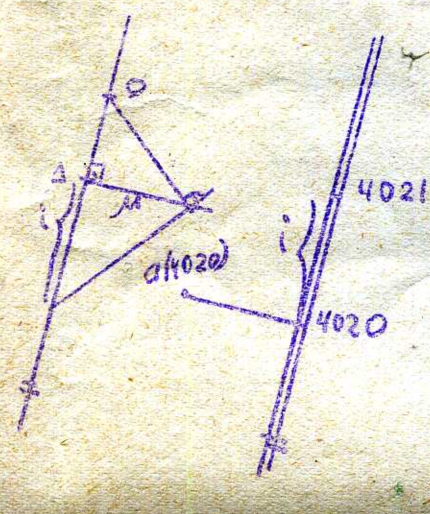
El punto que representa la recta R es la intersección.

b) Cuando r es paralelo al plano del dibujo.



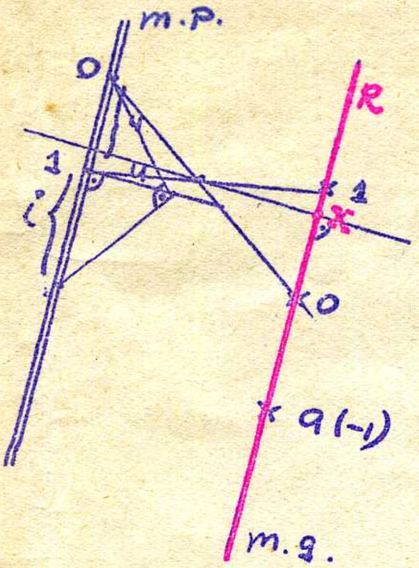
Perpendicularidad de recta y plano.

Sea la recta r y el punto a (4020). Tengo que hallar un plano que pase por por A y sea ⊥ a r



Trazamos una L.M.P ∥ a r para ⊥ a la L.M.P y en el corte de esta linea con la L.M.P tendremos el punto de cota (4020). Hallaremos despues el intervalo de P de la recta R y acotamos el plano teniendo en cuenta que los sentidos crecientes de acotacion son inversos.

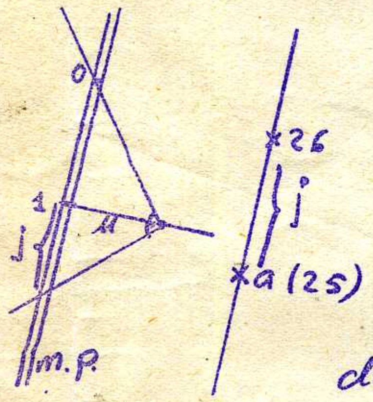
Recta R que pase por un punto y es ⊥ a un plano P
Intersección de R y P.



Sea el plano P definido por su L.M.P y el punto a(-1)
La traza R de la recta será // a L.M.P del plano P y acotada en sentido inverso según el intervalo i definido en P.

Perpendicularidad de recta y plano.

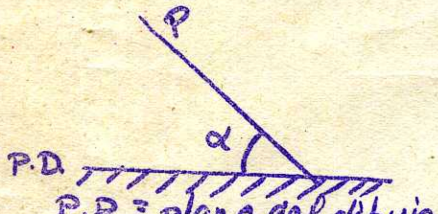
Sea el plano P dado por su L.M.P y el punto a con su cota.



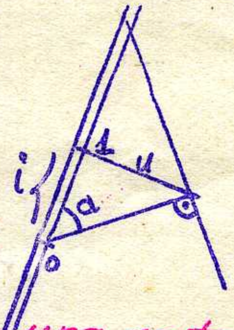
La recta que pase por a y sea ⊥ a P será una recta // a L.M.P.
Para acotar dicha recta tendremos la cota dada ya por el punto a(25) y para hallar el intervalo j de la recta lo sacamos del plano P teniendo en cuenta que los sentidos crecientes de la recta y el plano son opuestos.

Angulo que forma un plano P con el dibujo.

Sea el plano P definido por su L.M.P.

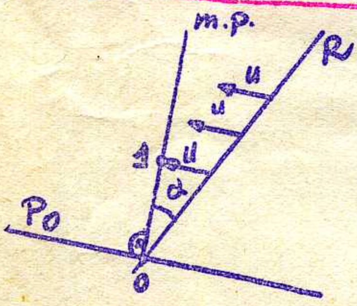


P.D ≡ plano del dibujo



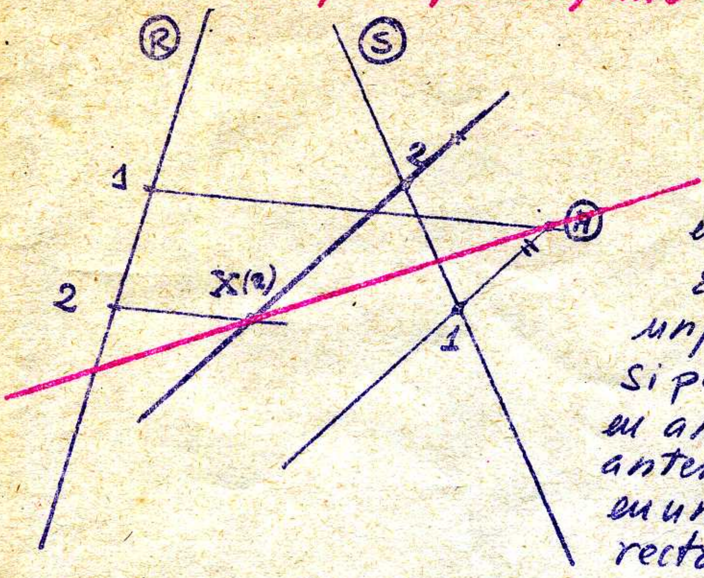
Según la construcción calculamos el ángulo α que forman ambos planos. Siempre se cumple que $tg\ \alpha = \frac{u}{i}$

Plano que pasa por una recta R y forma con ella $\hat{\alpha}$



Trazamos por la cota 0 una recta L.M.P que forme α con R, con lo que hallamos Po puesto que es ⊥ a la L.M.P por 0.
Para definir otra cota deslizo la unidad de altura u por la recta R manteniéndola // a Po. Donde esta recta toque a la L.M.P tendremos definida la cota 1.

Recta que pase por un punto y se apoye en dos rectas.



Sean las rectas definidas R y S y el punto X(2)

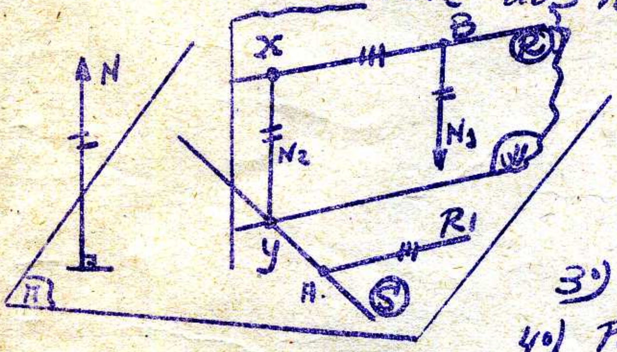
Para hallar la recta solución unimos los puntos de cota igual al del punto en las rectas, con el punto.

El corte de estas dos rectas será un punto de la recta pedida.

Si por otros 2 puntos de cota igual en ambas rectas, trazamos ‖ a las anteriores, se cortarán ambas ‖ en un punto A que también es de la recta.

=MINIMA DISTANCIA=

Minima distancia entre dos rectas R y S que se cruzan.



1º) Por un punto A de S recta R_1 paralela a R.

2º) Plano formado por S y R_1 → π

3º) Recta N ⊥ a π

4º) Por un punto B recta N_1 ‖ a N.

5º) Plano formado por R y N_1 → W.

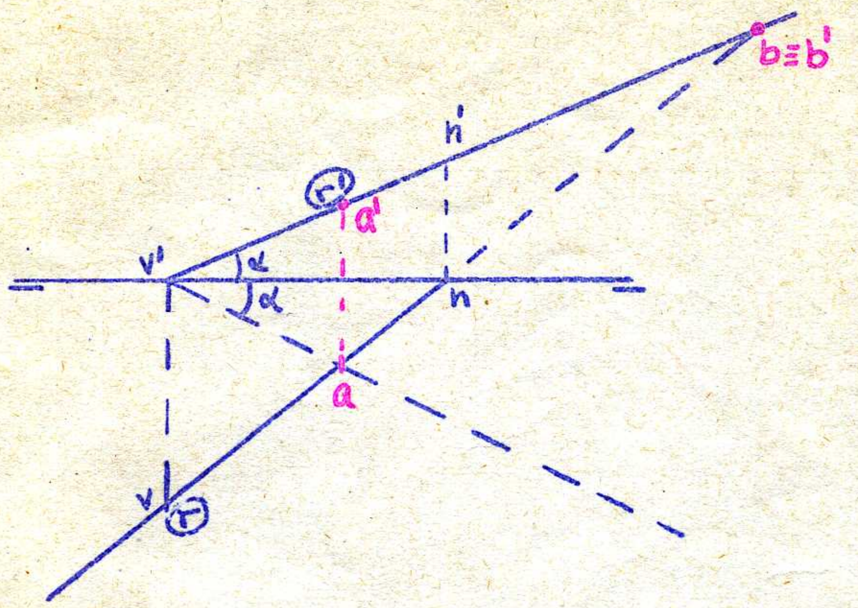
6º) Corte de W y S punto de la M.D.

7º) Por Y recta N_2 paralela N

8º) Corte de N_2 y R punto de la M.D.

Este es el metodo general para hallar minimas distancias. Hay otros metodos (giros, cambios de plano) por los cuales tambien se puede hallar como ya veremos

Representacion de la recta. Corte con los planos principales.



Toda recta queda definida por 2 puntos, los puntos mas importantes de esta recta son el corte con los planos H^{el} y V^{el}, puntos respectivamente h y V (Trazos)

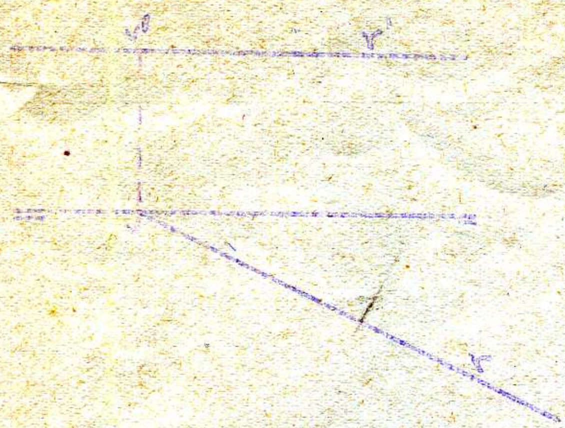
Otros puntos importantes son los de corte con el 1er bisector (punto a) y con el 2º bisector (punto b).

Para calcular el punto a, desde el punto v' llevo un angulo $\hat{\alpha}$ (α = angulo que forma r' con la L.T.), cortando a r en el punto a, llevandolo arriba hallare a'. Los puntos a y a' distaran lo mismo de la L de T. (por ser un punto del 1er bisector)

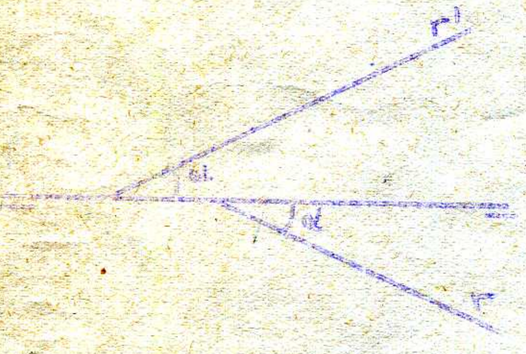
Para calcular el punto b, prolongo r hasta que corte a r' en el punto b b', que tendra las proyecciones confundidas, como tiene que ocurrir ya que es un punto del 2º bisector (Metodo Macrin).

RECTAS PARTICULARES

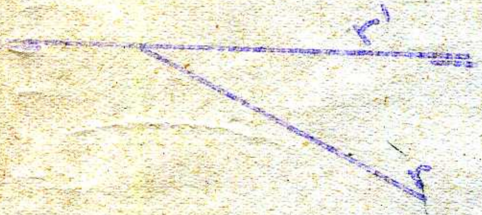
Recta paralela al plano H^al



Recta paralela al 1º bisector

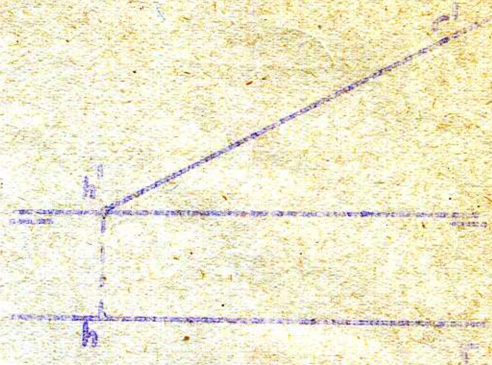


Recta del H^al

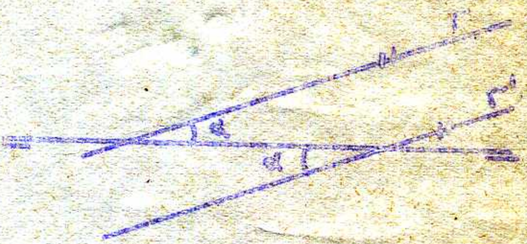


Recta del 2º Bisector

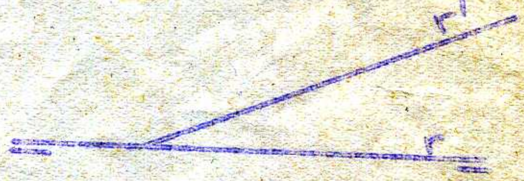
Recta paralela al V^al



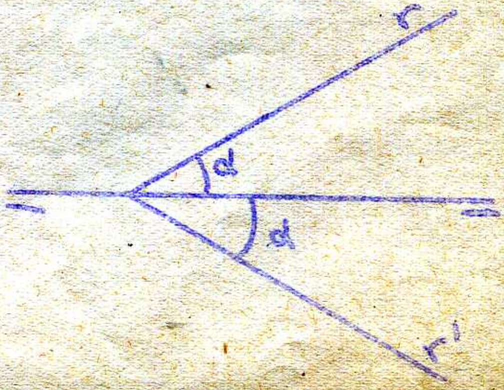
Recta paralela al 2º bisector



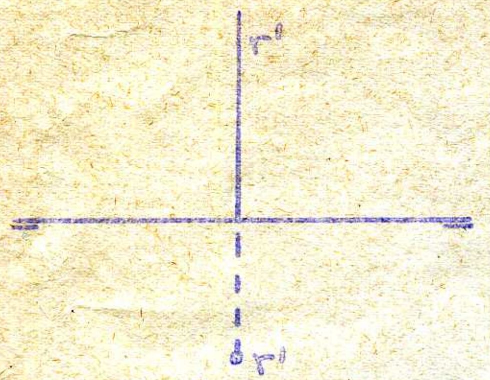
Recta del V^al



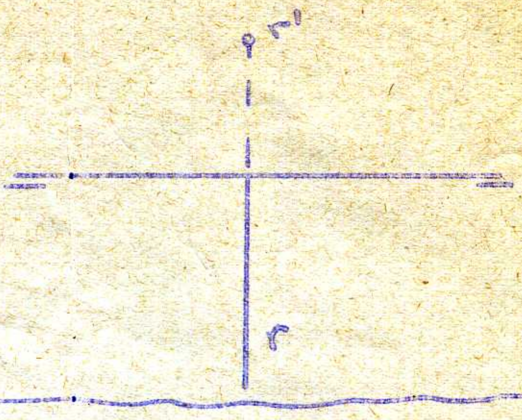
Recta del 1º Bisector.



Recta perpendicular al H^{el}



Recta perpendicular al plano V^{el}

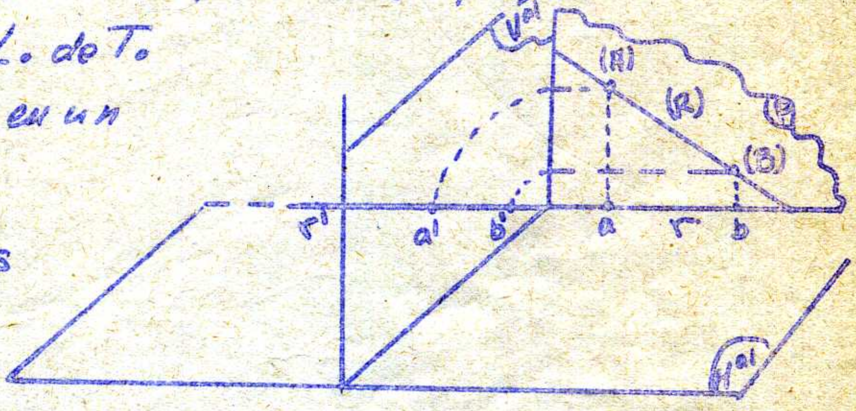


Recta de Perfil

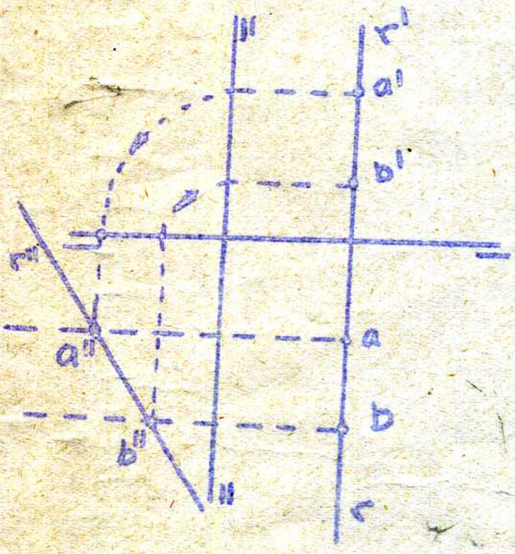
Una recta de perfil tiene las 2 trazas (r y r') coincidentes y perpendiculares a la L. de T.

Esta recta esta situada en un plano P ⊥ al H^{el} y V^{el}

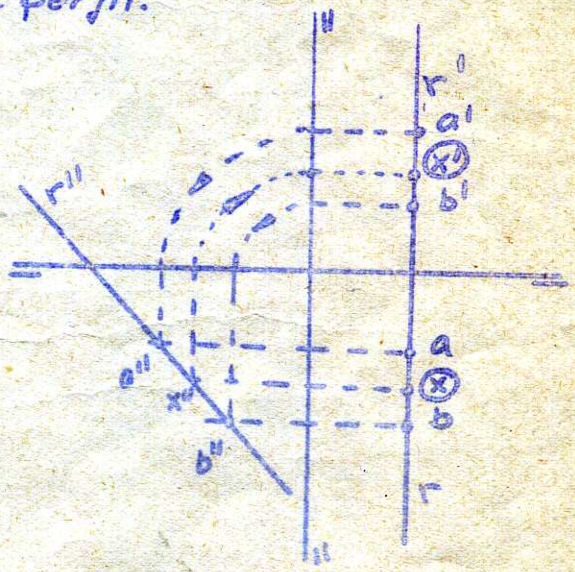
Para definir esta recta es necesario que tenga dos puntos de la recta (A) y (B)



Para definir esta recta se usa otra proyeccion, la del 2º V^{el}, para ello giro el plano P (plano de perfil) sobre el H^{el}

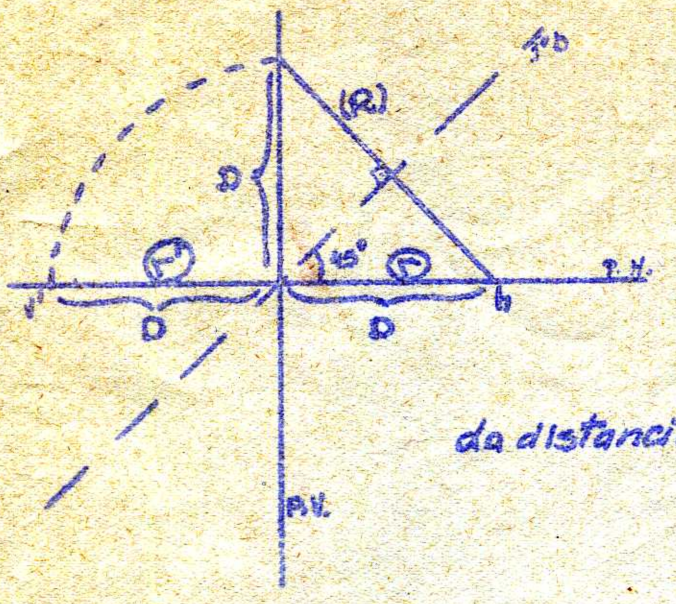


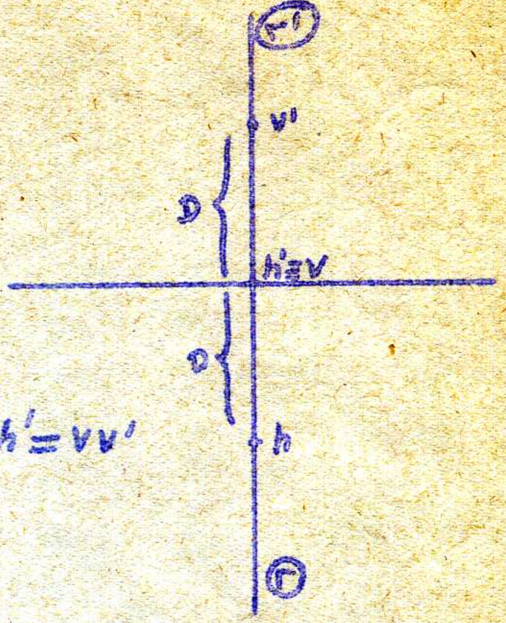
Situar un punto x en una recta de perfil.



Casos particulares de la recta de perfil.

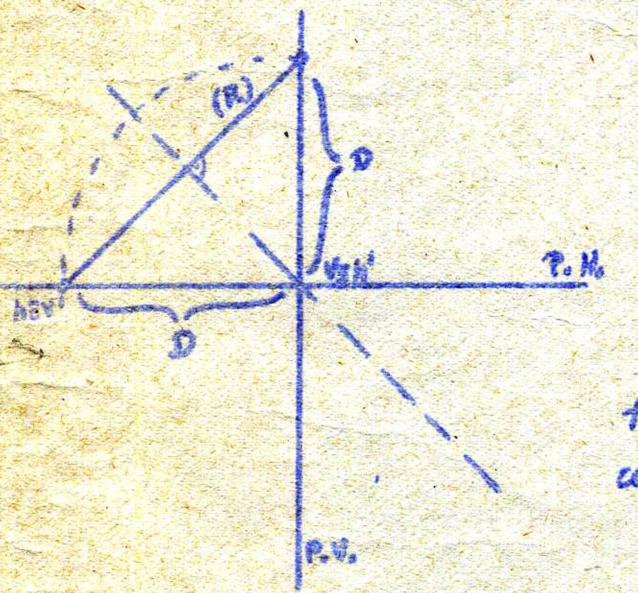
Recta de perfil ⊥ al 1º bisector.

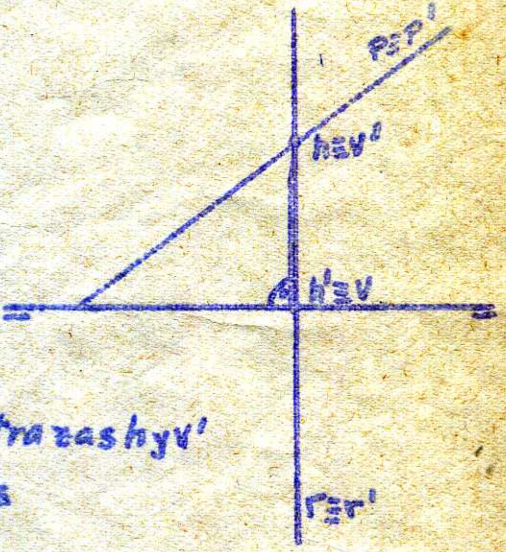




La distancia $hh' = vv'$

Recta de Perfil ⊥ al 2º bisector

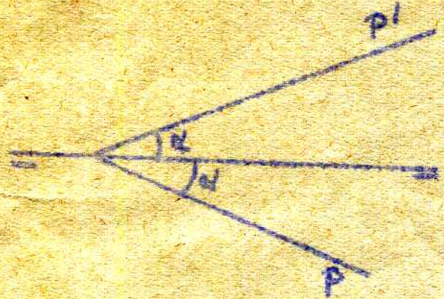




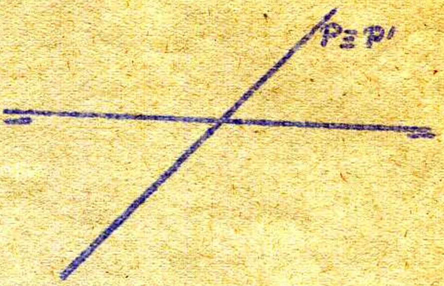
tienen las trazas h y v' confundidas

Planos Particulares

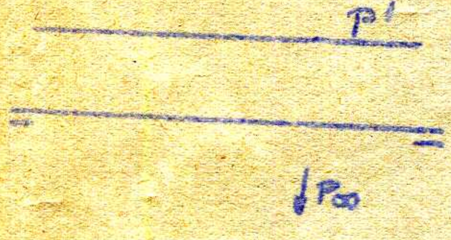
Plano ⊥ al 1º bisector.



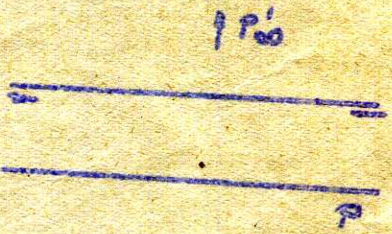
Plano ⊥ al 2º bisector



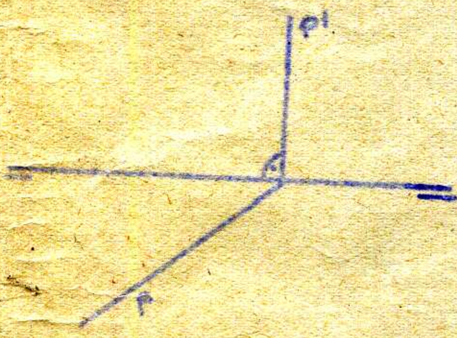
Plano paralelo al H^{al}



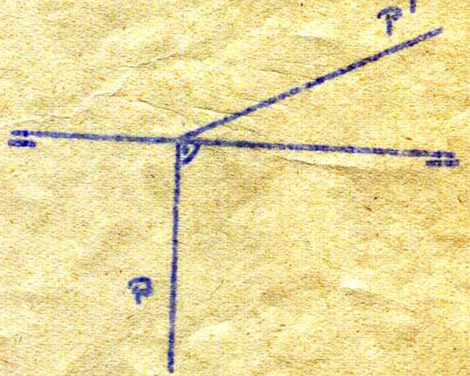
Plano paralelo al V^{al}



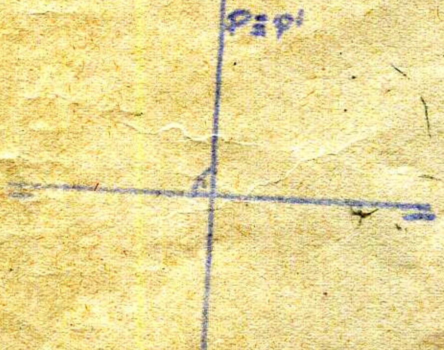
Plano ⊥ al H^{al}



Plano ⊥ al V^{al}

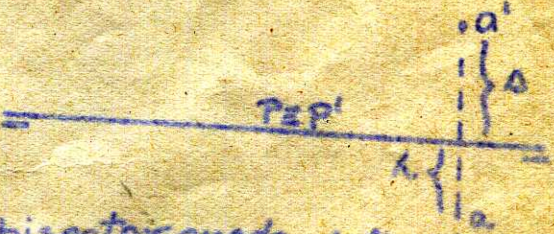


Plano ⊥ a línea de Tierra.



Plano que pase por la L. de T.

Para definir el plano es necesario dar un punto de él

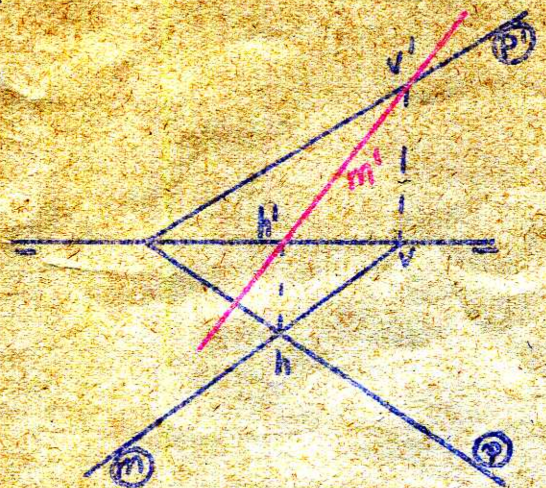


El 1º bisector queda definido por un punto A, donde $\Delta = \lambda$.

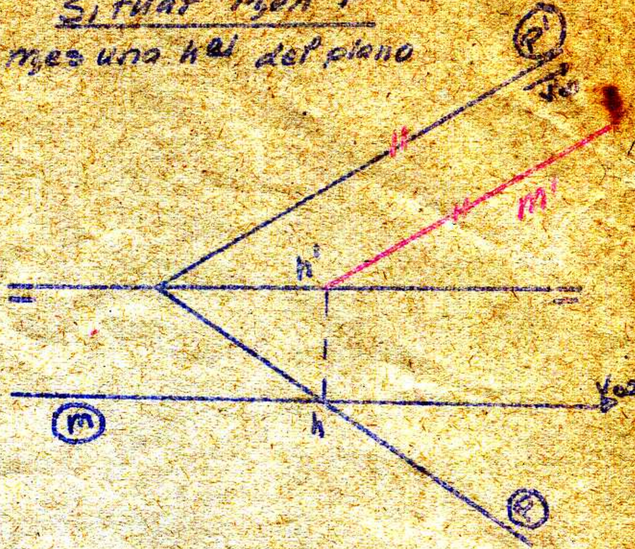
El 2º bisector queda definido por un punto A, donde a y a' coinciden.

Situar una recta en un plano

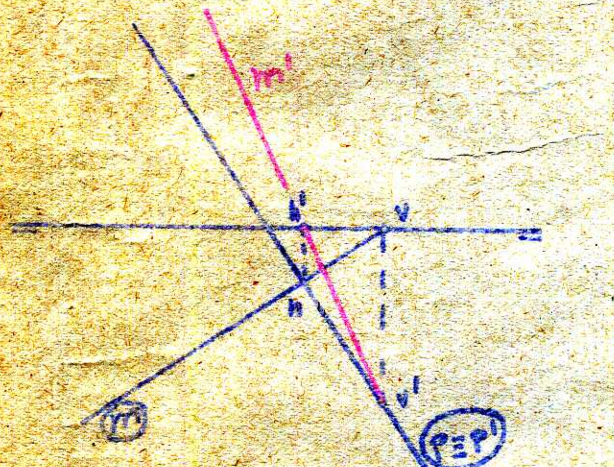
Situar la recta M en el plano P



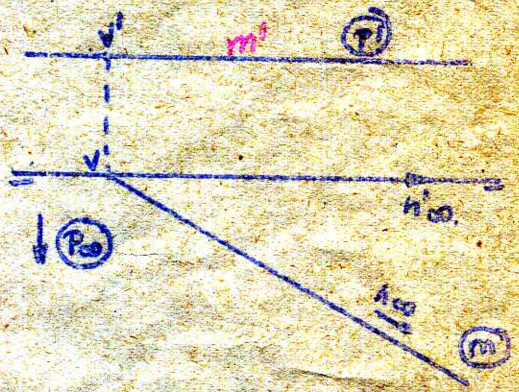
Situar M en P
m es una H^al del plano



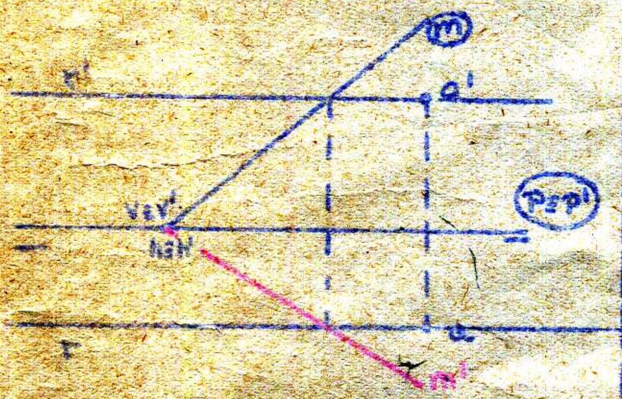
Situar M en P



Situar M en P.
P es un plano paralelo al H^al

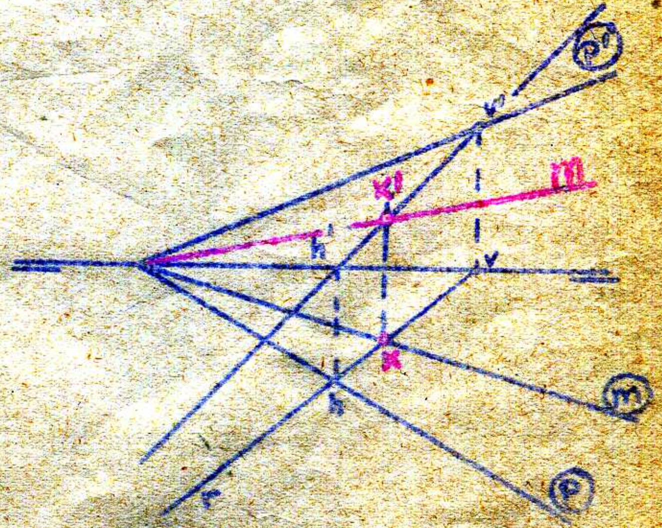


Situar una recta M en P.

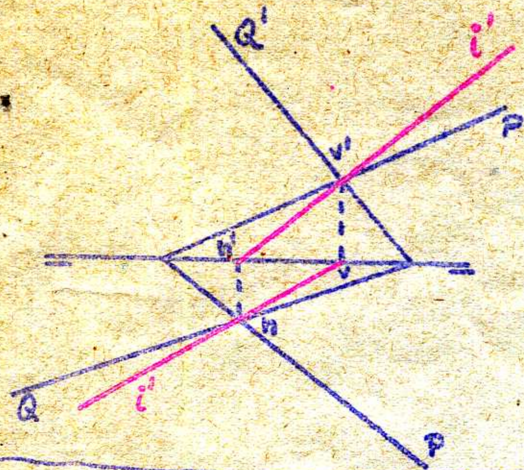


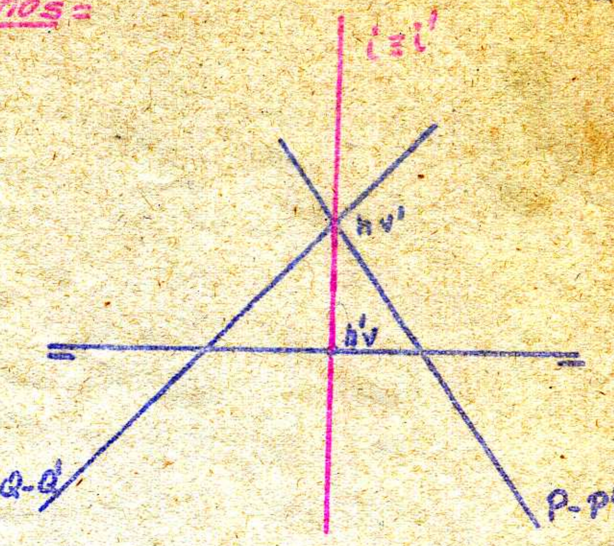
Tomamos una recta auxiliar r (paralela al H^al) que este contenida en el plano P, y que corte a R.

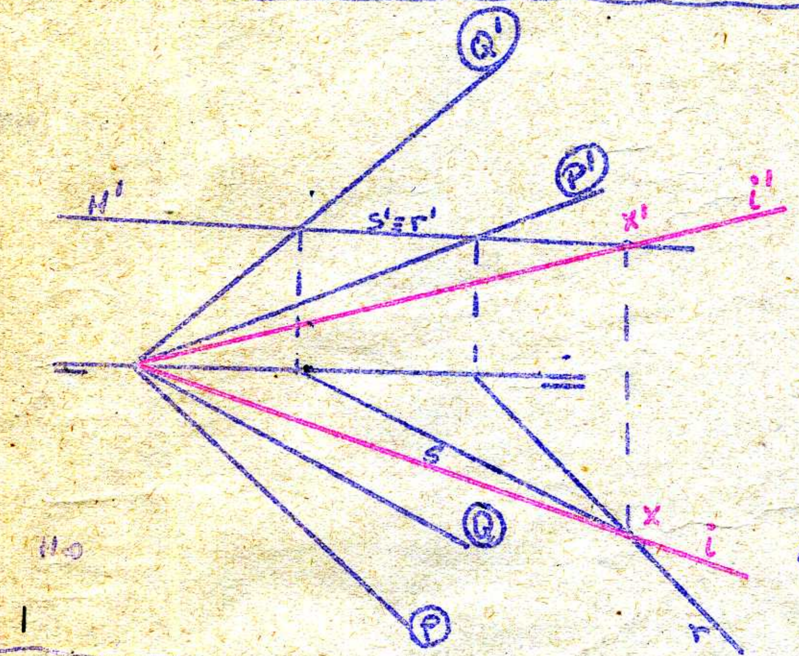
Situar M en P



= Interseccion de Planos =

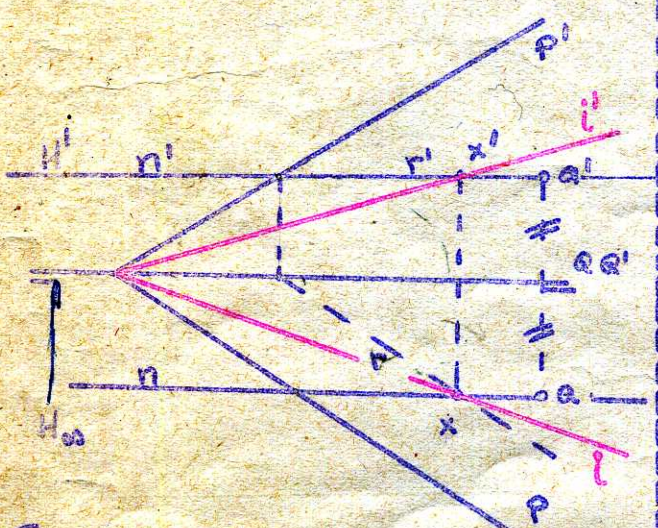






Para esta interseccion tomo un plano auxiliar, el mas facil (un paralelo al H^al), y hallo su interseccion con los planos P y Q, y me dan respectivamente r y s. Donde r y s se cortan tengo un punto de la interseccion.

Interseccion con el 1er bisector



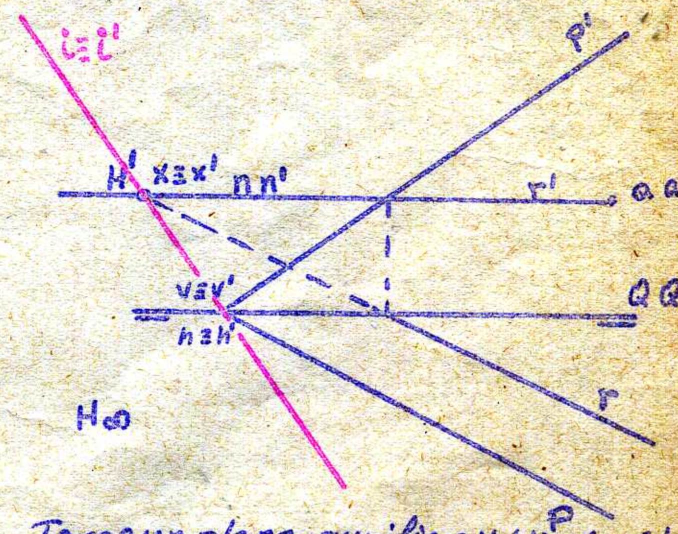
Tomo un plano auxiliar H (∥ al H^al)

Hallo su interseccion con el plano P → r.

Idem con el 1º bisector (Q) → n

corte de r y n (punto de la interseccion) → x

Interseccion con el 2º bisector.

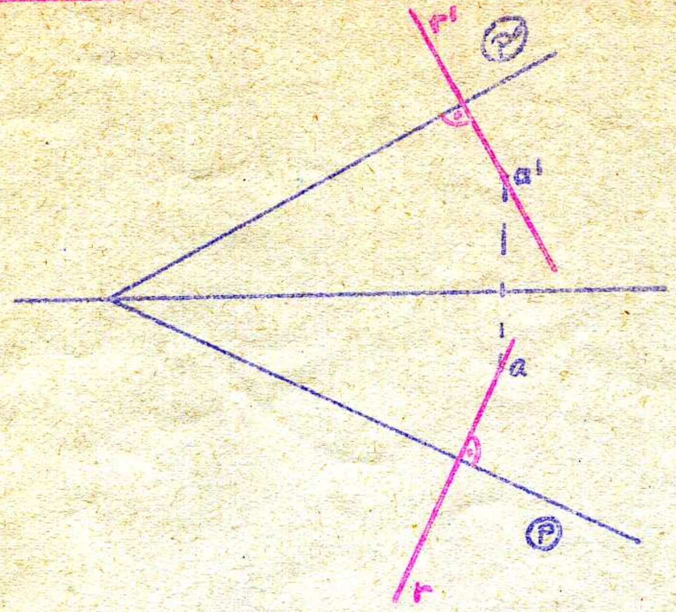


Tomo un plano auxiliar H (∥ al H^al) que cortara a P en r y a Q (2º bisector) en n.

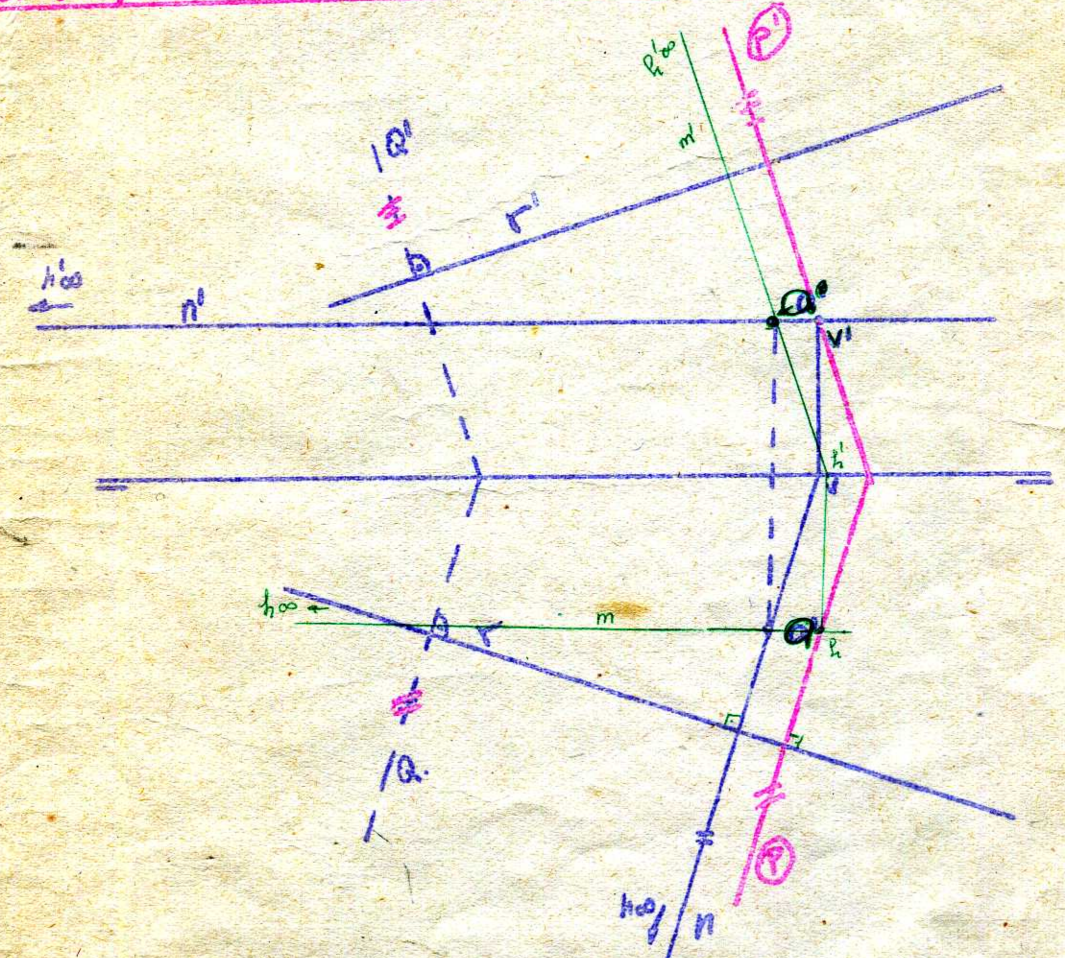
corte de n y r → punto x

Uniendo x con h y v obtengo → i

Por un punto A recta ⊥ a un plano P.

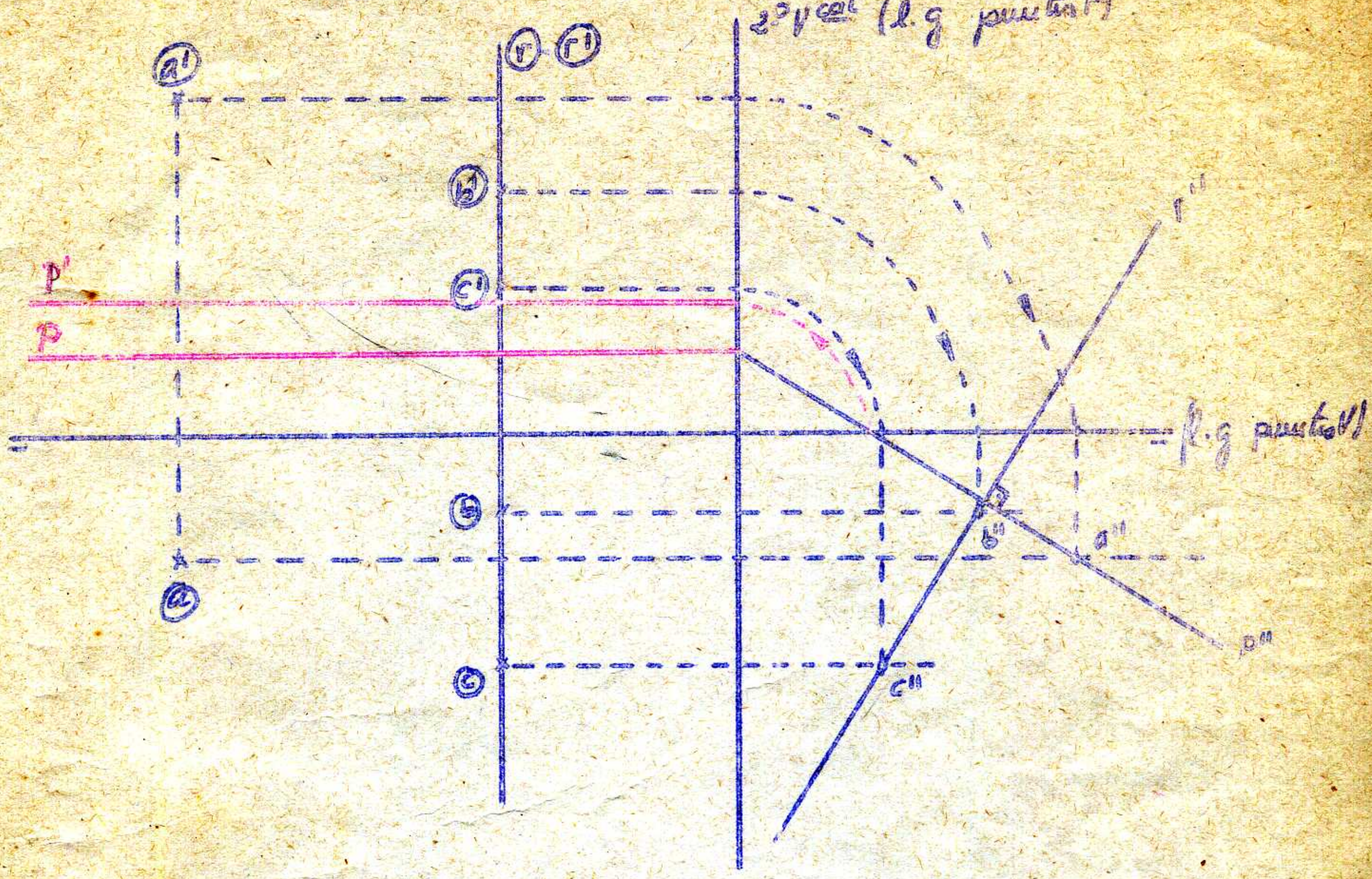


Por un punto A plano ⊥ a la recta R

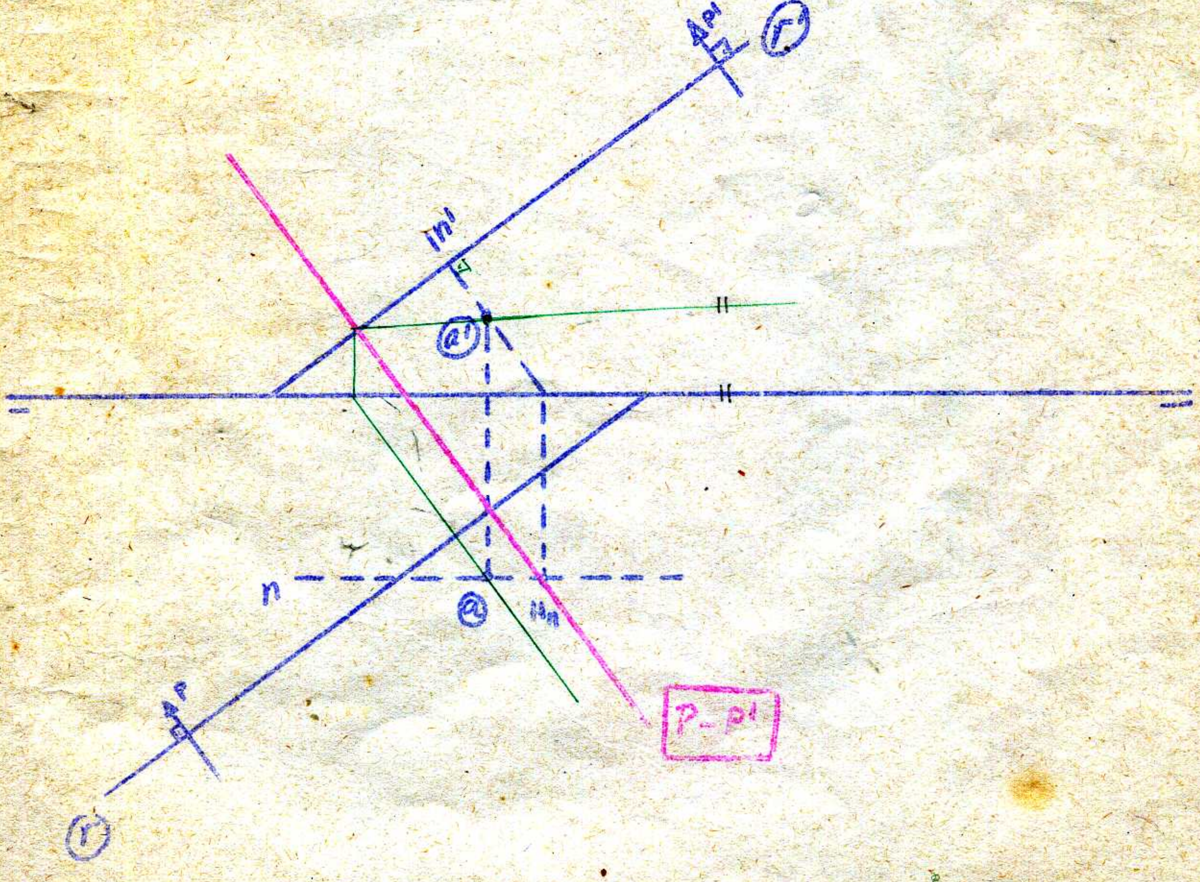


El plano Q es paralelo al solucion
Por el punto Q trazo una hrz del plano P, porque
ya se las direcciones de P, recta n.
Hallo el punto v' de n, Por v' plano P paralelo a Q.

Trazar por (A) un plano P ⊥ a la recta R

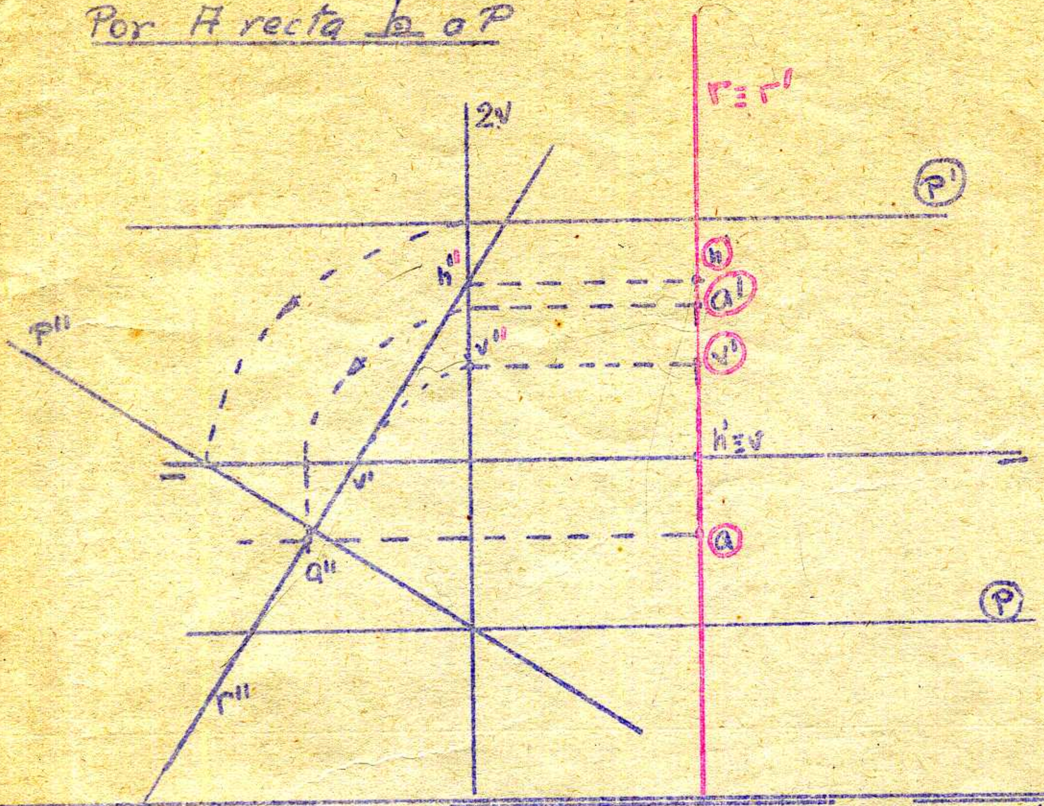


Trazar por (A) un plano P ⊥ a la recta R



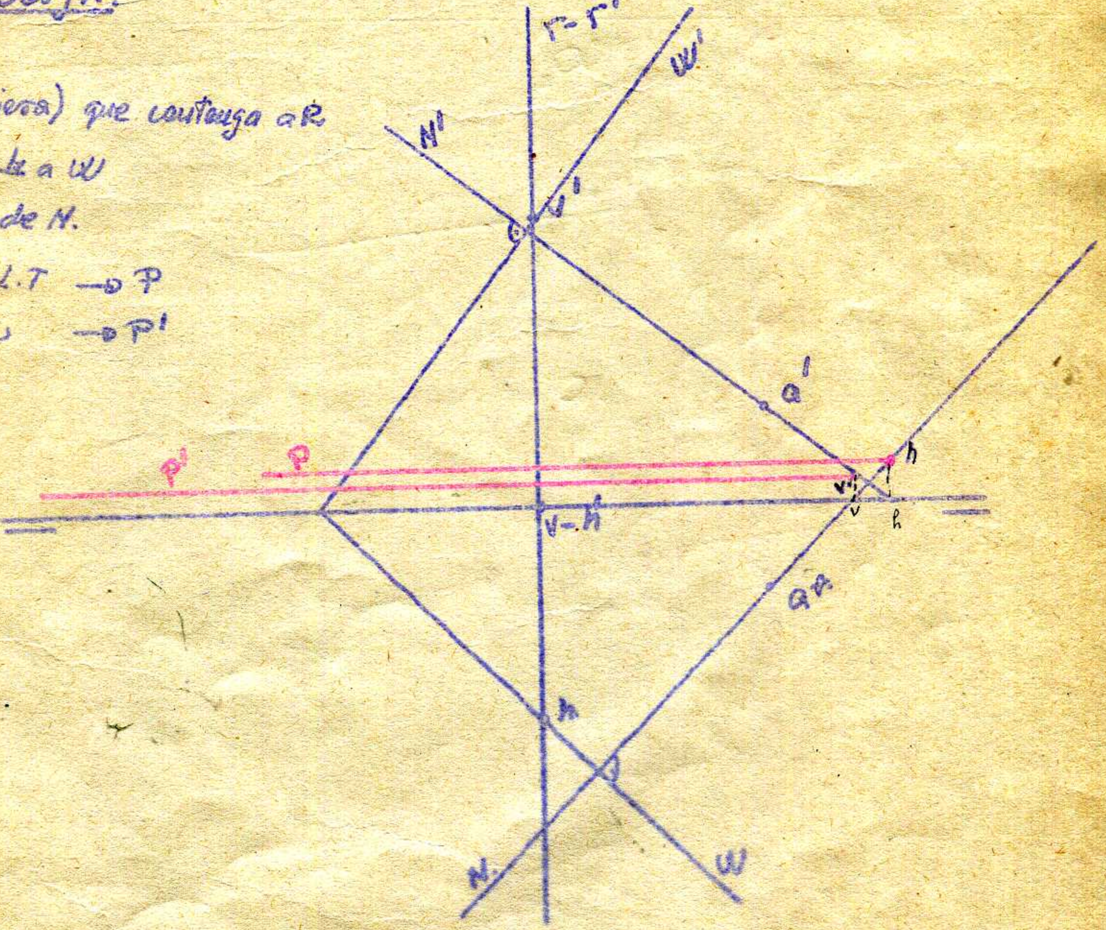
Casos Particulares

Por A recta ⊥ a P

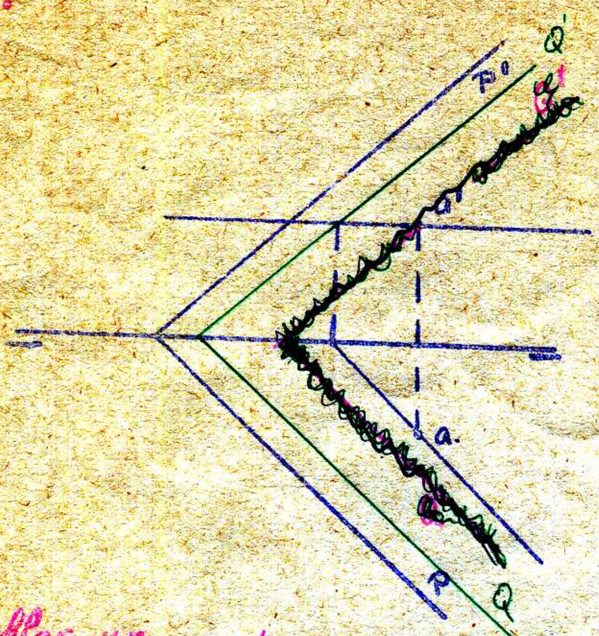


Sin pasar al 2º Vªl trazar por el punto A un plano ⊥ a la recta R siendo R de perfil.

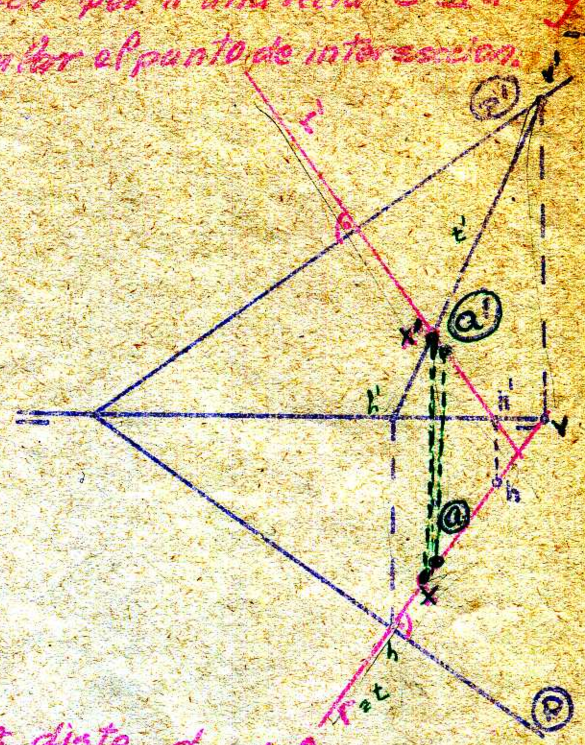
1º) plano W (cualquiera) que contenga a R.
2º) Por A recta N ⊥ a W
3º) puntos h y v' de N.
4º) Por h ‖ a L.T → P
Por v' „ → P'



Por un punto A plano paralelo a P.

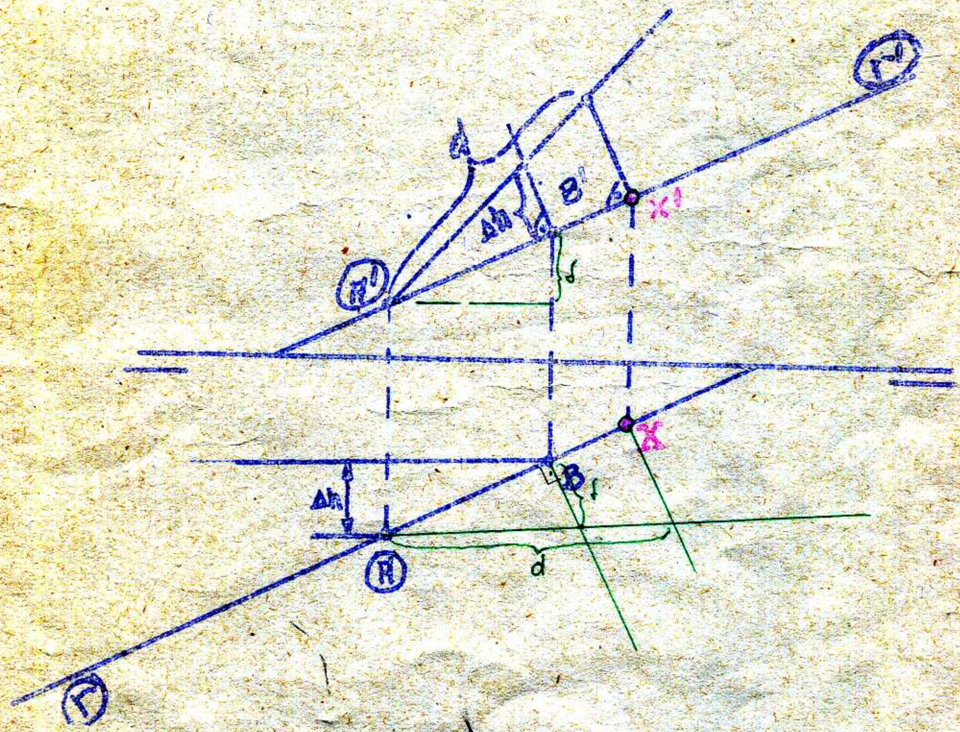


Trazar por A una recta S ⊥ a P y calcular el punto de intersección.



Hallar un punto X sobre la recta R que diste d del punto A

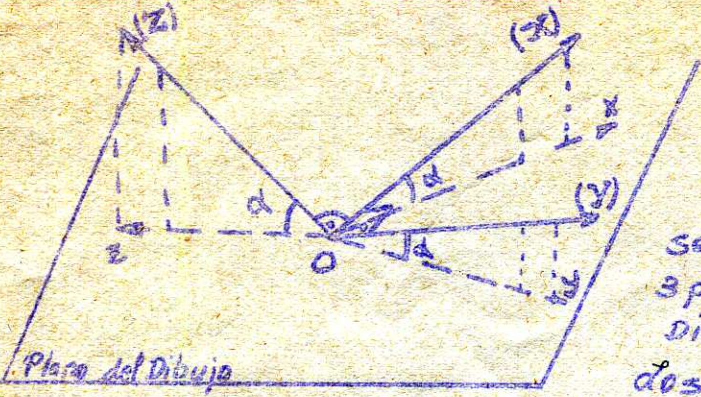
Importante:



Tomo un punto B en la recta r, en la dirección que me pidan, (aquí, el punto mas alto).
Hallo la verdadera magnitud entre A y B.
Sobre la verdadera magnitud llevo la distancia d.
Formo un triangulo semejante al anterior y hallo el punto X pedido.

SISTEMA ISOMETRICO

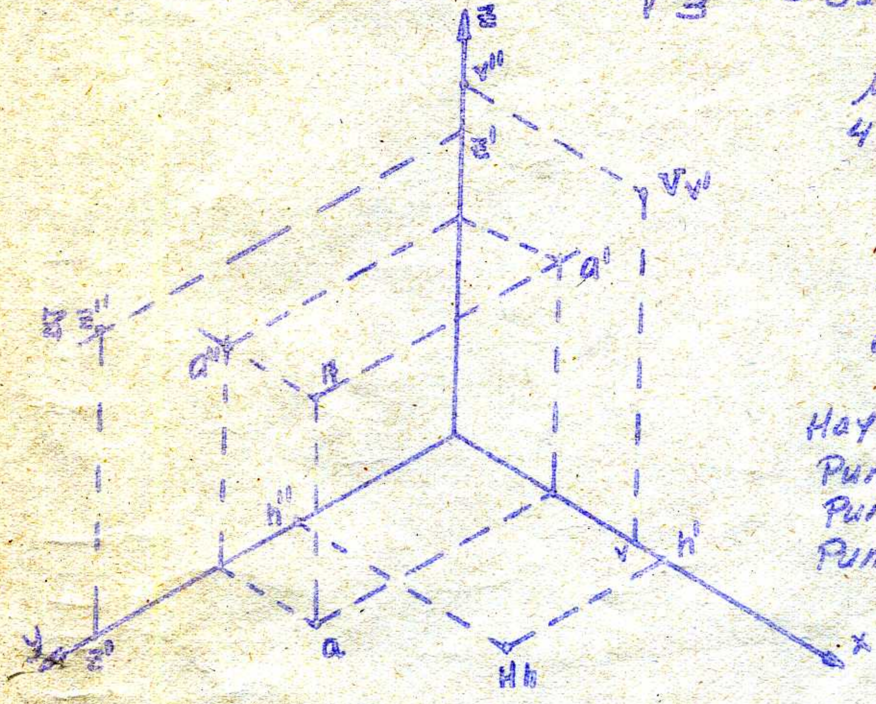
Representación del punto.



Hay 3 planos de representación: el H^{al}, el 1º V^{cl}, el 2º V^{cl}

Para representar un punto se proyecta 1º sobre cada uno de los 3 planos anteriores y luego sobre el Dibujo.

Los 3 ejes forman el mismo ángulo con el dibujo. (α), siendo $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0'816$



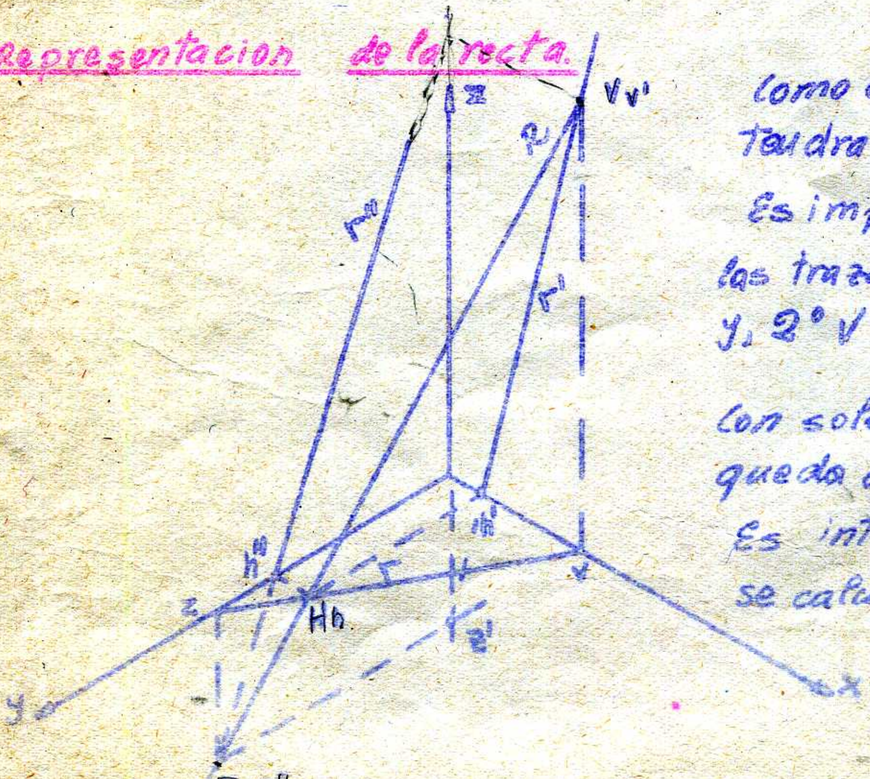
Un punto cualquiera tiene 4 proyecciones.

- A = proyec. directa.
- a = proyec. H^{al}
- a' = proyec. 1º V^{al}
- a'' = proyec. 2º V^{al}

Hay 3 puntos importantes:

- Punto H → del H^{al}
- Punto V → del 1º V^{al}
- Punto Z → del 2º V^{al}

Representacion de la recta.



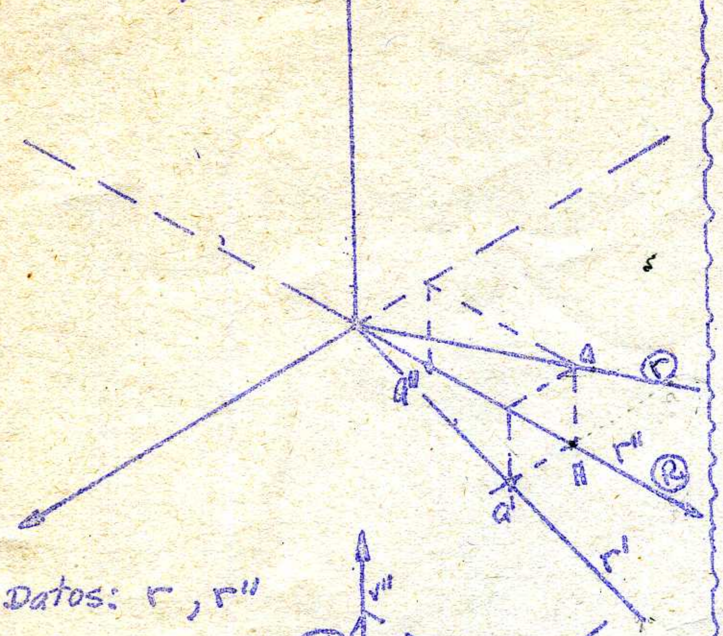
Como el punto, la recta tendrá 4 proyecciones.

Es importante calcular las trazas con el H^{al}, 1º V^{al}, y 2º V^{al}, puntos H, V, Z.

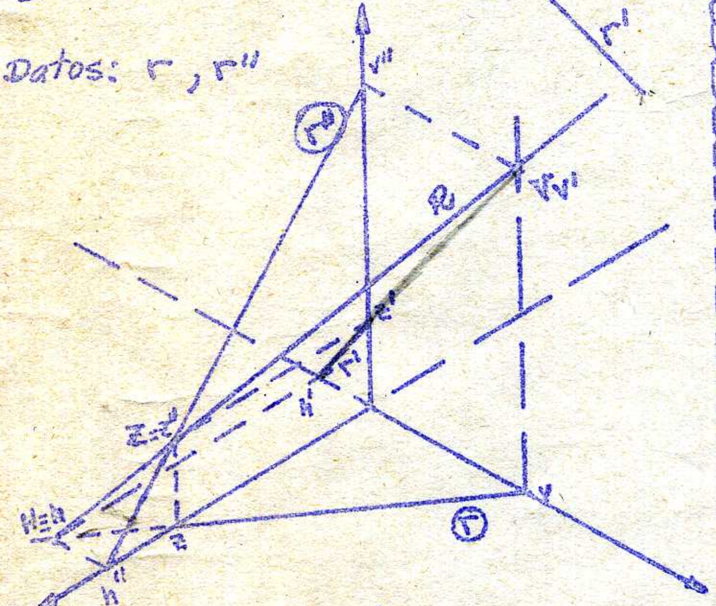
Con solo 2 proyecciones queda definida una recta. Es interesante saber como se calculan las otras dos.

Dadas 2 proyecciones de una recta hallar las otras dos.

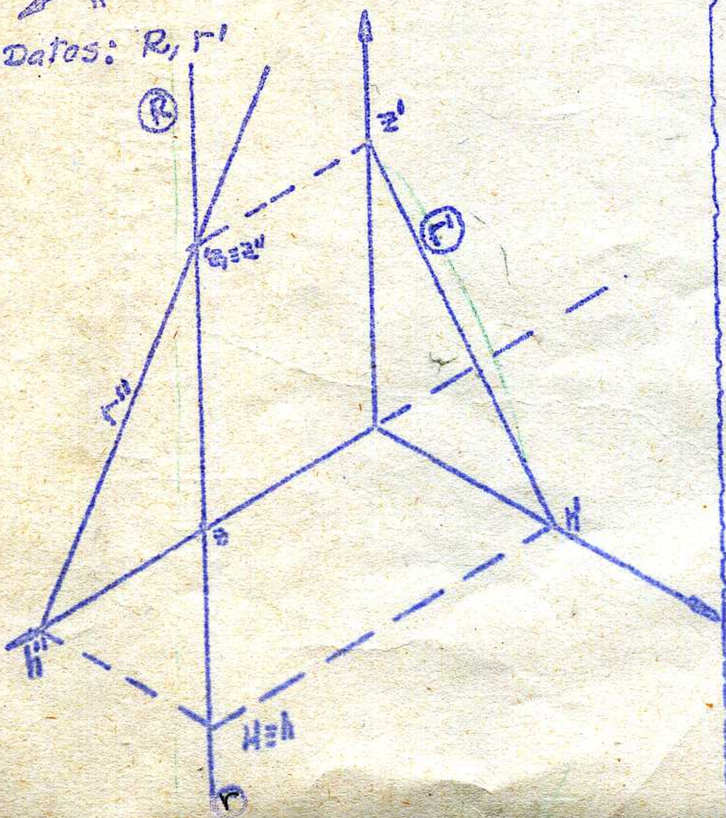
Datos: R y r



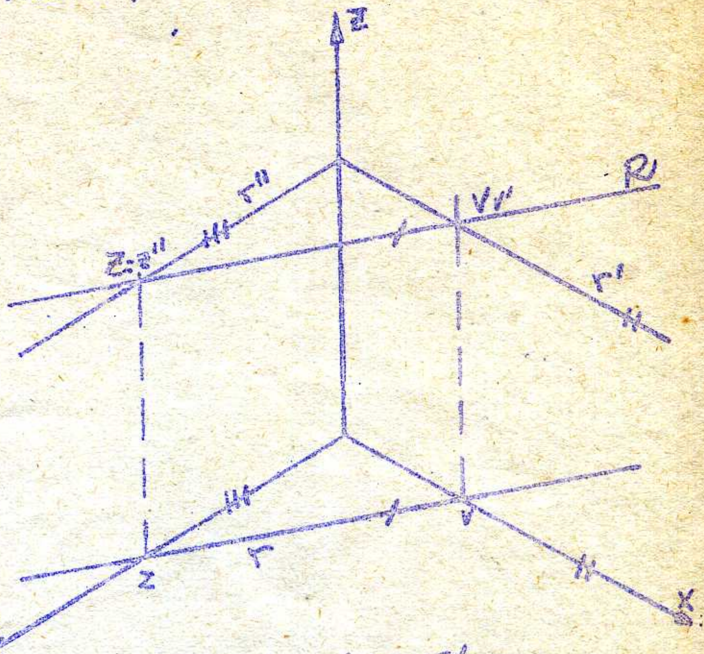
Datos: r, r''



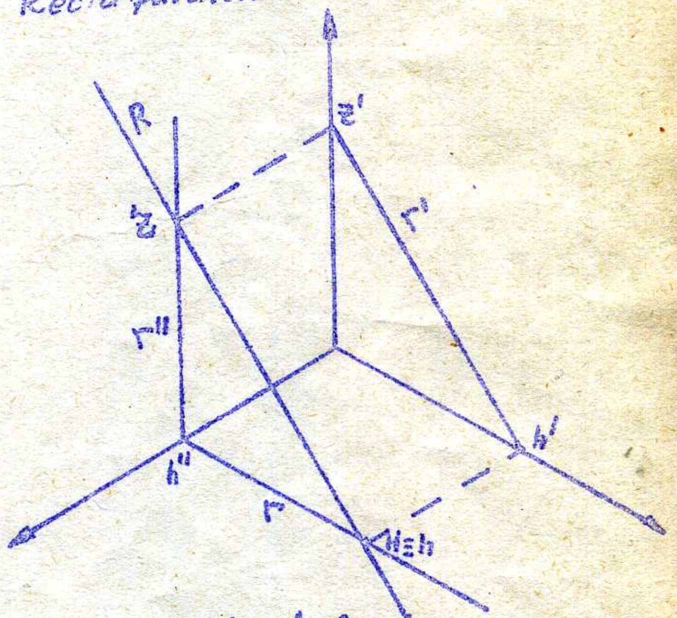
Datos: R, r'



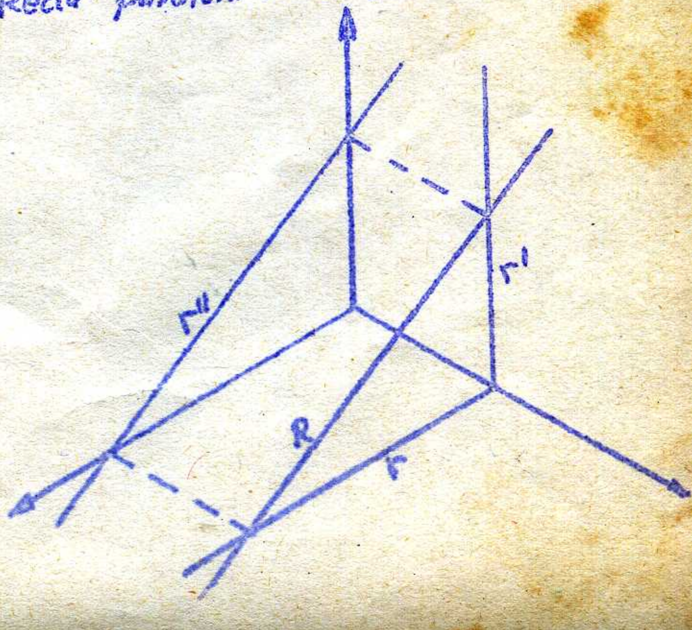
Recta paralela al H^{el}



Recta paralela al 1º V^{el}

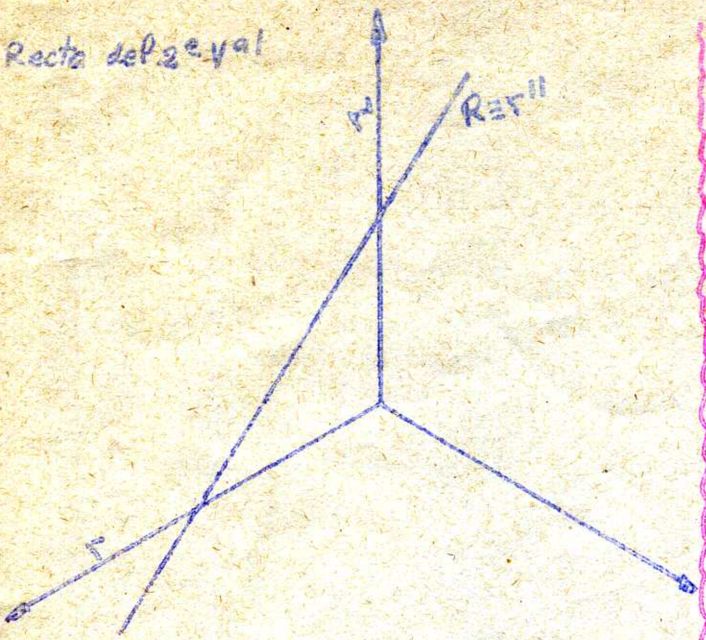


Recta paralela al 2º V^{el}

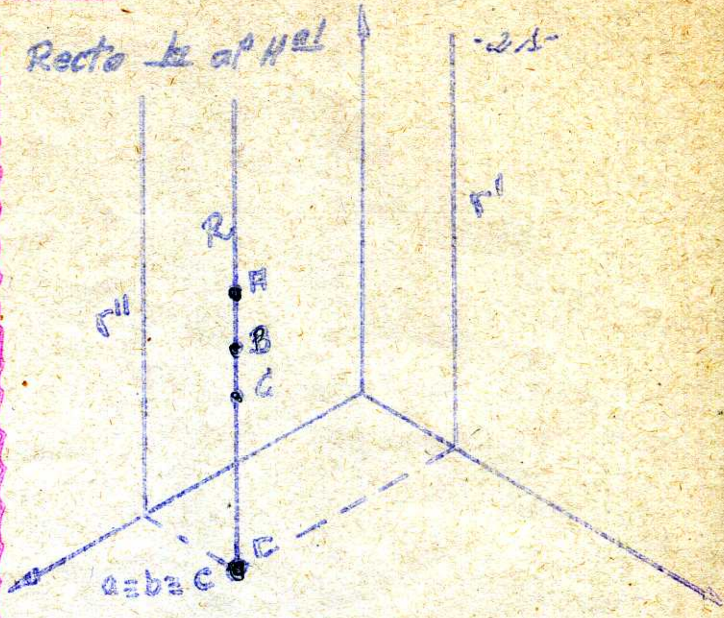


Rectas Particulares

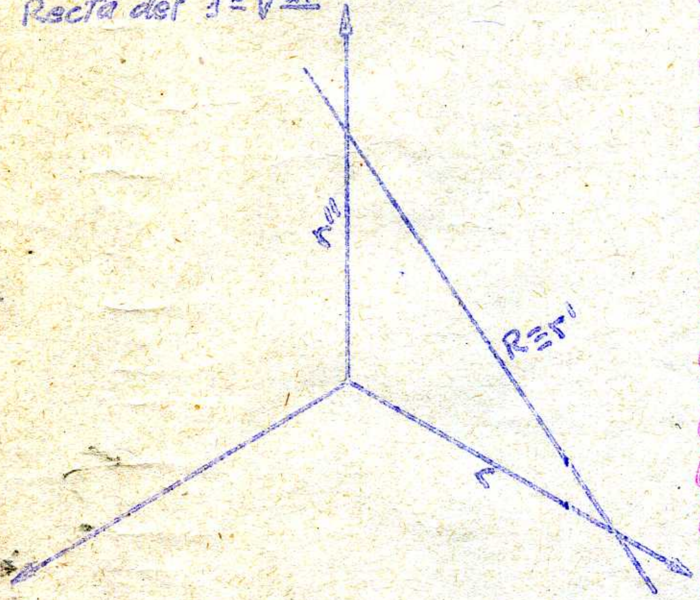
Recta del 2º V al



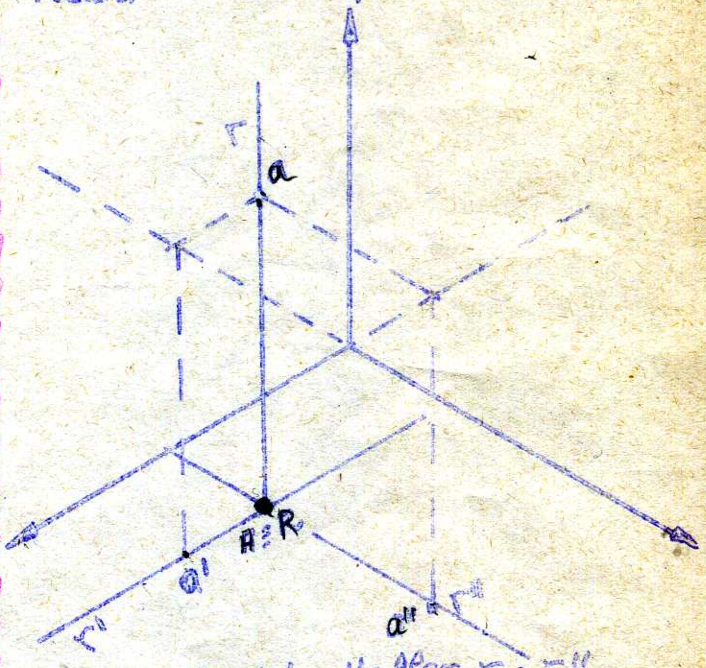
Recta ⊥ al H al



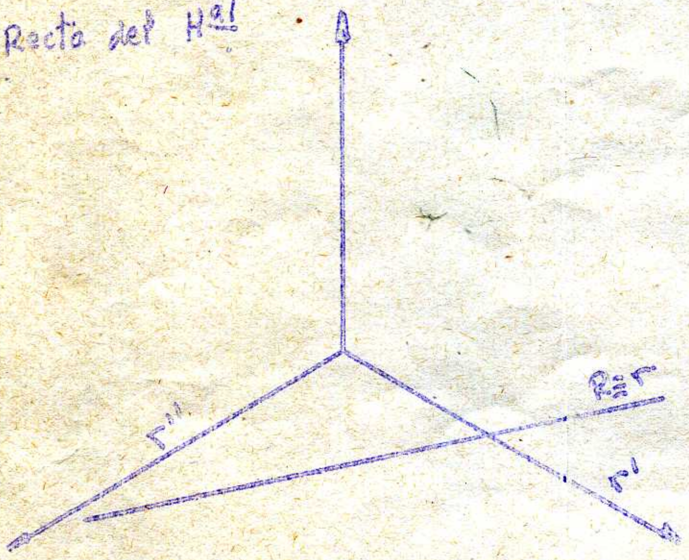
Recta del 1º V al



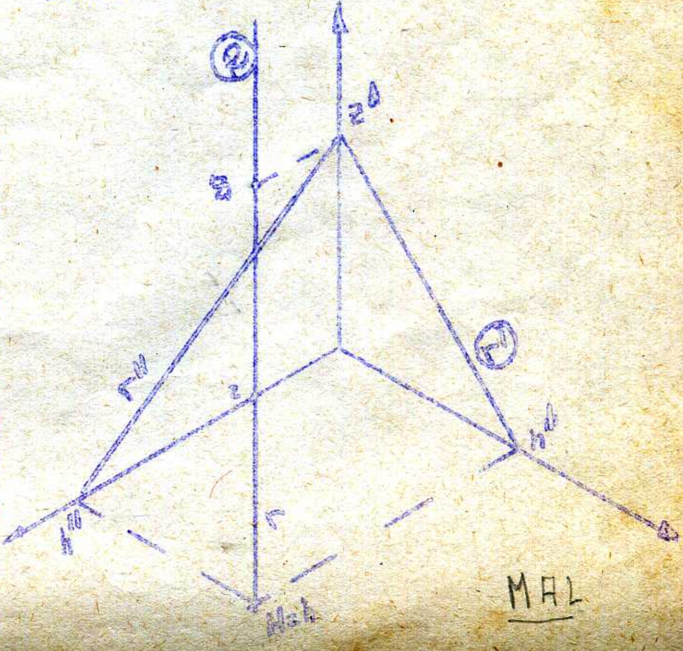
Recta ⊥ al dibujo.



Recta del H al



Datos R y r'. Hallar r y r''



MAL

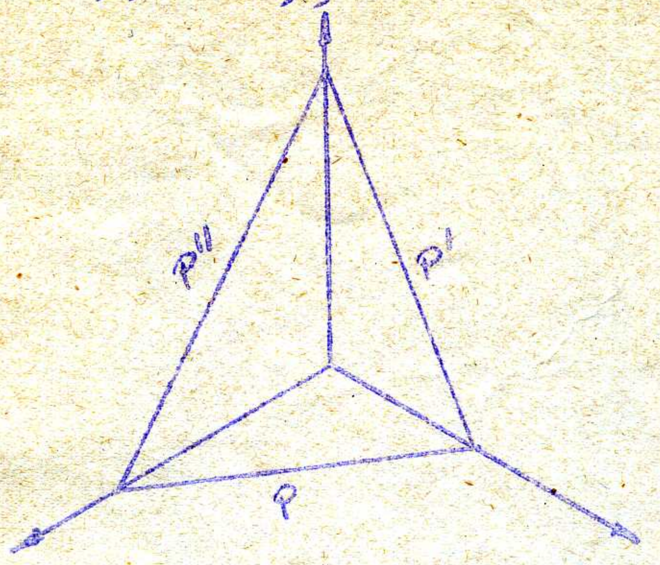
Representacion del Plano.

Un plano queda definido por sus 3 trazas con los planos Hal, 1º Val, 2º Val

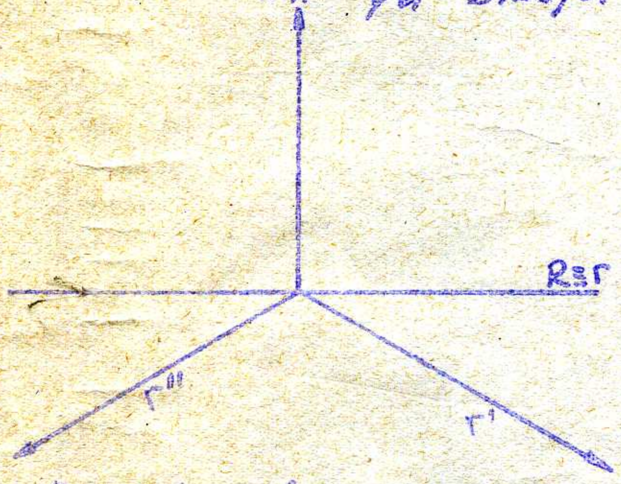
llamaremos P, a la traza del plano P con el Hal

llamaremos P', " " " 1º Val

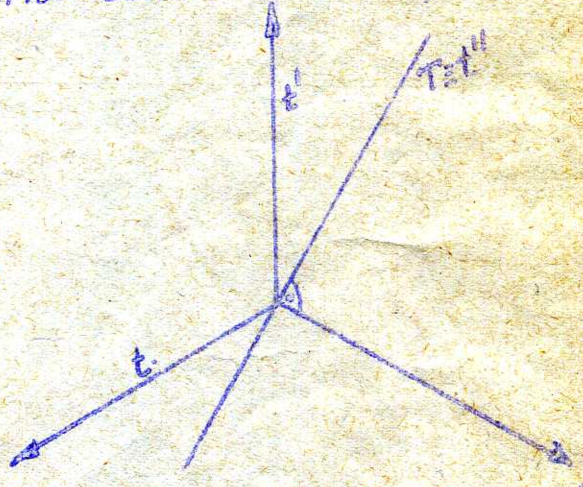
" " P'', " " " 2º Val



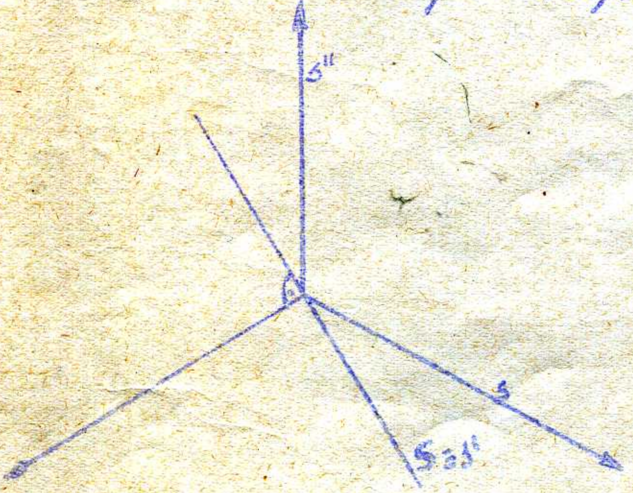
Interseccion del Hal y el Dibujo.



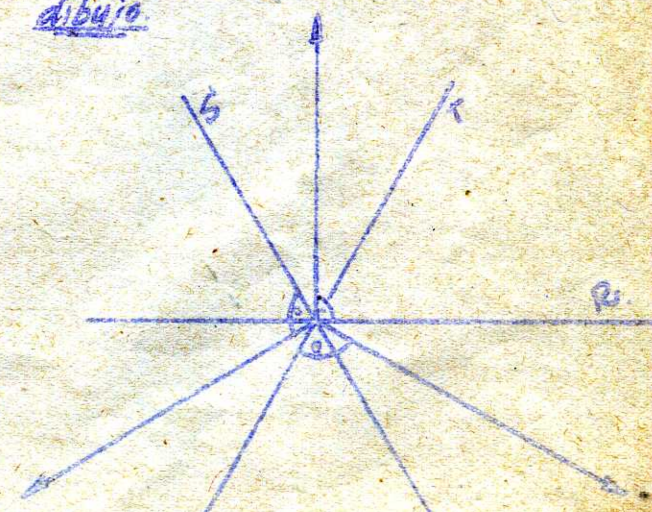
Interseccion del 2º Val y el Dibujo.



Interseccion del 1º Val y el Dibujo.

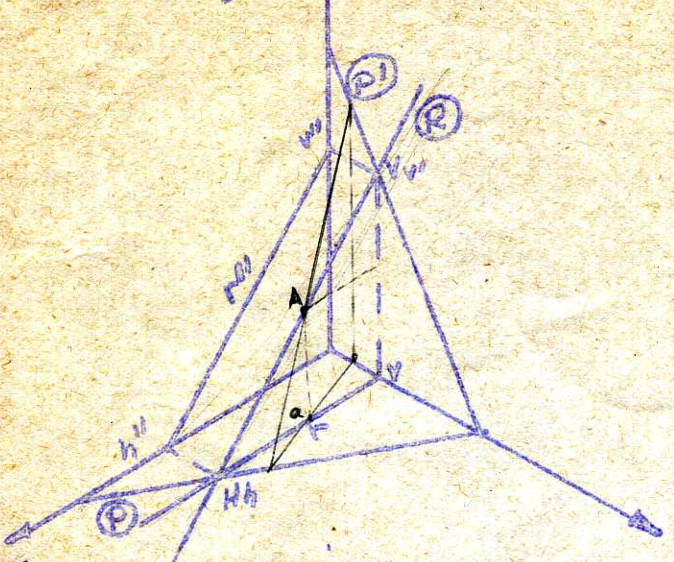


Representacion del plano del dibujo.

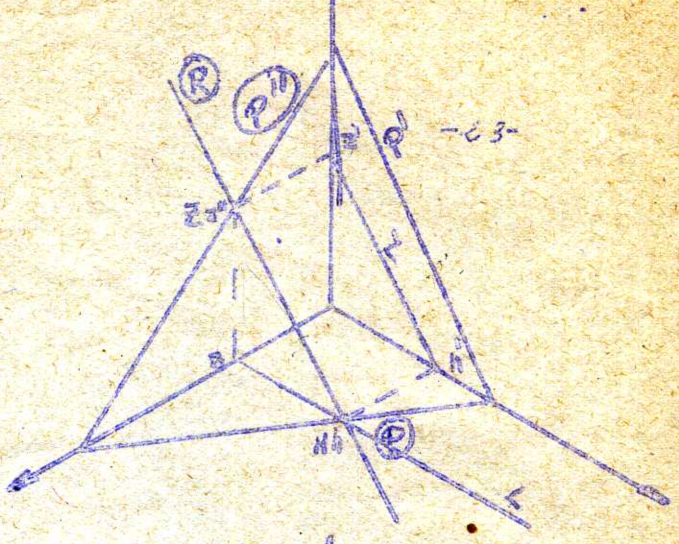


Situar una recta en un plano.

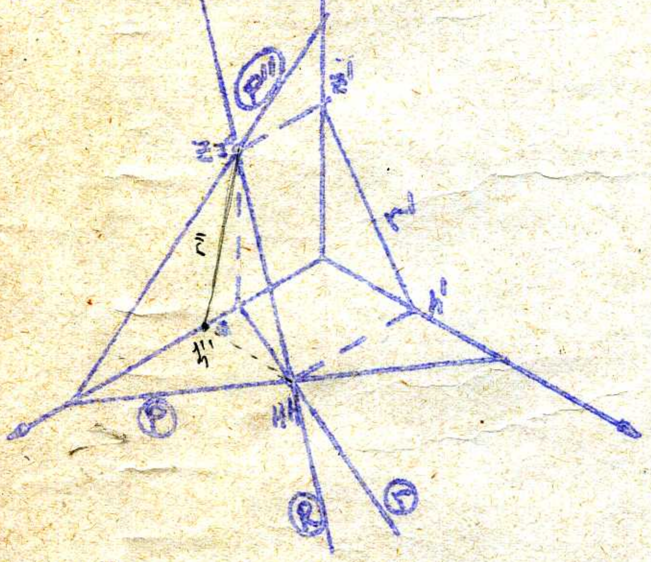
Datos: P P' y R



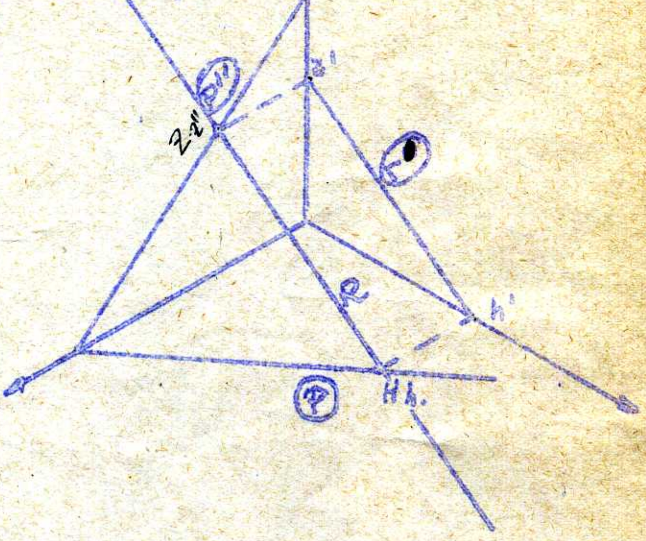
Datos: P y P'' y R



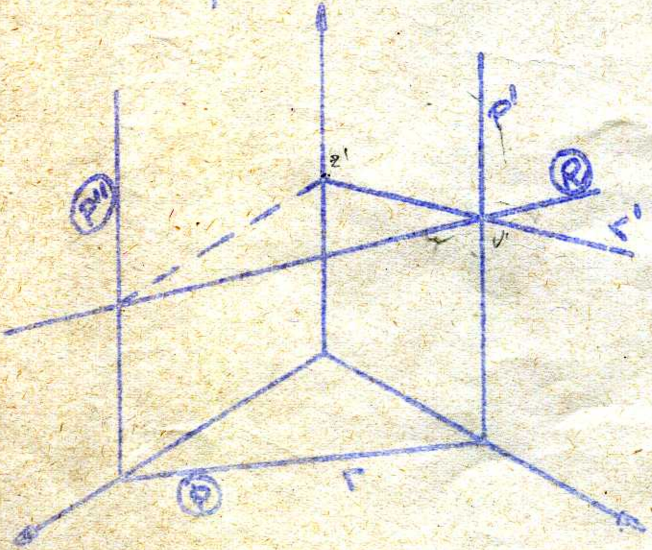
Datos: P, P'' y r



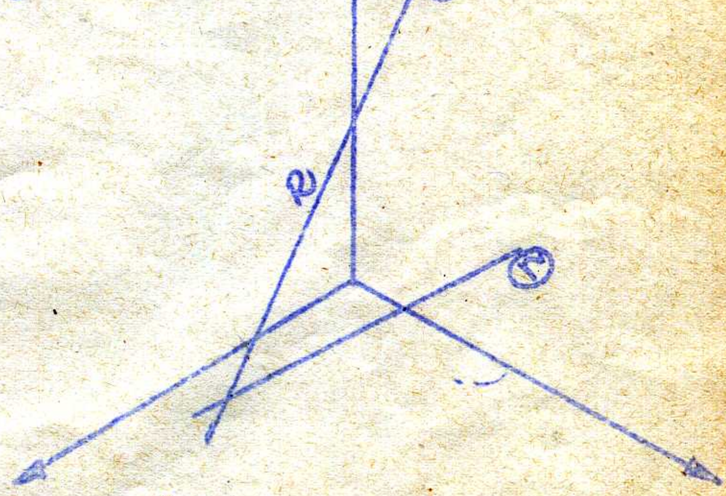
Datos: P, P'' y r'



Datos: P P'' y R



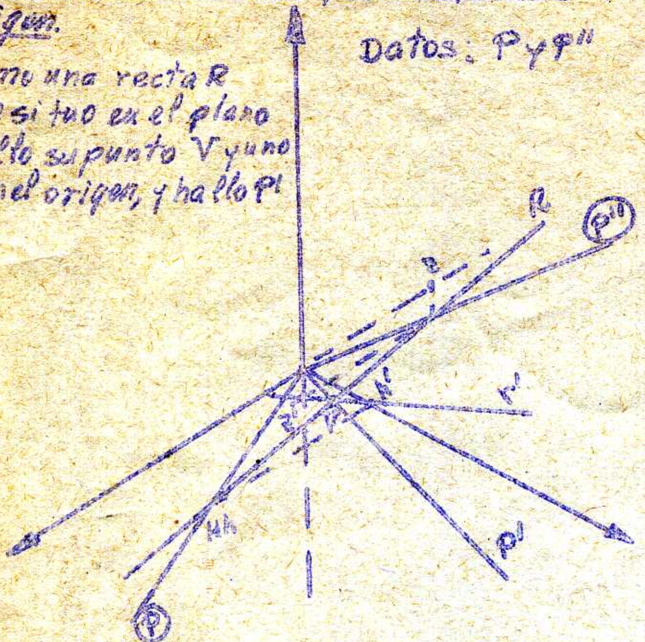
Datos: P P' y r



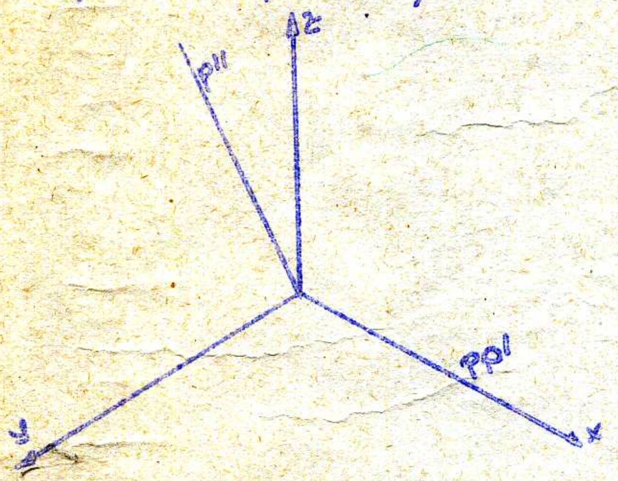
Determinar la 3ª traza de un plano cuando los otros dos pasan por el origen.

Datos: P y P''

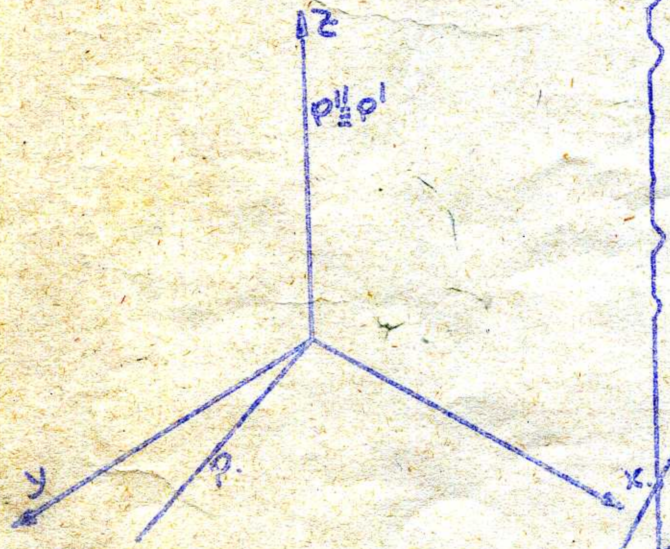
Tomo una recta R y la sitúo en el plano. Hallo su punto V y uno con el origen, y hallo P'



Plano que pasa por el eje x

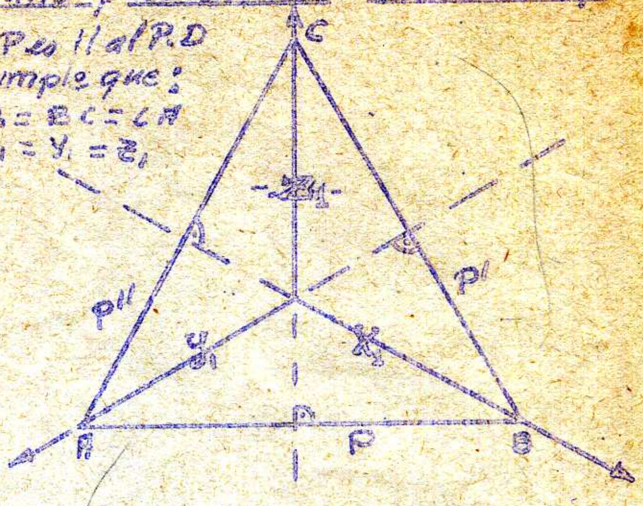


Plano que pasa por el eje z.

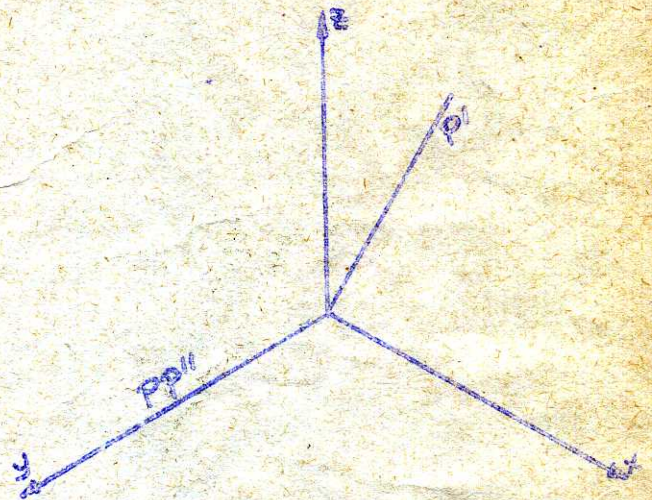


Plano paralelo al Plano del dibujo.

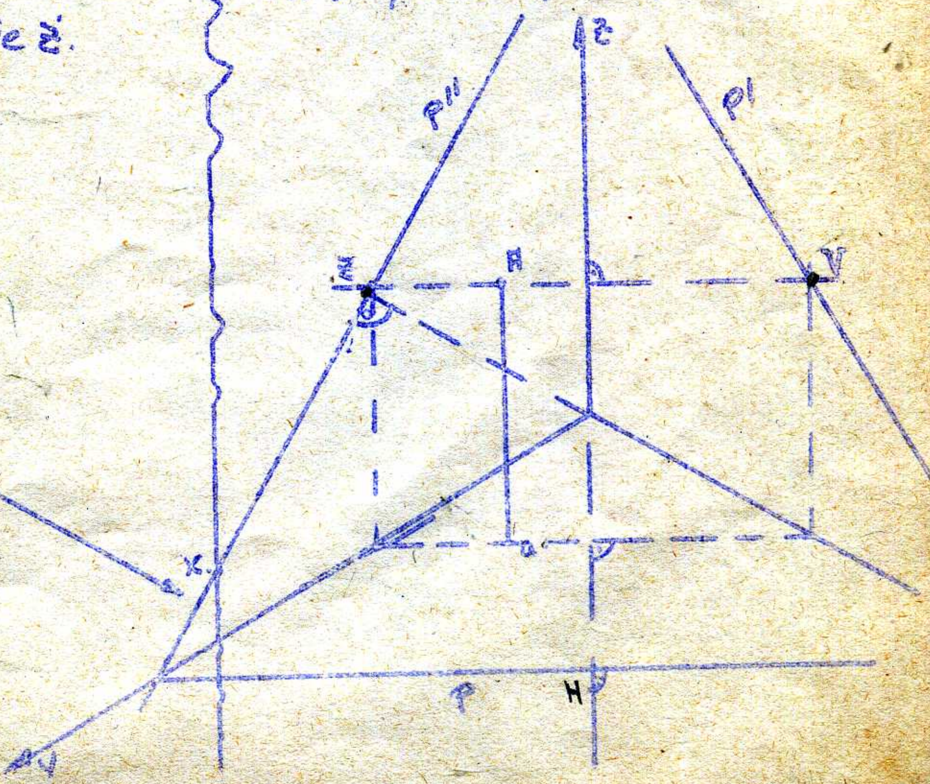
Si P es // al P.D se cumple que:
AB = BC = CA
$X_1 = Y_1 = Z_1$



Plano que pasa por el eje y



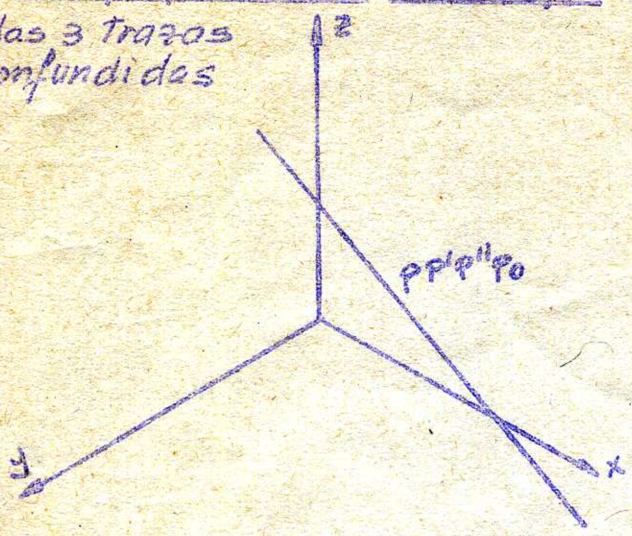
Por un punto A plano paralelo al dibujo.



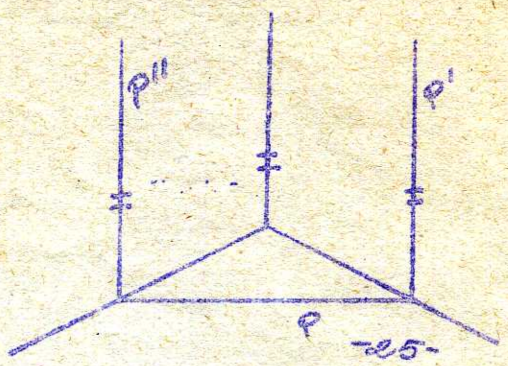
Planos Particulares

Plano perpendicular al dibujo.

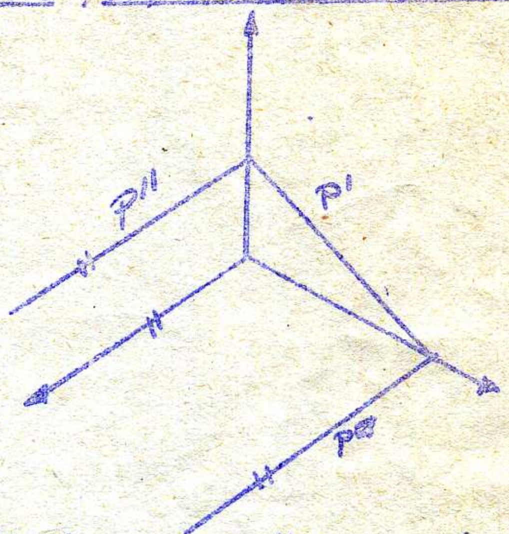
das 3 trazas confundidas



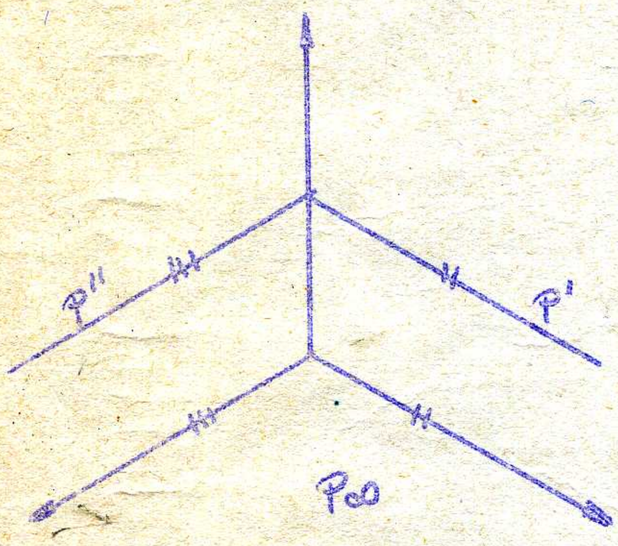
Plano perpendicular al H^al



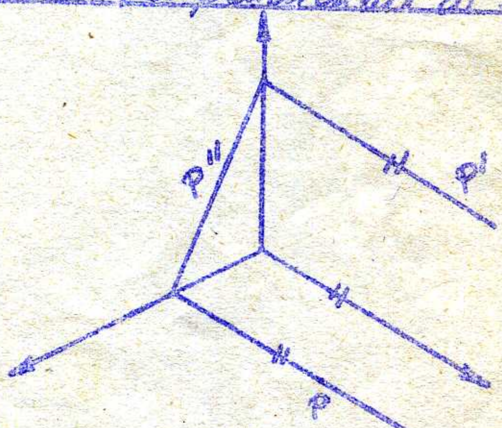
Plano perpendicular al 1° V^al



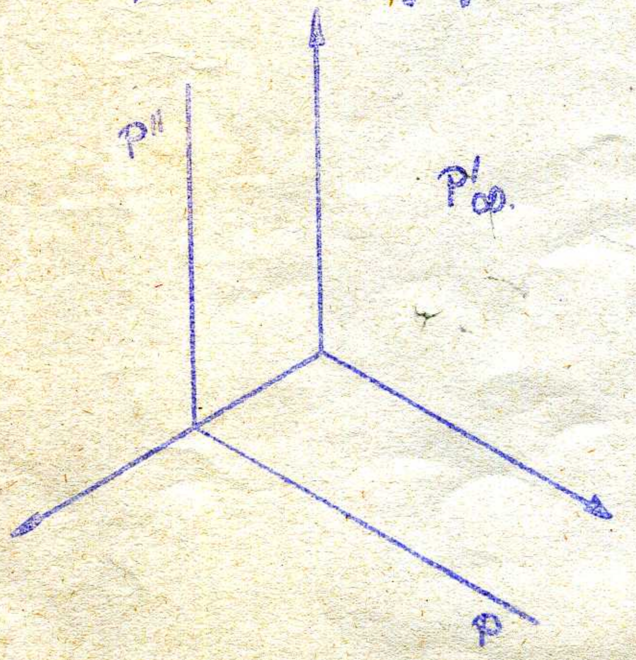
Plano paralelo al H^al



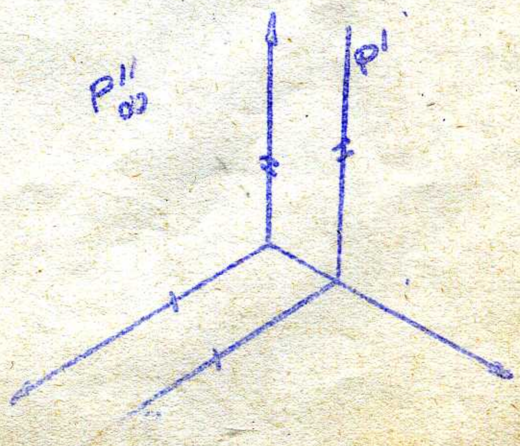
Plano perpendicular al 2° V^al



Plano paralelo al 1° V^al.

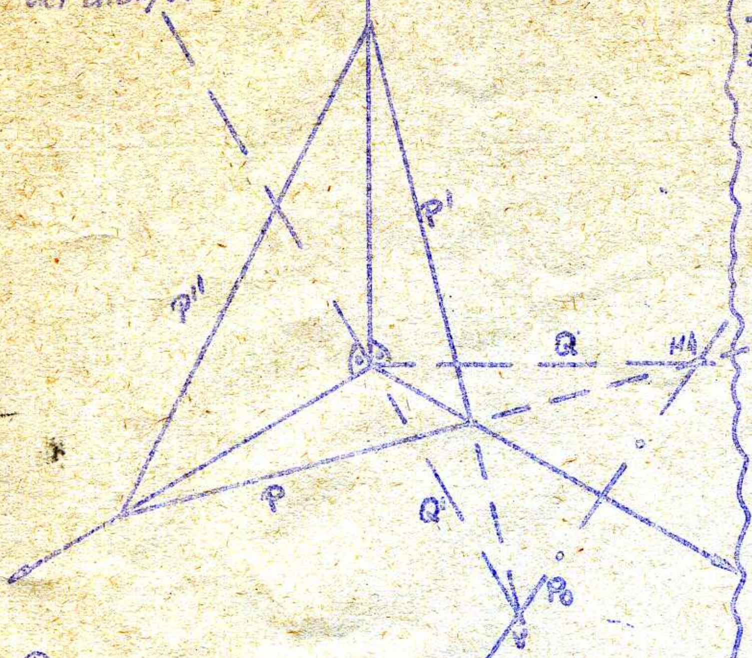


Plano paralelo al 2° V^al.



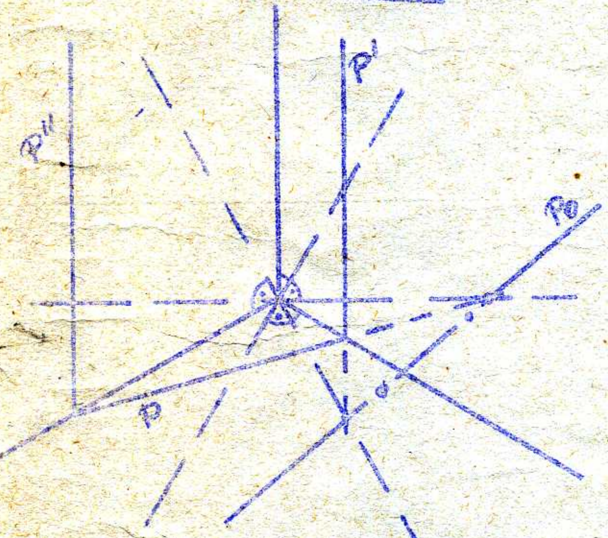
Intersección de un plano P, y el dibujo → Po

Q y Q' son las trazas del plano del dibujo.

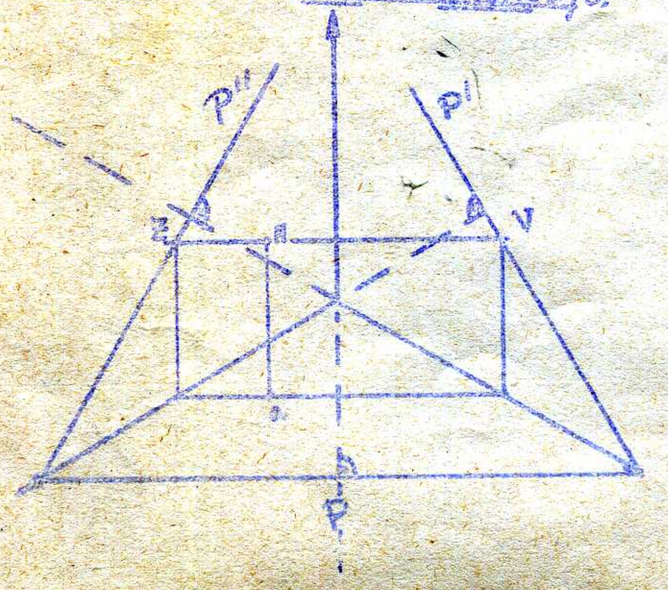


Po se representa a raya y punto.

Intersección de P y el dibujo → Po

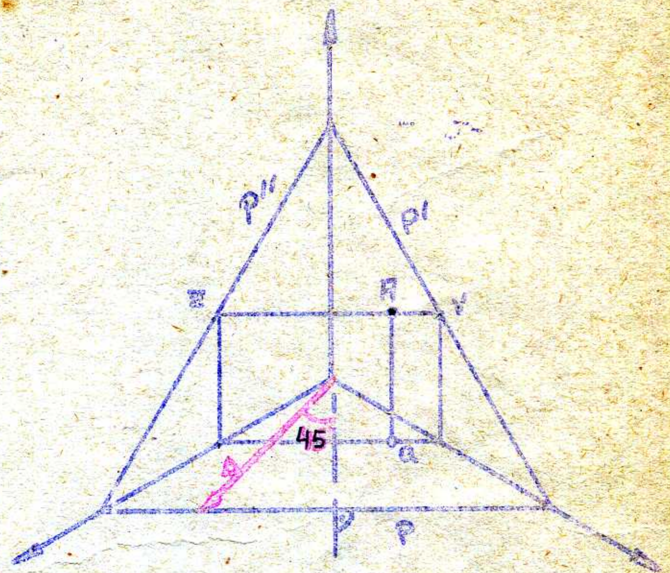


Por A plano paralelo al dibujo.

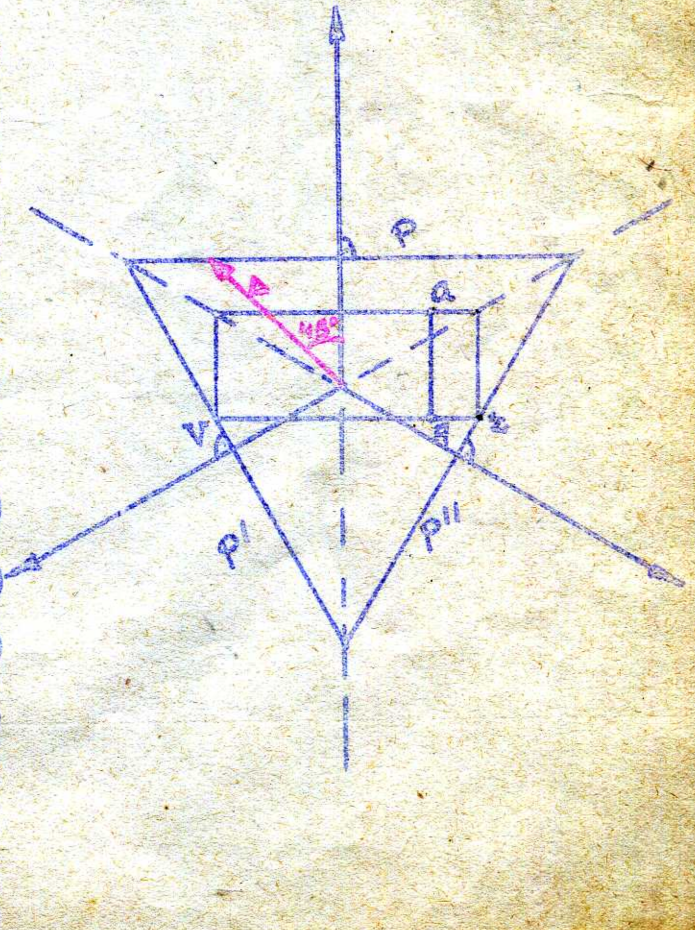


Distancia del punto A al Plano Dibujo

1º) Por A plano // al dibujo.
2º) Linea a 45º con el eje Z
3º) Distancia pedida ≡ a la distancia del origen, por la linea a 45º, a la traza P del plano // al Dibujo



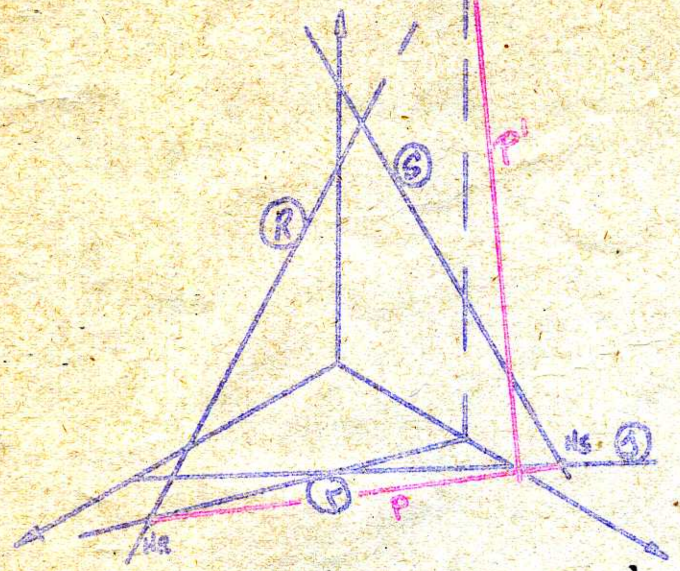
Distancia del punto A al plano del dibujo.



Plano formado por dos rectas que se cortan

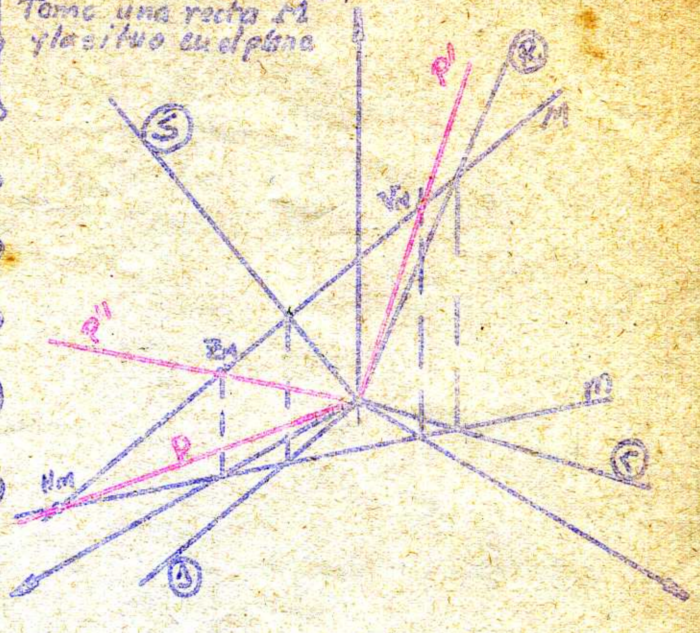
Plano formado por R y S → P

Se hallan: los puntos H de las rectas → P
dos puntos V uniendo → P'
dos puntos B → P''

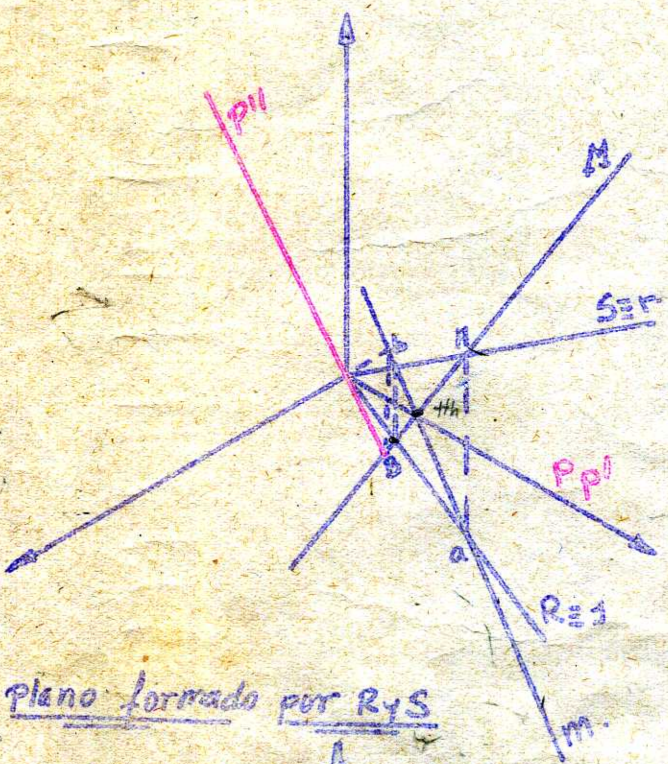


Plano formado por R y S → P

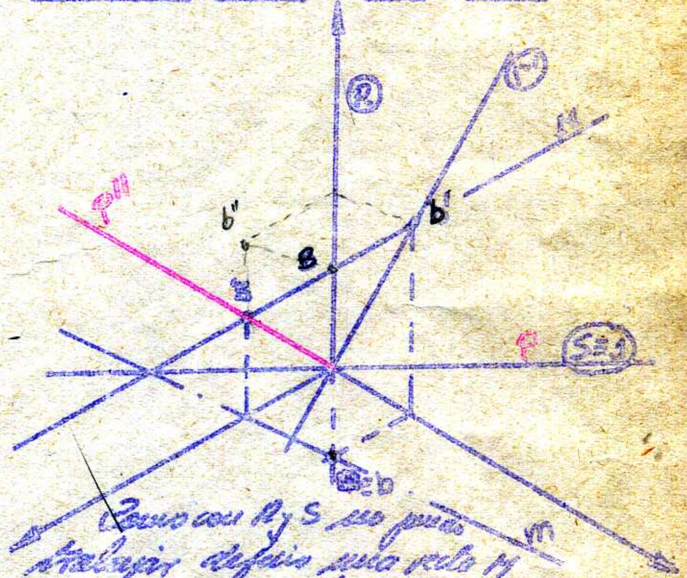
Tome una recta M y la situo en el plano



Plano formado por R y S → P

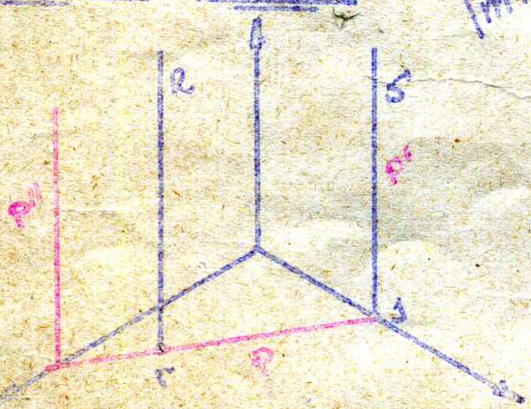


Plano formado por R y S → P

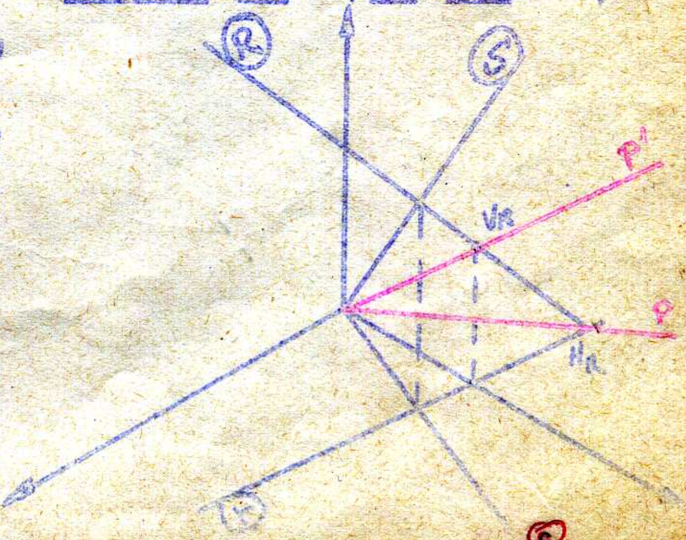


Como con R y S no puedo trabajar defino una recta M que corte a ambas y por tanto está en su plano

Plano formado por R y S

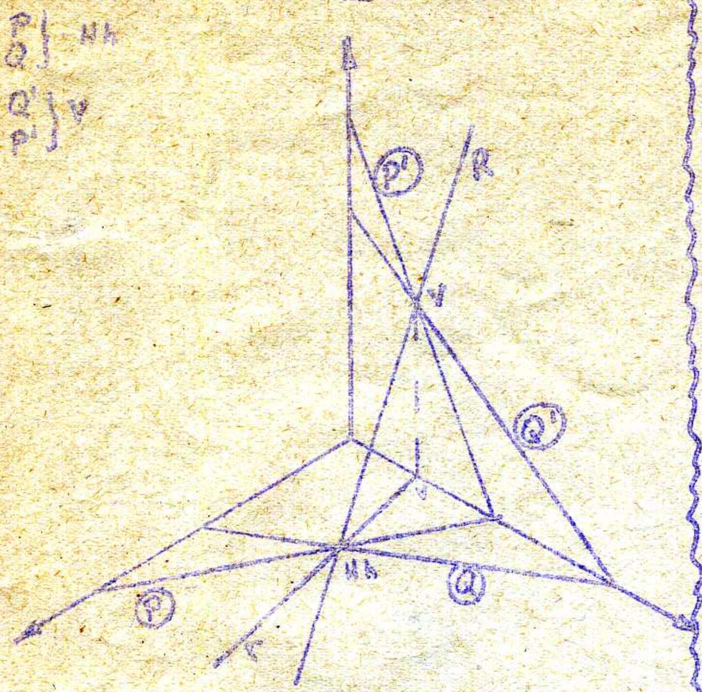


Plano formado por R y S

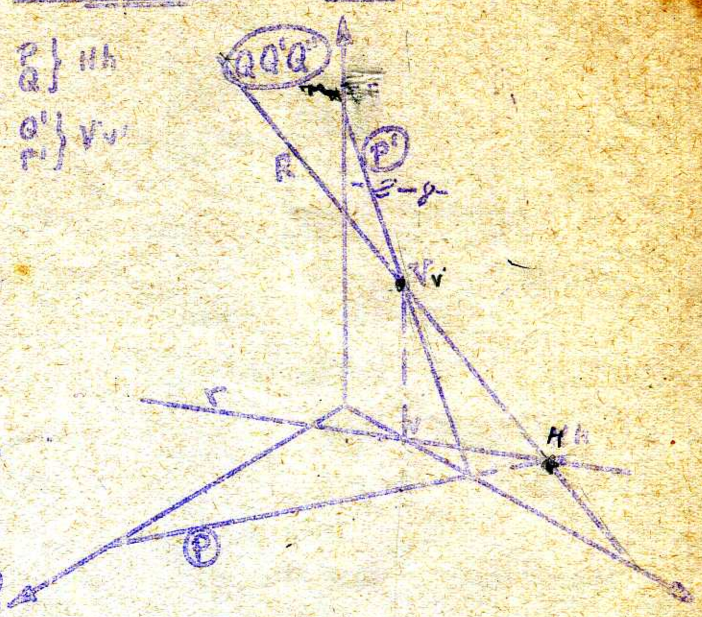


Intersección de planos

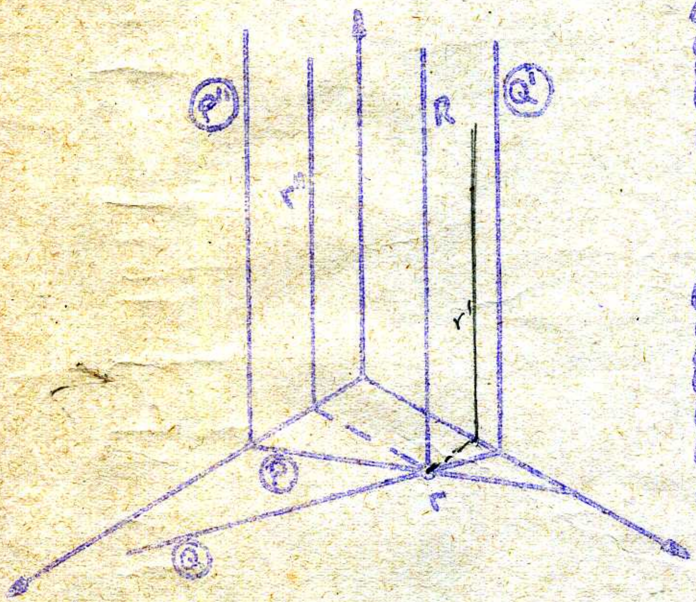
Intersección de P y Q → R



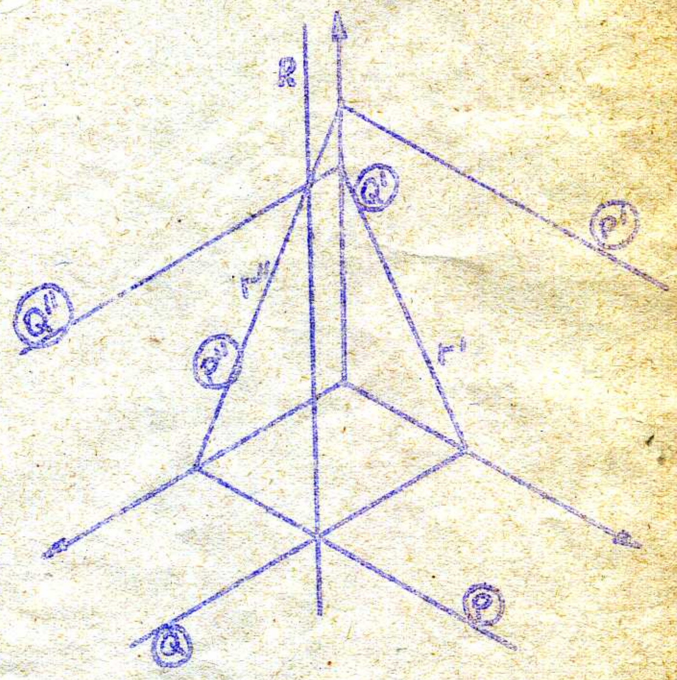
Intersección de P y Q → R



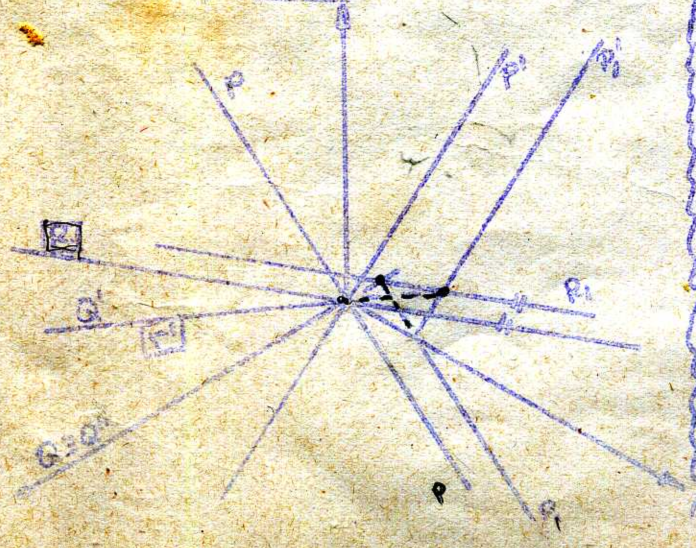
Intersección de P y Q → R



Intersección de P y Q → R



Intersección de P y Q → R



Por un punto (A) recta R ⊥ al plano P

1º Conocemos el pso (P) y el punto A.
Calculamos la int de $\left\{ \begin{array}{l} P \\ \text{pso Dib} \end{array} \right. \rightarrow P_0$

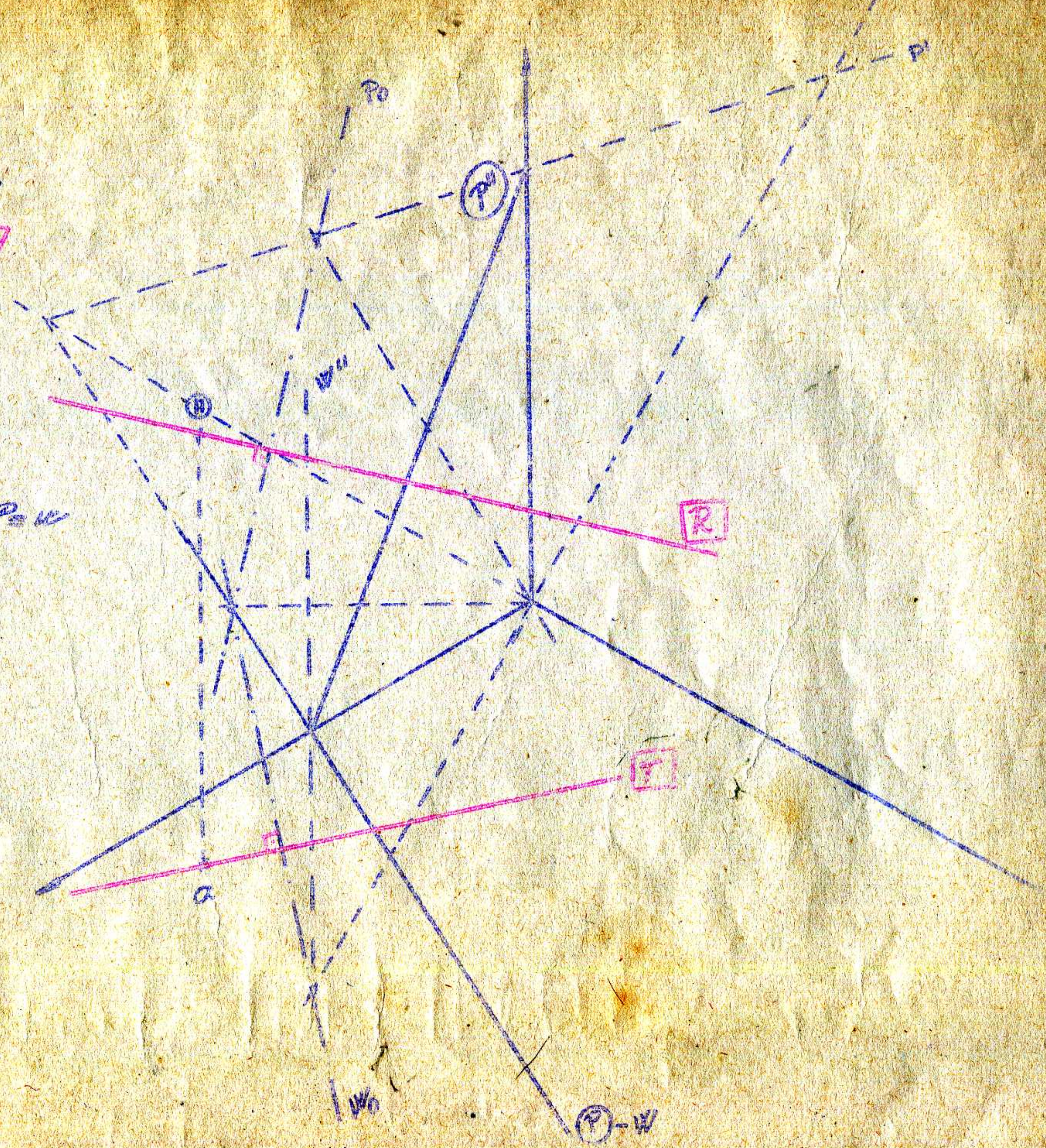
2º Por A recta ⊥ a P_0 → $\boxed{R}$

3º Calculamos un pso proyectante sobre el H.al (W) tal que su traza H.al coincida con la de P ⇒ P ≡ W

4º Calculamos la int de $\left\{ \begin{array}{l} W \\ \text{pso Dib} \end{array} \right. \rightarrow W_0$

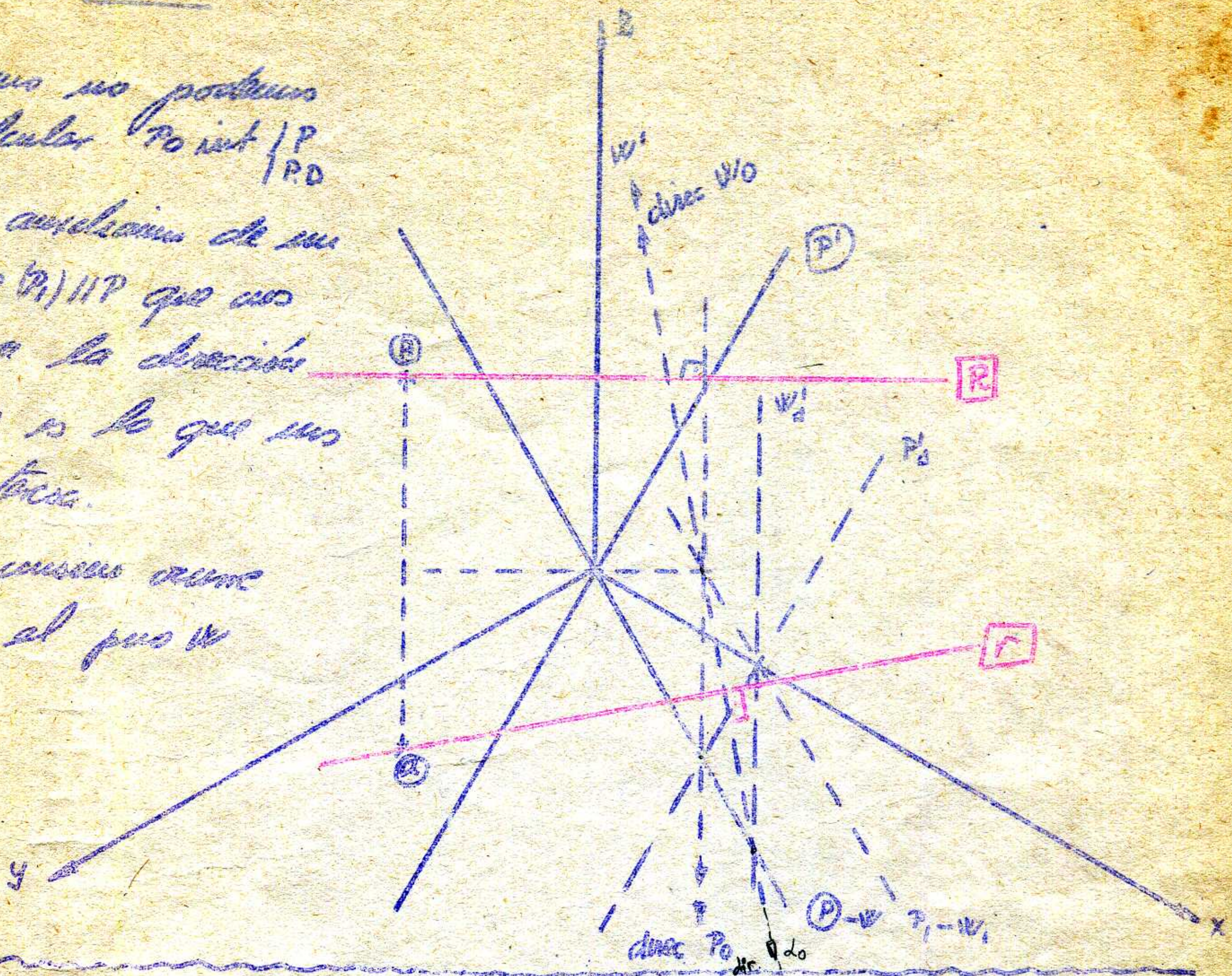
5º Por a ⊥ a W_0 → $\boxed{T}$

Definidas las trazas R y T la recta esta definida

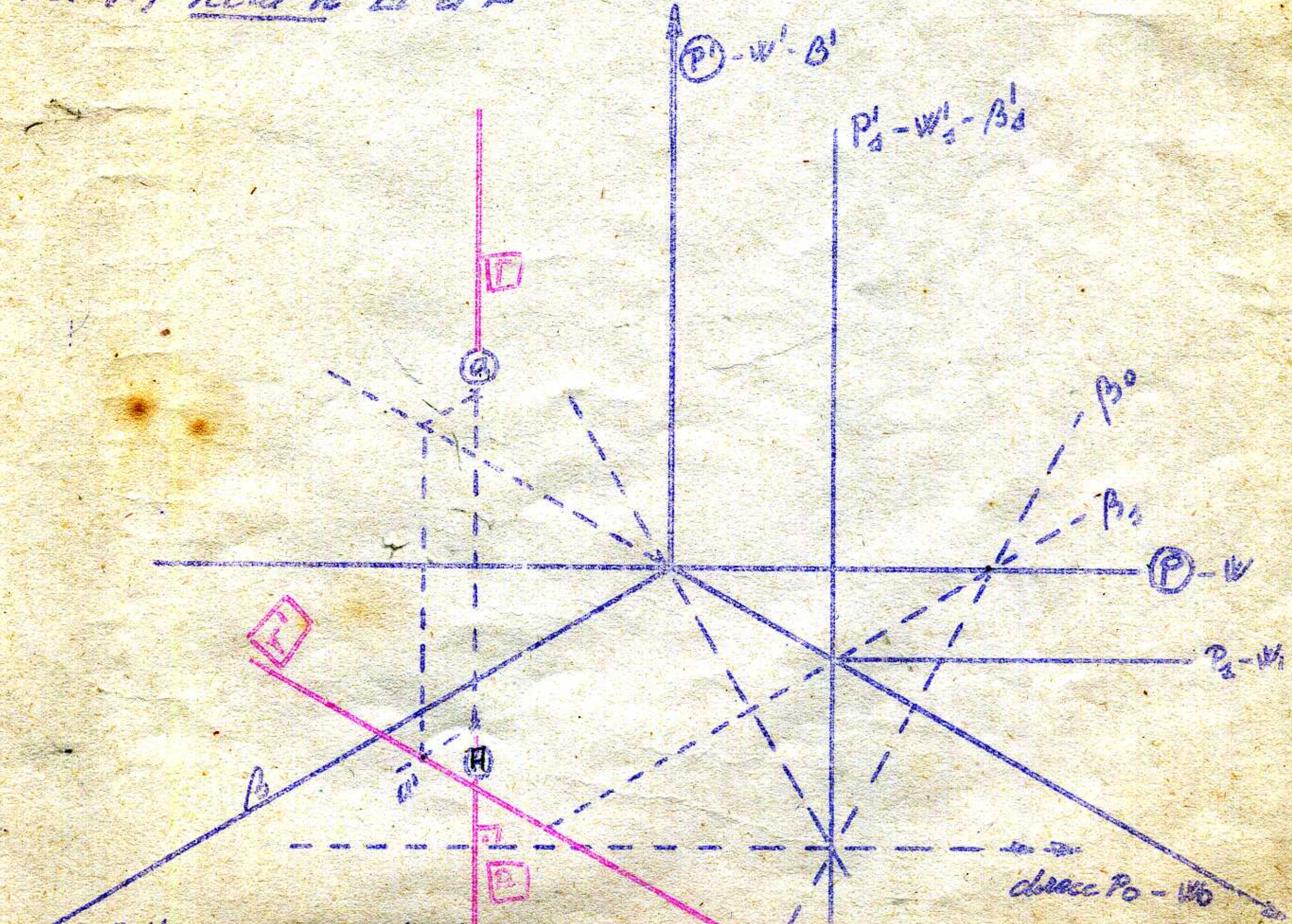


Por (F) recta R ⊥ a P

Como no podemos calcular P_0 int { P / P.D nos ayudamos de un pno $(P_1) \parallel P$ que nos dara la dirección que es lo que nos interesa.
Lo mismo ocurre con el pno W



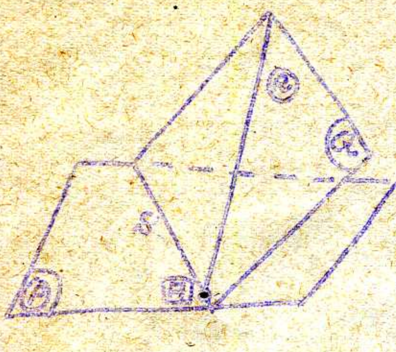
Por (F) recta R ⊥ a P



R // a r ya que W0 // P0

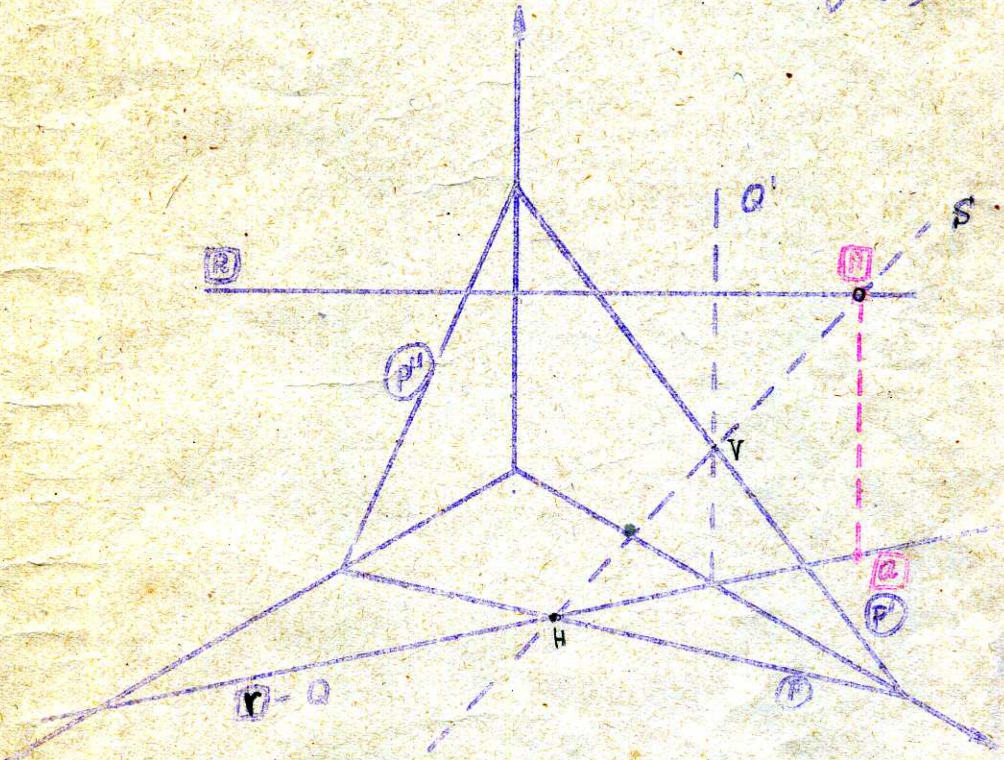
INTERSECCION DE RECTA Y PLANO

La intersección de una recta R y un plano P es un punto A. Para calcular la intersección de una recta R y el pno P, hacemos pasar a un pno Q por R.



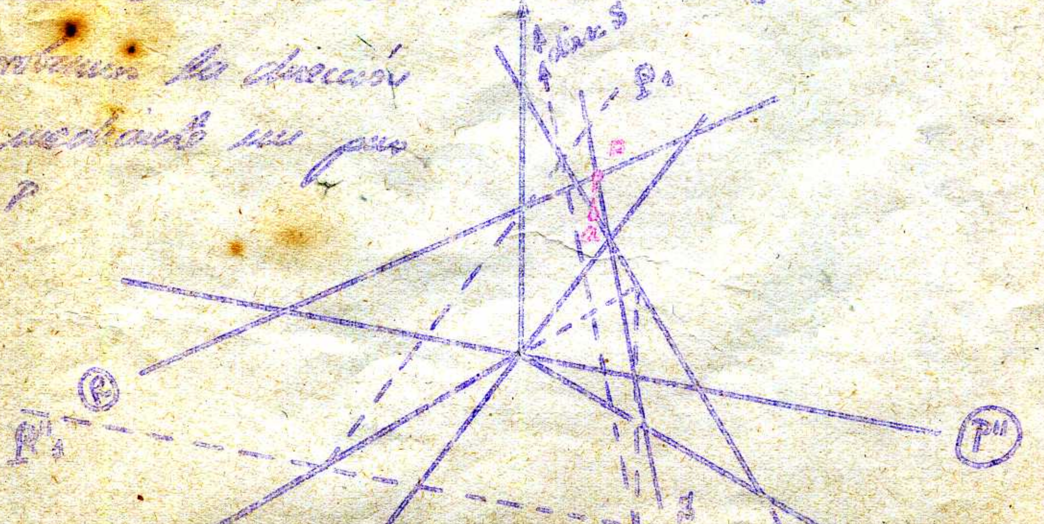
La intersección de $\left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow S$ y la intersección de $\left\{ \begin{matrix} R \\ S \end{matrix} \right. \rightarrow \boxed{A}$

EJEM Hallar la intersección de (R) y (P)

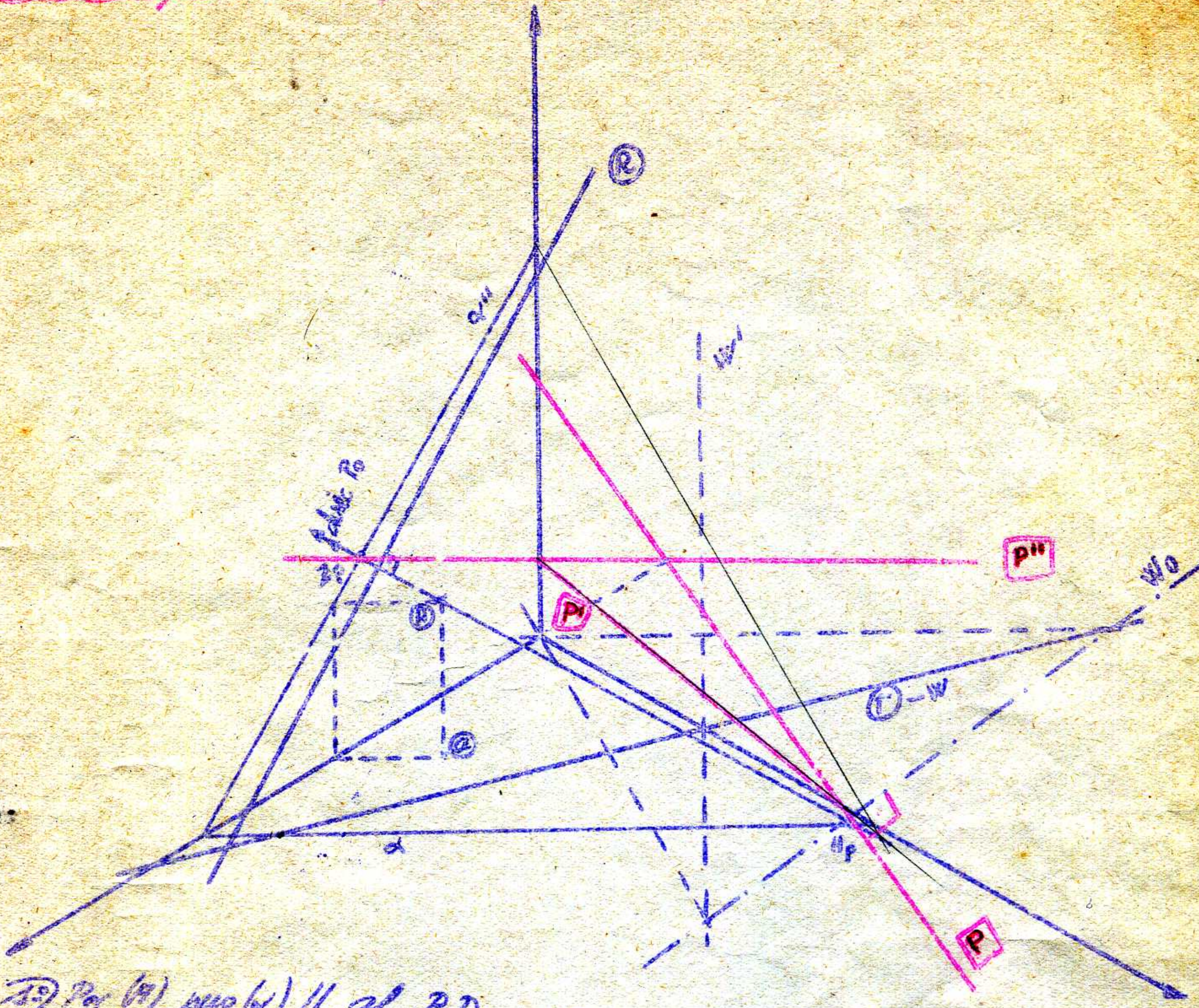


EJEM Calcular intersección de R y P

Comprobamos la dirección de S mediante un pno $P_2 \parallel P$



Por un punto (A) plano P ⊥ a la recta R



1º) Por (A) plano (α) ∥ al P.D

2º) Por A recta ⊥ a R → P_0

3º) Plano (W) proyectante sobre el H^{tal} de modo que $W \equiv r$

4º) Int $\begin{cases} W \\ P.D \end{cases} \rightarrow W_0$

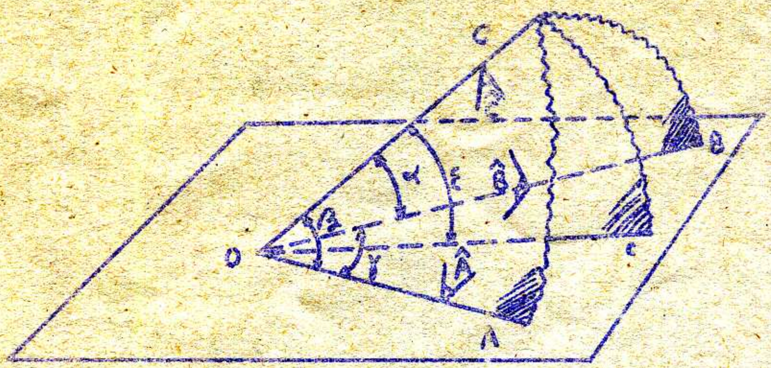
5º) Int $\begin{cases} \text{traza } \alpha \\ P_0 \end{cases} \rightarrow H_p$. Int $\begin{cases} \text{traza } \alpha' \\ P_0 \end{cases} \rightarrow V_p$. Int $\begin{cases} \text{traza } \alpha'' \\ P_0 \end{cases} \rightarrow Z_p$

6º) Por H_p recta ⊥ a W_0 → P (traza)

7º) Como conocemos las trazas P, V_p y Z_p uniendo y obtendremos el plano

TRIEDROS

Triedro: es el conjunto de tres rectas en el espacio que concurren en un punto O.



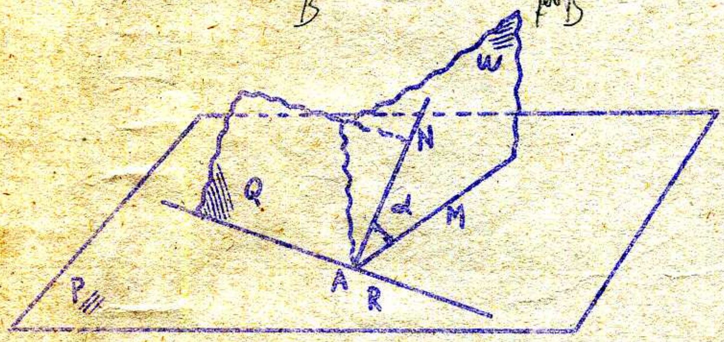
Elementos fundamentales: las tres aristas A, B, C; las caras cuyos ángulos son α, β, γ en donde α es el opuesto a A, β a B y γ a C. Angulos diedros son los los que forman los planos de las caras dos a dos y son $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. El ángulo CO_c es el ángulo que forma $\overline{OC}$ con su proyección sobre la cara γ. $\widehat{CO_c} = \varepsilon$

Construcciones auxiliares

γ 30º 1er B

1º Por la recta R del plano P, trazar un plano Q que forme α con P.

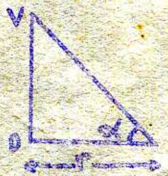
B 1er B



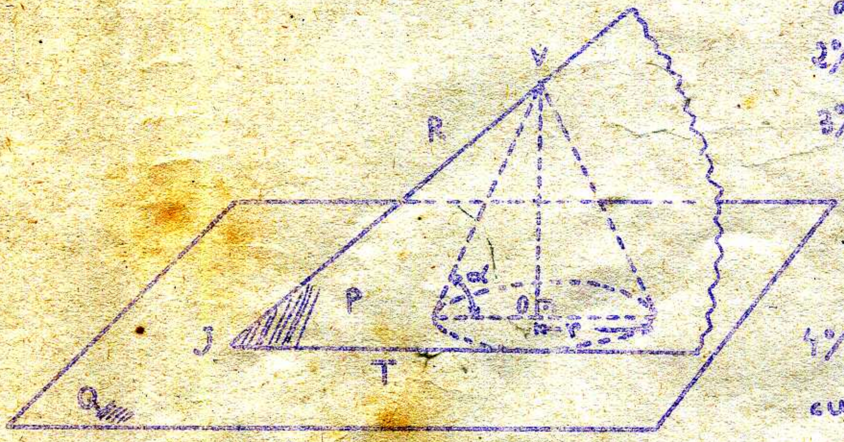
1º Por A de R plano W ⊥ a R
2º Corte de W y P recta M
3º Se abate W y en él la recta M y se dibuja N formando α con M.
4º Desabato lo N
5º Plano formado por R y N nos da el plano pedido Q.

2º Trazar por la recta R un plano P que forme un ángulo α con Q.
Nota: R no está en Q

1º Por V de R se traza una ⊥ VO al plano Q. Calculo distancia $\overline{VO}$.
2º Intersección de R y Q punto J.
3º Abatimiento del plano Q y circunferencia de centro O y radio r, calculado según fig.



4º Desde J_1 tangente T_1 a la circunferencia.

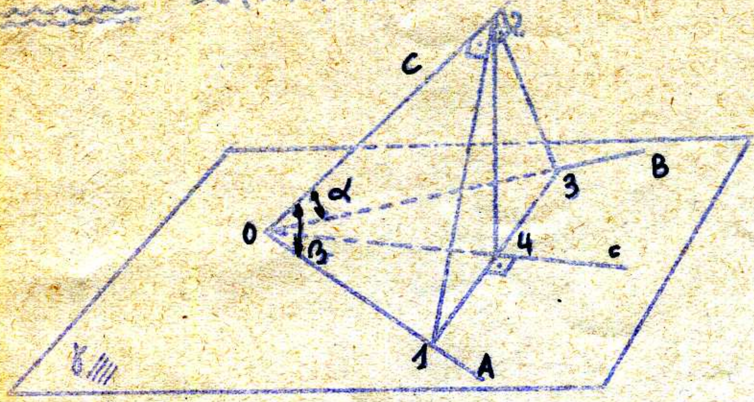


5º Se desabate $T_1 \longrightarrow T$

6º Plano formado por R y T, plano P.

Nota: El problema tiene dos, una, ó ninguna solución

1^er Caso Definir el triedro OABC conociendo OA, OB, α, β



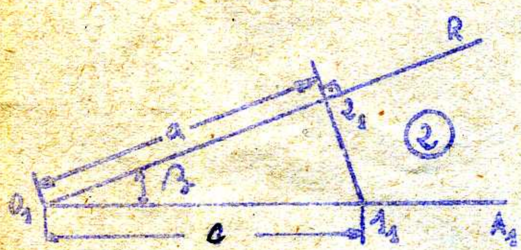
Suponemos el problema resuelto.

1º/ Plano γ formado por $\overline{OA}$ y OB

2º/ Abatimos γ y en él $\overline{OA}$ y OB dando O_1A_1, O_1B_1 fig ①

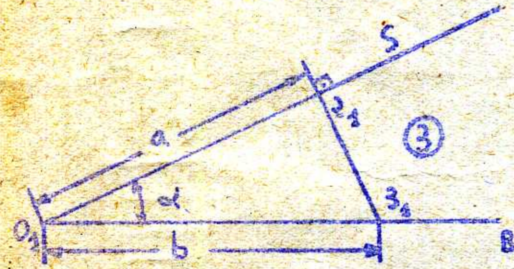
3º/ Tomamos una distancia cualquiera $O_1 1_1$.

4º/ A partir de O_1 trazamos una recta R que forme un ángulo β con O_1A_1



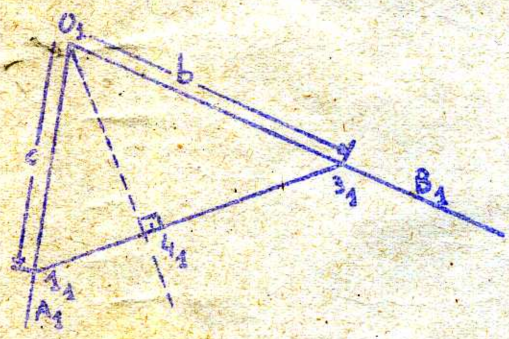
5º/ Desde 1_1 ⊥ a R, nos da el punto 2_1 fig ②

6º/ A partir de O_1 trazamos una recta S que forme un angulo α con O_1B_1 y sobre S llevamos la distancia O_12_1 calculada anteriormente, fig ③



7º/ Por 2_1 de S recta ⊥ a S que cortará a O_1B_1 en el punto 3_1, fig ③

8º/ Hallamos la recta 1_13_1 y desde O_1 trazamos una ⊥ a ella que nos define el punto 4_1



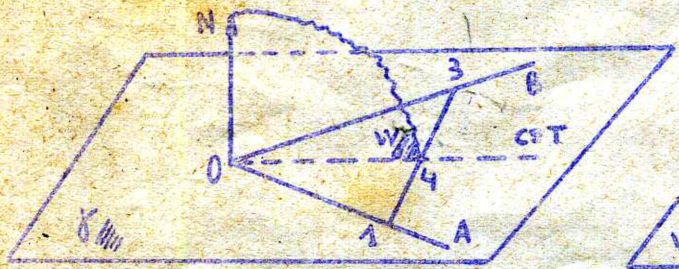
9º/ Desabatimos el punto 4_1 → (4)

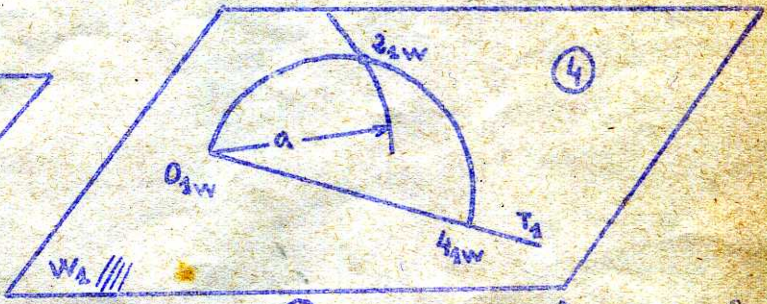
10º/ Unimos (4) con (O) y nos da (T)

11º/ Trazamos por O recta (N) ⊥ al plano γ.

12º/ Plano W formado por (N) y (T)

13º/ Abatimos el plano W y trazamos la circunferencia de diametro $(\overline{O,4})$

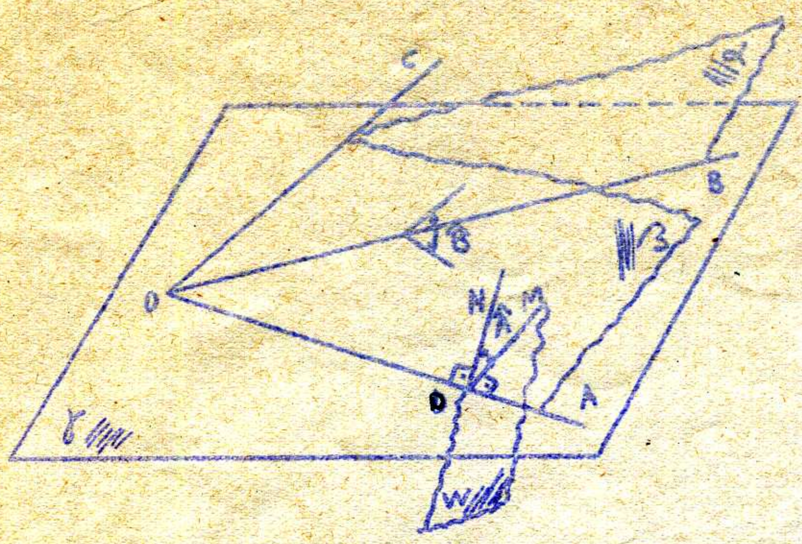




14º/ Con centro en O_{1W} y radio $\overline{O_12_1}$ calculado en ② cortamos a la circunferencia definiendo así el punto 2_{1W} según fig. ④

15º/ Desabatiendo el 2_{1W} nos da el 2 que uniendo con O nos da la recta solución OC.

2º Caso Datos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$



1º/ Trazamos por un punto D ∈ a OA un plano W ⊥ a OA.

2º/ Formamos el plano γ determinado por $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.

3º/ Calculamos la recta M intersección de γ y W.

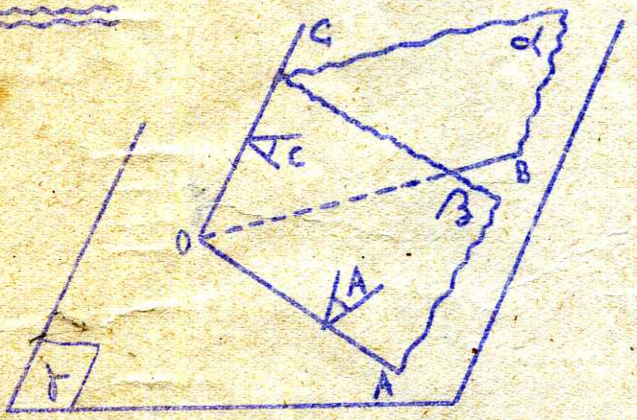
4º/ Abatimos en el plano W la recta M → M_1. Calculamos una recta N_1 que forme el angulo $\hat{A}$ con M_1 en D_1.

5º/ Desabatimos N_1 → N y calculamos el plano β formado por OA y N.

6º/ Haciendo lo mismo con OB calculamos el plano α.

7º/ Intersección de β con α nos define la recta OC solución

3er/ Caso Datos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\hat{A}$, $\hat{C}$



1º/ Plano γ formado por OA y OB

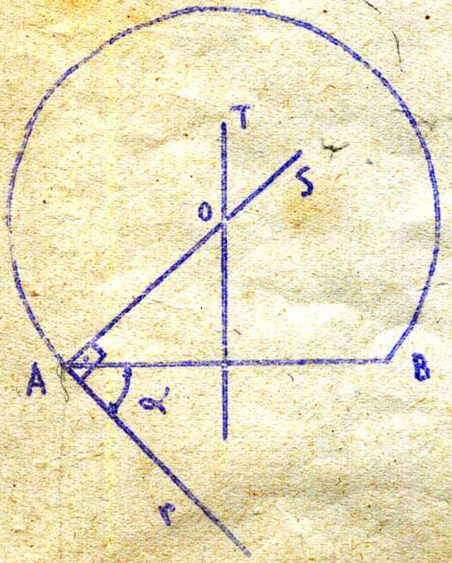
2º/ Según la 1ª construcción auxiliar plano β que pasa por OA y forma $\hat{A}$ con γ.

3º/ Según la 2ª construcción auxiliar plano α que pasa por OB y forma $\hat{C}$ con β.

4º/ Intersección de α y β nos da la arista $\overline{OC}$ pedida, solución del problema.

4º Caso Datos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\hat{C}$

Para realizar la construcción hemos de tener en cuenta el siguiente ejercicio:



Calcular el lugar geométrico de puntos desde los cuales se ve el segmento AB como arco de α. (Arco capaz)

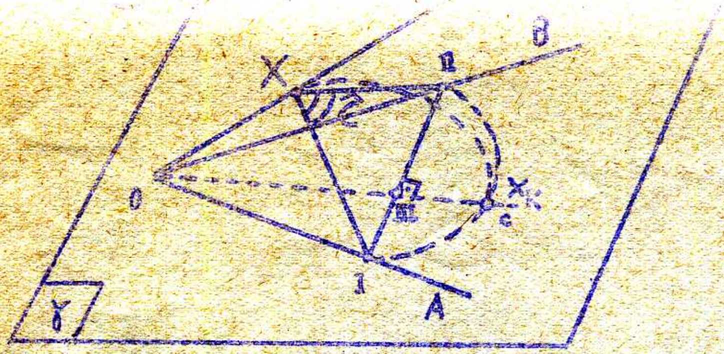
a) Por el punto A trazamos una recta r que forme α con $\overline{AB}$.

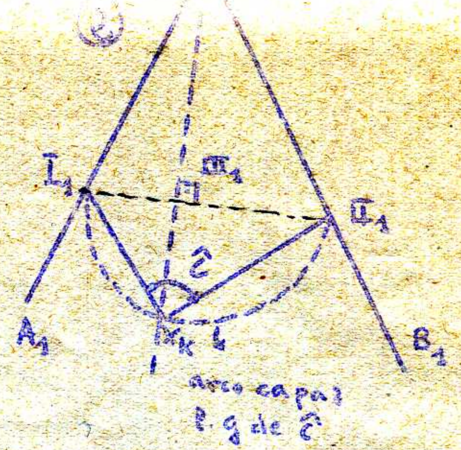
b) Por el punto A recta S ⊥ a r

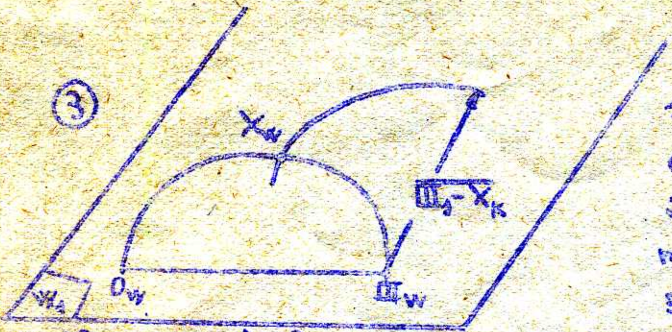
c) Mediatriz T de AB.

d) Donde T corte a S punto O.

e) Con centro O y radio $\overline{OA} = \overline{OB}$, circunferencia l. g. solución







1°/ Hallamos el plano γ formado por OA y OB.

2°/ Mediante la construcción ② calculamos los puntos $Ⅲ_1$ y X_K y su distancia

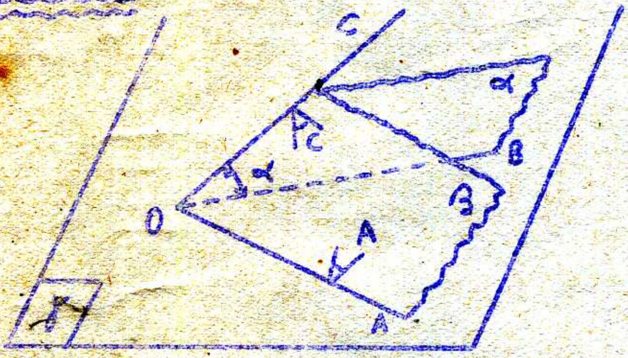
3°/ Desabatimos $Ⅲ_1 \to Ⅲ$

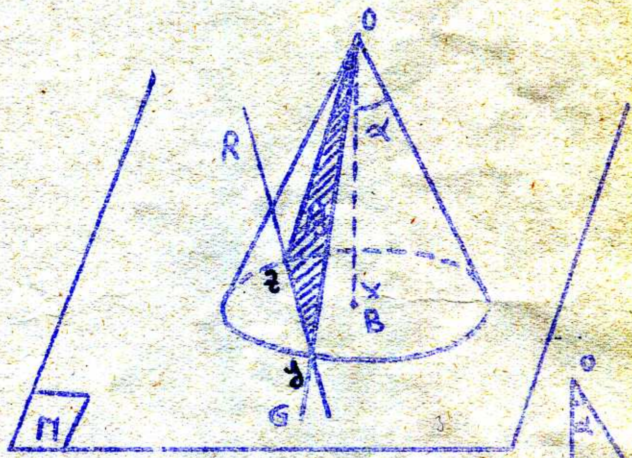
4°/ Hallamos el plano W formado por $\overline{OⅢ}$ y ⊥ a γ.

5°/ Abatimos W sobre el dibujo ③ y trazamos la circunferencia de diámetro $O_W - Ⅲ_W$, a continuación con centro en $Ⅲ_W$ y radio $\overline{Ⅲ_1 - X_K}$ cortamos a la circunferencia en el punto X_W que desabatido da X.

6°/ Recta $\overline{OX}$ recta solución. $\overline{OC}$

5° Caso Datos: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\hat{A}$, $\hat{\alpha}$





1°/ Tomamos un punto $X \in OB$

2°/ Según construcción ⓐ calculamos R

3°/ Por X plano Π ⊥ a OB.

4°/ Intersección de Π y β → R

5°/ Plano β que pasa por $\overline{OA}$ y forma un ángulo $\hat{A}$ con γ

6°/ Plano γ formado por $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

7°/ Cono de revolución de eje $\overline{OB}$ y semiángulo $\hat{\alpha}$ (1°, 2°, 3°, 4°, 8°)

8°/ Abatimos en Π $X \to X_1$ $R \to R_1$

9°/ Circunferencia de centro X_1 y radio R hallado.

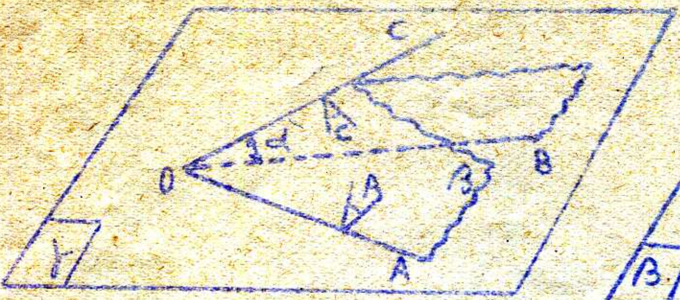
10°/ Intersección de dicha circunferencia con R_1 da los puntos y_1, z_1, tomamos uno, sea el y_1.

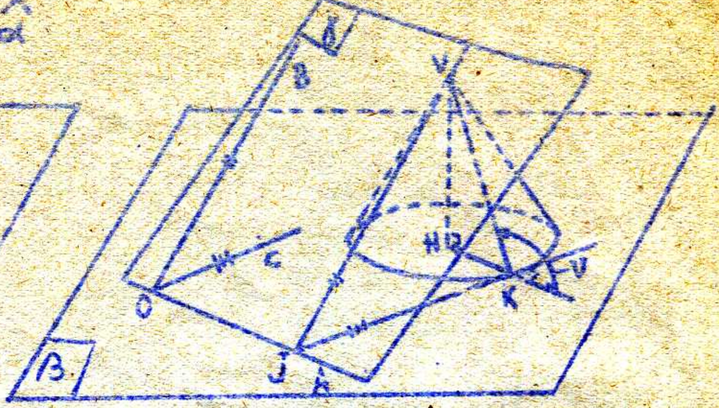
11°/ Desabatimos $y_1 - Y$.

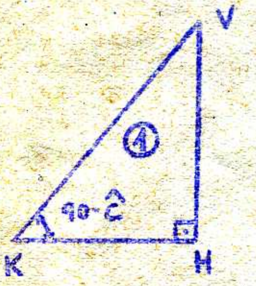
12°/ Plano formado por Y, $\overline{OB} \to \alpha$

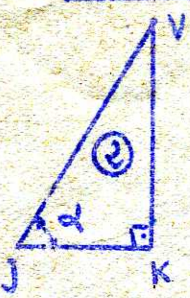
13°/ Intersección $\left\{\begin{array}{l}\alpha \\ \beta\end{array}\right. \to \overline{OC}$ (Solución)

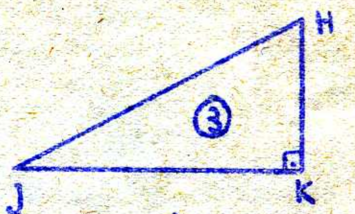
6º Caso Datos: OA, pl γ, $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{\alpha}$





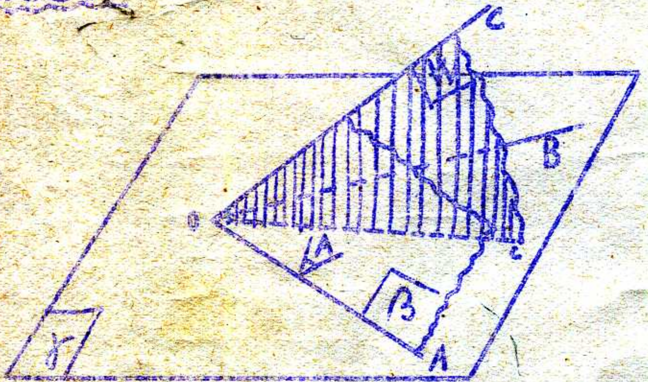






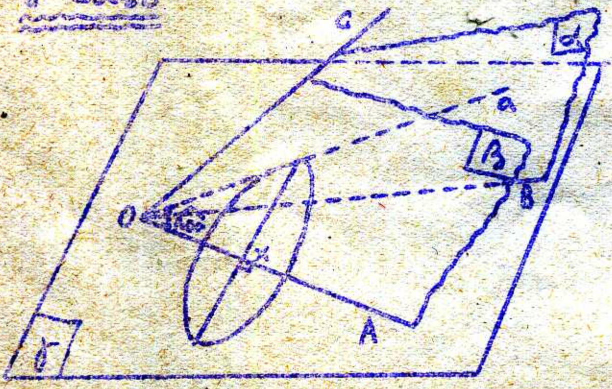
1º/ Plano β que pasa por OA y forma un ángulo $\hat{A}$ con γ.
2º/ Elegimos un punto V del plano γ que se proyecta sobre β en H.
3º/ Se dibujan los triángulos ① ② ③ y se calcula $\overline{HJ}$ y $\overline{HK}$ radio de la base del cono.
4º/ Se abate el plano β y se dibuja la base del cono $\overline{OA} \to \overline{OA_1}$ $H \to H_1$, desde H_1 se traza un arco de radio HJ, donde corte a $\overline{OA_1}$ nos da el punto J_1.
5º/ Desde J_1 se traza una tg a la circunferencia base del cono que se desabate según la recta JK.
6º/ Desde J se une con V. Por O se traza una paralela a JV y nos da OB.
7º/ Por el punto O paralela a JK nos da OC.

7º Caso Datos: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{Oc}$, $\hat{A}$

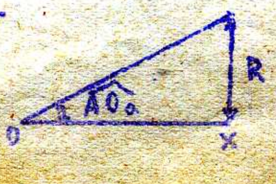


1º/ Plano γ formado por OA y OB
2º/ Plano W perpendicular a γ pasando por $\overline{Oc}$.
3º/ Plano β que pasa por OA y forma un ángulo $\hat{A}$ con el plano γ.
4º/ La intersección de W y β nos da la arista $\overline{OC}$.

8º Caso



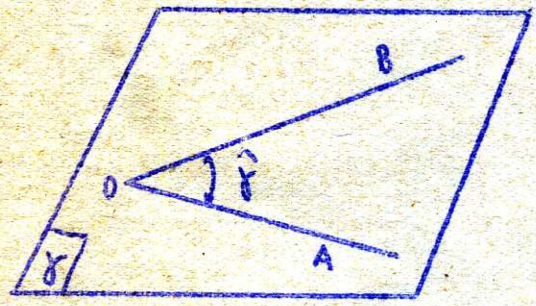
Datos: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\widehat{AOa}$, $\hat{A}$
1º/ Plano γ formado por OA y OB
2º/ Cono de revolución de eje $\overline{OA}$, vertice O y semiangulo $\widehat{AOa}$
3º/ Plano α que pasa por OB y es tangente al citado cono. Dando de generatriz la recta OA.



a) Tomamos $X \in OA$
b) Según fig. calculamos R.
c) Por X plano M $\perp$ a OA
d) Intersección de M y OB $\rightarrow$ Y
e) Abatimos M $\begin{cases} Y \rightarrow Y_1 \\ X \rightarrow X_1 \end{cases}$
f) Circunferencia de centro X_1 y radio R
g) Por Y_1 tg a la circunferencia $\rightarrow T_1$
h) Desabatimos $T_1 \rightarrow T$
i) Plano formado $\begin{cases} T \\ OB \end{cases} \rightarrow \alpha$

4º/ Plano β que pasando por $\overline{OA}$ forma $\hat{A}$ con γ.
5º/ Intersección de α y β nos da la recta OC.

9º Caso Datos: OA, pl γ, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$



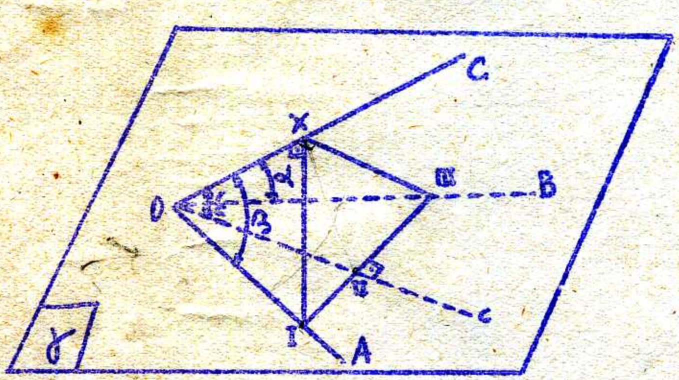
Conociendo OA, plano γ y $\hat{\gamma} \rightarrow \overline{OB}$

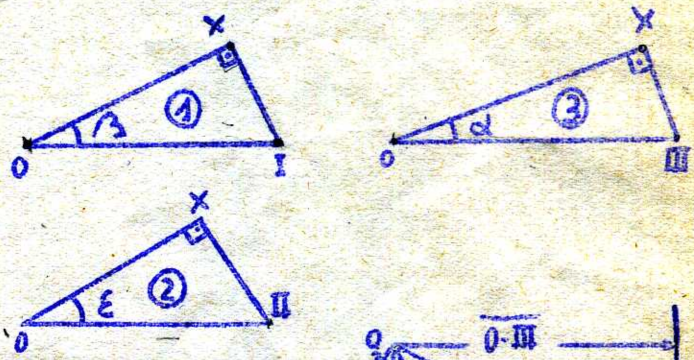
El problema nos queda de la forma:

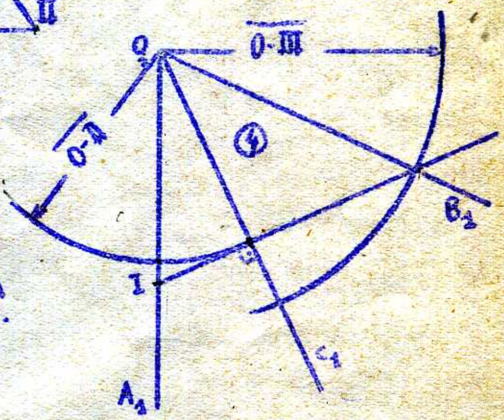
Datos: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$

que es el 1er/ Caso

10º Caso Datos: OA, pl γ, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\widehat{COc} \equiv \hat{\varepsilon}$



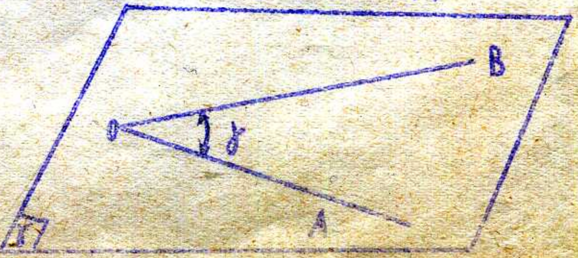


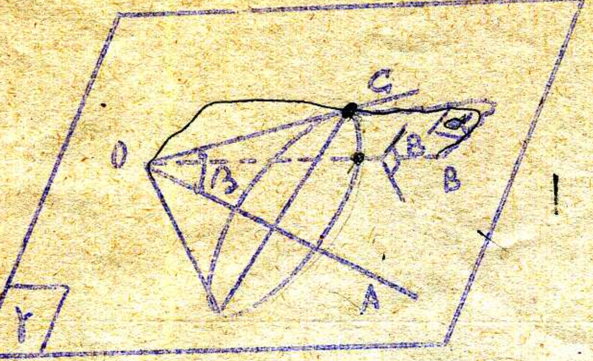


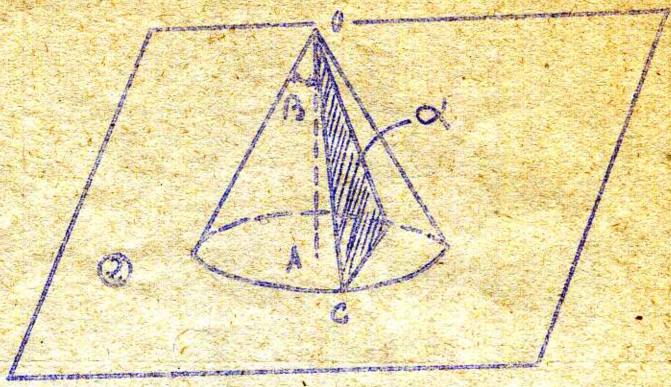
1º/ Según las construcciones ①②③ calculamos las distancias, $\overline{OII}$ y $\overline{OIII}$.
2º/ Abatimos γ OA $\rightarrow$ OA_1 según construcción ④ calculamos $\overline{O c_1}$ y $\overline{OB_1}$, desabatimos $\rightarrow \overline{Oc}, \overline{OB}$.
3º/ Ahora estamos en el 1er Caso Datos: $\overline{OA}, \overline{OB}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$.
4º/ Por $\overline{Oc}$ plano M $\perp$ al γ.
5º/ Abatimos M $\overline{Oc} \rightarrow \overline{O_1 c_1}$
6º/ Recta que pasa por O_1 y forma ε con $O_1 c_1 \rightarrow O_1 C_1$
7º/ Desabatimos $O_1 C_1 \rightarrow OC$ que es la arista solución.

11º/ Caso Datos: $\overline{OA}$, cara γ, $\hat{\gamma}$, $\hat{\beta}$, $\hat{B}$.

Conociendo OA, cara γ, y angulo $\hat{\gamma}$ calculamos OB.







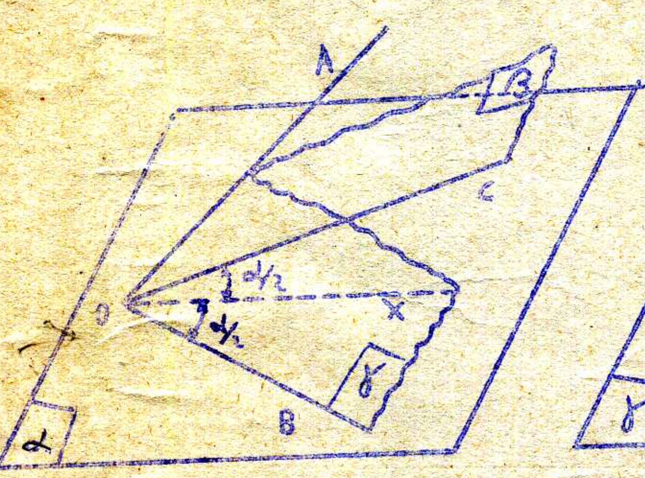
1º Se abate γ y se halla O_1A_1. Recta que forma γ con $O_1A_1 \rightarrow O_1B_1$ que desabatida da OB.

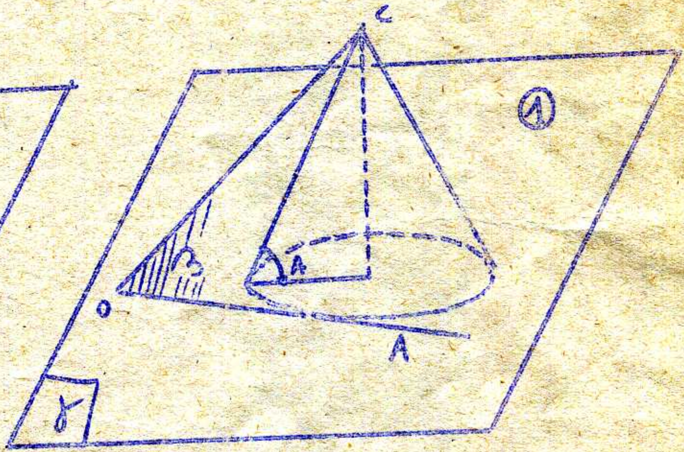
2º Se calcula el plano α que pasa por OB y que forma un ángulo $\hat{e}$ con γ.

3º Cono de revolución de eje OA y semiangulo $\hat{\beta}$ ②

4º Intersección del cono con el plano $\alpha \rightarrow OC$.

12º Caso Datos: pl α, $\hat{\alpha}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, recta OX (bisetriz de α)





1º Se abate el plano α y en él $OX \rightarrow O_1X_1$

2º Se dibujan a ambos lados de O_1X_1 $\left\{\begin{array}{l} O_1B_1 \\ O_1C_1 \end{array}\right\}$ formando $\frac{\alpha}{2}$ con O_1X_1.

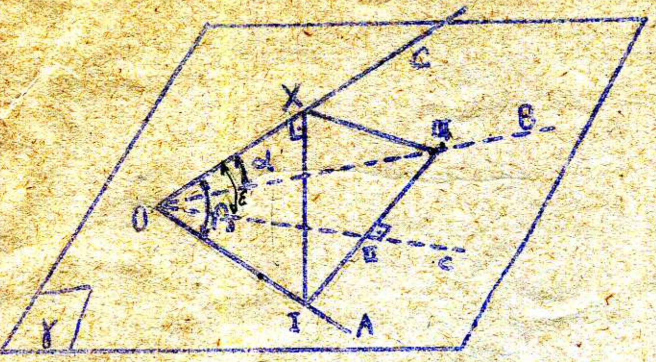
3º Desabatimos $\left\{\begin{array}{l} O_1B_1 \rightarrow OB \\ O_1C_1 \rightarrow OC \end{array}\right\}$

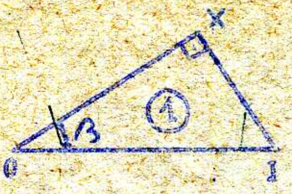
4º Plano γ que pasa por OB y forma $\hat{B}$ con el α.

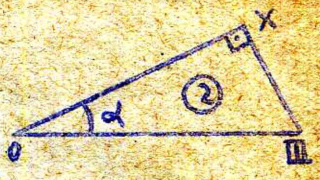
5º Plano β que pasa por OC y forma $\hat{A}$ con el γ. → Según fig ①

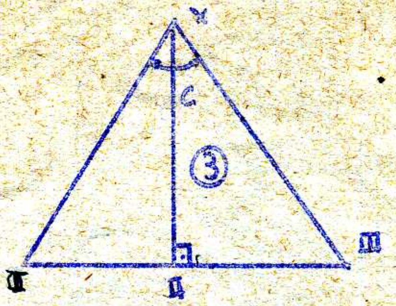
6º Intersección de los planos $\left\{\begin{array}{l} \gamma \\ \beta \end{array}\right. \rightarrow OA$.

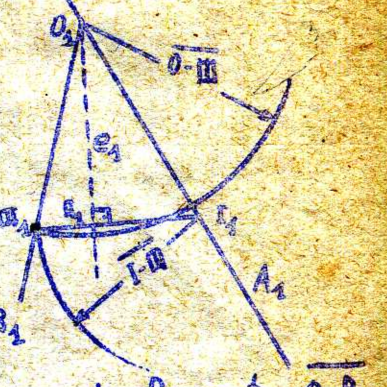
13º Caso Datos: OA, $\hat{C}$, $\hat{\alpha}$, β, pl γ











1º/ Abatimos γ y con él $OA \to O_1A_1$, sobre O_1A_1 tomamos un punto 1_1 que ha de coincidir con la distancia tomada en ①

2º/ De los triángulos ② y ③ tomamos las distancias $\overline{O\text{-}III}$ y $\overline{I\text{-}III}$. Según la fig. calculamos el punto III_1 intersección de los dos arcos, que uniendo con O_1 nos da la recta $\overline{O_1B_1}$.
Por O_1 trazamos una ⊥ a $\overline{I_1III_1}$ y nos define el punto II_1

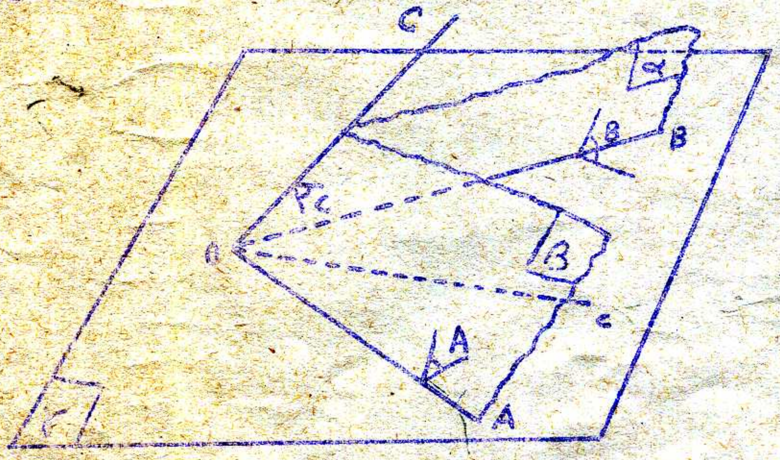
3º/ Desabatimos y calculamos $\overline{OB}$ y el II.

4º/ Plano W que pasa por Oc y es ⊥ a γ.

5º/ Se abate W y se dibuja la circunferencia de diámetro $\overline{O_{1W}-II_{1W}}$.

6º/ Con centro en O_{1W} y radio OX cortamos al semicírculo en el X_1 que desabatido y unido con O sale $\overline{OX} \to \overline{OC}$.

14º Caso. Datos: $\overline{OB}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{\gamma}$, pl γ.



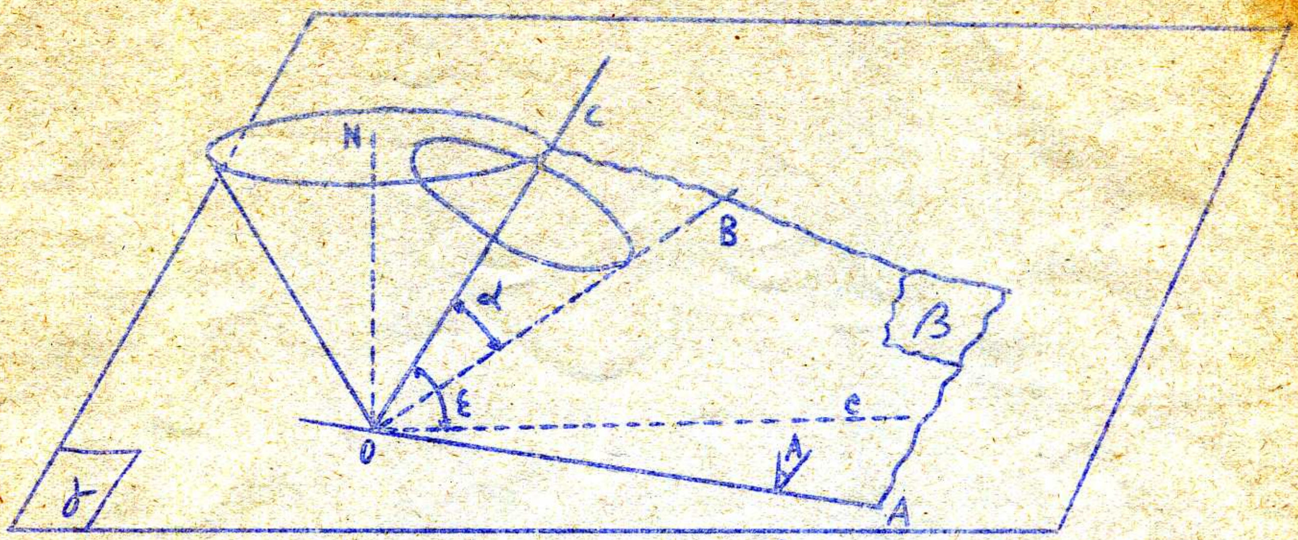
1º/ Abatiendo γ hallamos la recta $\overline{O_1A_1}$ que forma un ángulo $\hat{\gamma}$ con $\overline{O_1B_1}$ que desabatida nos da OB.

2º/ Hallamos el plano α que pasa por OB y forma un ángulo $\hat{B}$ con γ.

3º/ Hallamos el plano β que pasa por OA y forma un ángulo $\hat{C}$ con α.

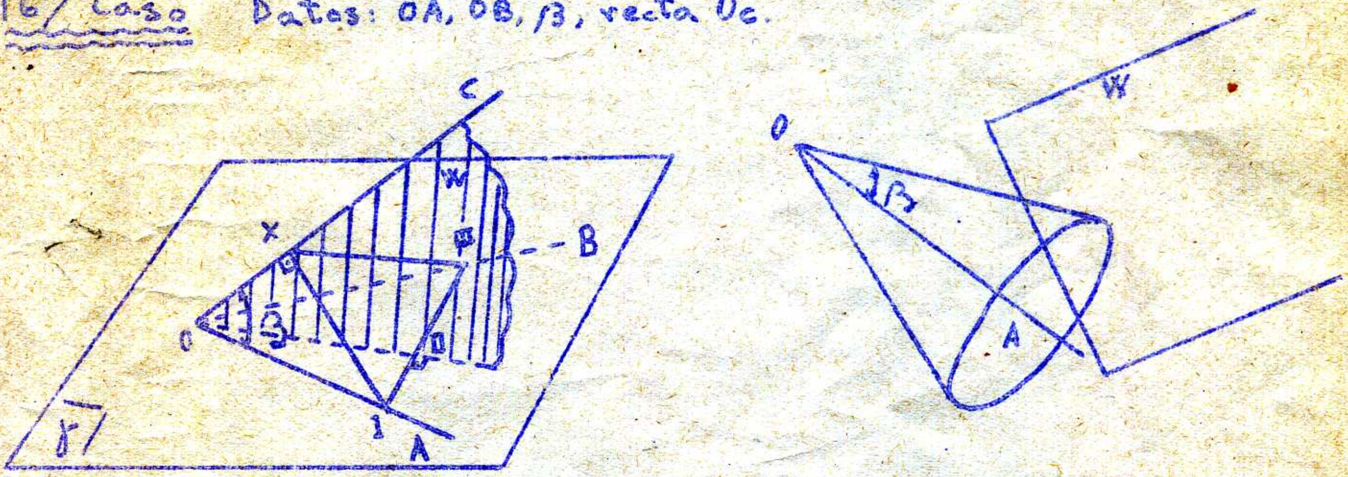
4º/ La intersección $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$ nos determina la recta $\overline{OC}$.

15°/ Caso Datos: $\overline{OA}$, $\hat{A}$, $\hat{\alpha}$, $\widehat{CO_c} = \hat{\varepsilon}$, pl. γ.



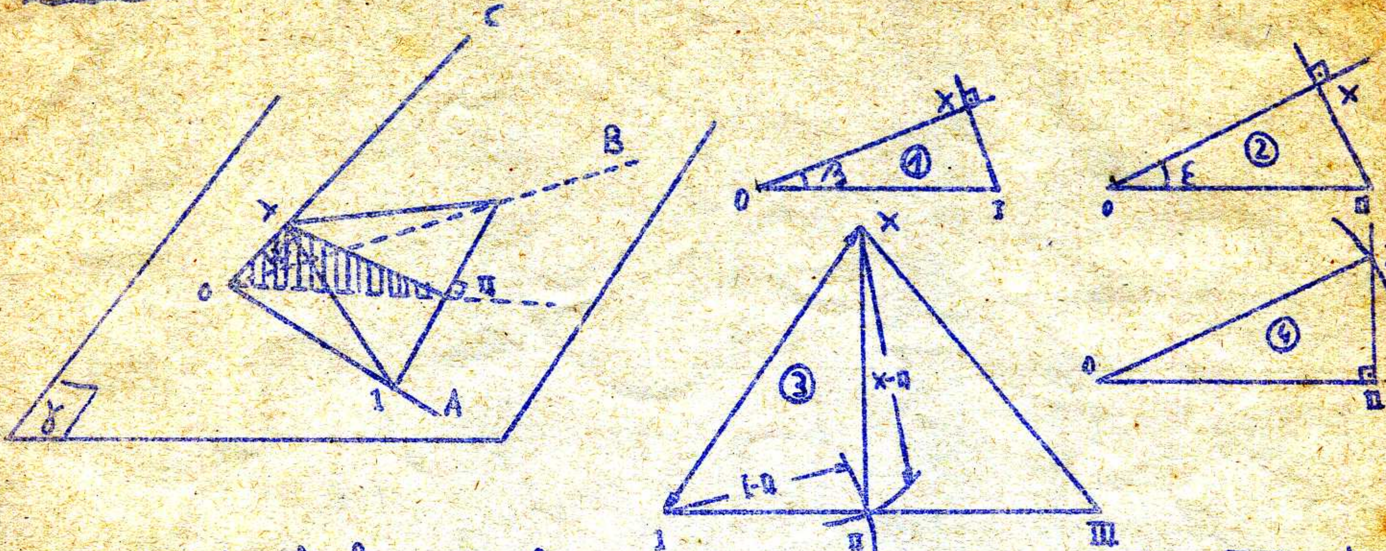
1°/ Plano β pasando por OA y formando $\hat{A}$ con γ
2°/ Por O recta N ⊥ a γ.
3°/ Cono de revolución de eje ON y semiangulo 90-ε
4°/ Intersección del cono con el plano β da $\overline{OC}$.
5°/ Cono de eje $\overline{OC}$ y semiangulo α
6°/ Intersección del cono con γ da $\overline{OB}$.

16°/ Caso Datos: OA, OB, $\hat{\beta}$, recta Oc.



1°/ Plano γ formado por OA y OB.
2°/ Plano W que paso por Oc y es ⊥ a γ.
3°/ Cono de revolución de eje OA y semiangulo β.
4°/ Intersección del cono con el plano W recta OC.

17º Caso: Datos: OA, $\hat{C}$, $\hat{B}$, $\widehat{COc} = \hat{E}$; plano γ.

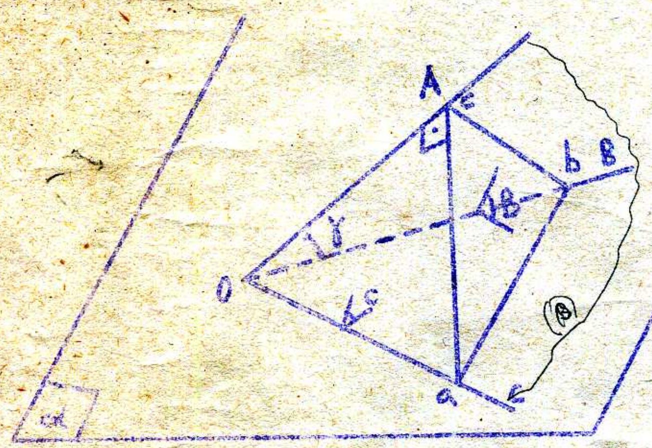


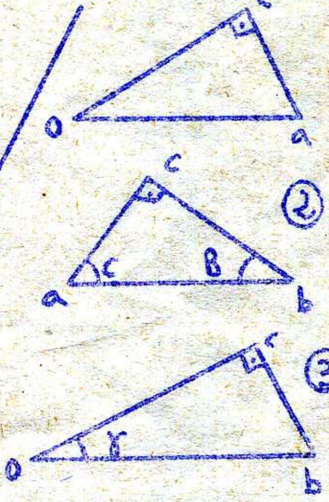
1º Se abate el plano γ y la recta O_1A_1, conociendo $\overline{I\text{-}II}$ y $\overline{O\text{-}II}$ calculamos el punto II_1 y III_1 que desabatiendo nos dará el III siendo $\overline{OIII} = OB$.

2º Se calcula el plano W que pasa por $\overline{OII}$ y sea $\perp$ a γ.

3º Se traza la semicircunferencia de diametro O_1II_1 y donde O_1 se corta a dicha semicircunferencia con un arco OX lo que nos define el X_1 que desabatido y unido con O nos da $\overline{OC}$.

18º Caso: Datos: OC, $\hat{c}$, $\hat{B}$, $\hat{\gamma}$, cara α.





① $OC^2 + ac^2 = oa^2$ (dato fijado)

② $ac \cdot \operatorname{sen} \hat{c} = bc \operatorname{sen} \hat{B}$

③ $oc = bc \operatorname{cotg} \gamma$

De ② y ③

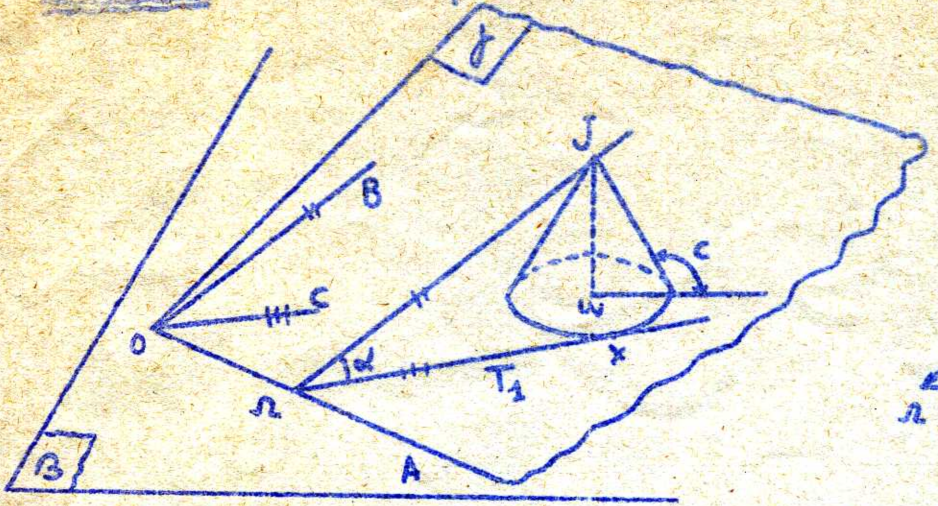
$$ac \cdot \operatorname{sen} \hat{c} = oc \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \rightarrow \begin{cases} ac \\ oc \end{cases}$$

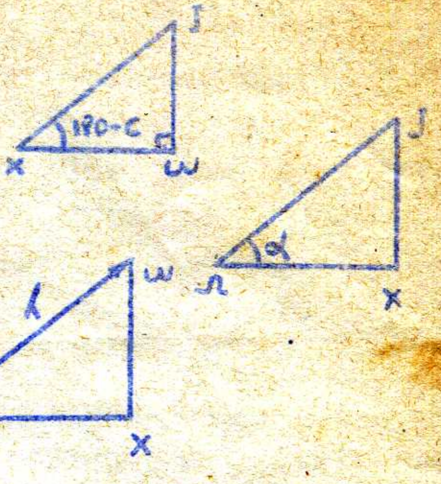
1º Plano β que pasa por oc y forma $\hat{c}$ con OC.

2º Abatimos $\beta \rightarrow O_1C_1$. Fijando el punto a con las ecuaciones anteriores calculamos el punto C. que unido con O da OA.

3º Cono de eje OA y semiangulo γ, intersección con el plano α da OB.

Caso 19° Datos: OA, plano γ, $\hat{A}$, $\hat{C}$, α.





1° Plano β que pasa por OA y forma $\hat{A}$ con γ.

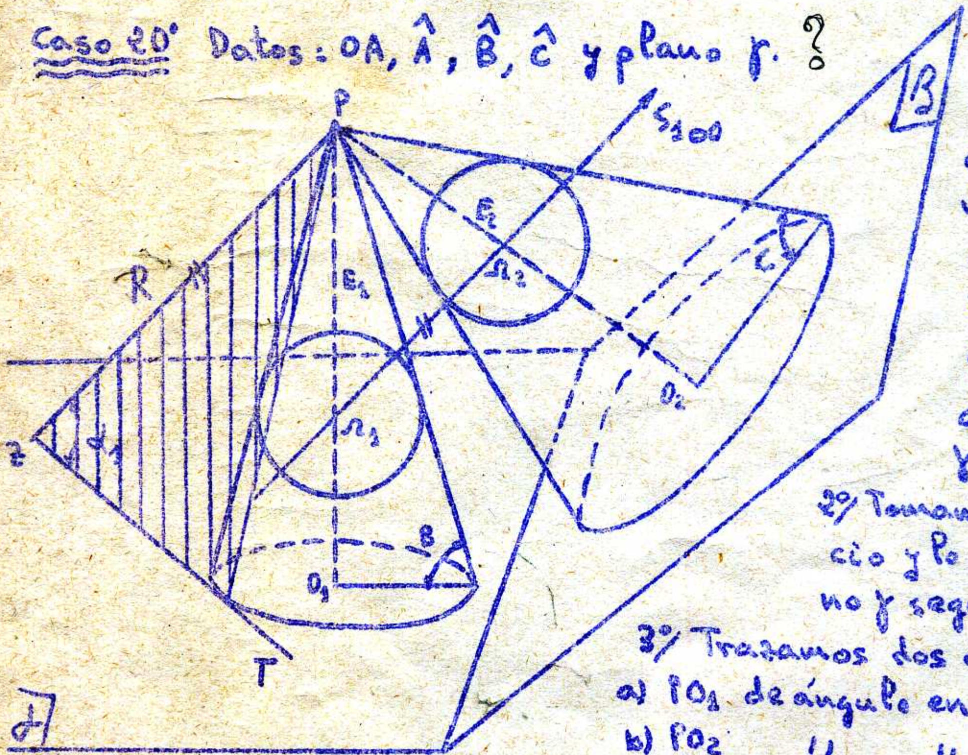
2° Tomo J en γ y lo proyecto en ω sobre β.

3° Abato $\beta \begin{cases} \omega \to \omega_1 \\ x \to x_1 \\ OA \to OA_1 \end{cases}$ con centro ω_1 y $r = \lambda$ corto a OA_1 en $\Omega_1 \to \Omega$.

4° Circunferencia de centro ω_1 y $r = \omega_1 x_1$. Por ω_1 tangente a la circunferencia T_1. $\to$ T su paralela por O $\to$ C.

5° Paralela a Ω J por O $\to$ B.

Caso 20° Datos: OA, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y plano γ. ?



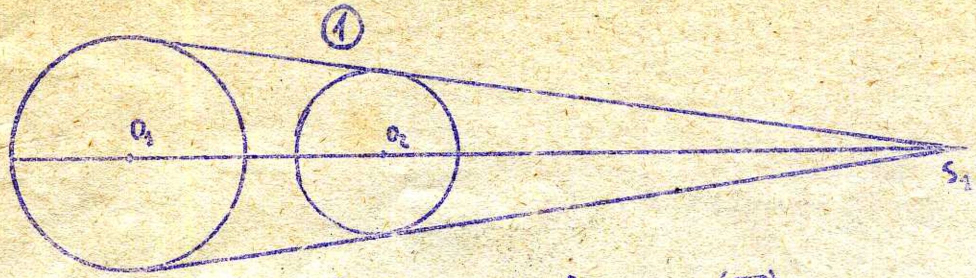
1° Trazamos un plano β que pase por OA y forme un ángulo $\hat{A}$ con el γ. Ahora el problema se resuelve a hallar un plano α que pase por O y forme un ángulo $\hat{C}$ con β y uno $\hat{B}$ con γ.

2° Tomamos un punto P en el espacio y lo proyectamos sobre el plano γ según O_1 y sobre el β según O_2.

3° Trazamos dos conos de revolución de ejes
a) PO_1 de ángulo en $\gamma = \hat{B}$
b) PO_2 " " $\beta = \hat{C}$

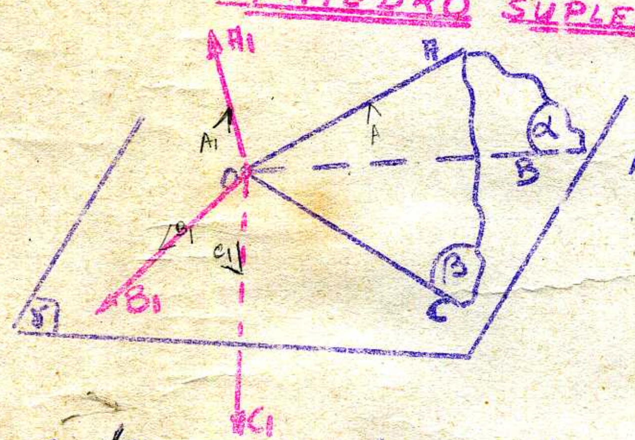
4° Sobre los dos conos tomamos dos esferas con radios iguales y centros en Ω_1 y Ω_2.

5° Teniendo en cuenta la construcción (1) vemos que en nuestro caso el S_{100} es la unión de Ω_1 y Ω_2 y por tanto el plano tangente a los dos conos se formará así: Si tomamos por P una paralela a la dirección de S_{100} nos dará una recta R que corta a γ en un punto z.



Desde Z una tg a la base del cono (T).
Plano formado por (R) y (T) nos da el plano tg a los dos conos α_1.
6º Trazamos por O un plano paralelo al α_1 y nos da el plano α pedido.
7º Intersección de α con γ → arista OB.
8º Intersección de α con β → arista OC.
Notas: El plano tg a los dos esferas es tg a los conos.
El plano tg a los conos pasa siempre por P y por $S_{1,2}$
Para resolver el sistema solo necesitamos conocer S_1, S_2 y base del cono en γ.

TRIEDRO SUPLEMENTARIO



Es aquel cuyas aristas son perpendiculares a las caras del triedro primitivo, de modo que:
OA_1 sea $\perp$ al α (formado por OB y OC).
OB_1 sea $\perp$ al β (formado por OC y OA)
OC_1 sea $\perp$ al γ (formado por OA y OB)

Entre el triedro suplementario y el primitivo hay estas relaciones:

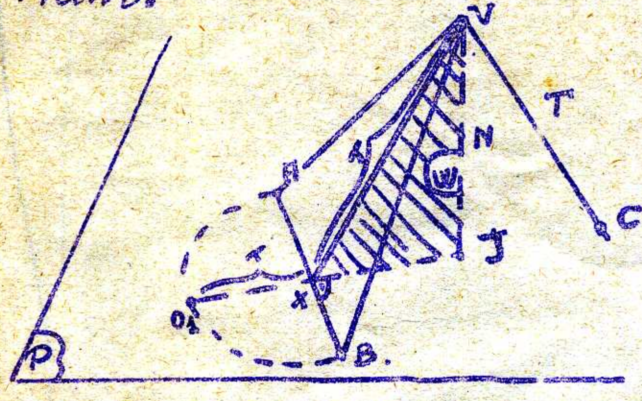
$$\begin{cases} \hat{A}_1 = 180 - \alpha \\ \hat{B}_1 = 180 - \beta \\ \hat{C}_1 = 180 - \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\alpha}_1 = 180 - A. \\ \hat{\beta}_1 = 180 - B. \\ \hat{\gamma}_1 = 180 - C. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{plano } \alpha_1 \perp OA. \\ \text{plano } \beta_1 \perp OB \\ \text{plano } \gamma_1 \perp OC \end{cases}$$

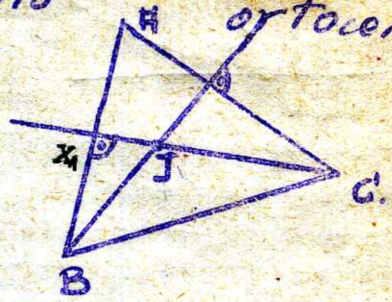
Hay triedros que se resuelven mas facilmente por el suplementario que por el primitivo.

TRIEDROS TRIRECTANGULOS

dos puntos A y B son dos puntos correspondientes a dos aristas de un triedro trirectangulo cortado por un plano P y J la proyeccion del vertice sobre dicho plano. Hallar el triedro.



si dan ABC hallo J como ortocentro.



1º) Abato P $\begin{cases} A \to A_1 \\ B \to B_1 \\ J \to J_1 \end{cases}$ (arco capaz a $A_1 B_1$ de 90º) circunferencia de diametro $A_1 B_1$; por J_1 recta $\perp$ a $A_1 B_1$ que corta a esta en X_1, y al arco en O_1

2º) Por J plano $\perp$ a AB $\to$ W (plano importante en los trirectangulos)

3º) Por J recta N $\perp$ a P

4º) Abato W $\begin{cases} N \to N_1 \\ x \to X_1 \end{cases}$ con centro X_1 y $r = \measuredangle (\overline{XO_1})$ corto a N_1 en V_1, que desabativo me da V

5º) Plano formado por $\begin{cases} AB \\ V \end{cases} \to Q$.

6º) Por el vertice V recta $\perp$ a Q $\to$ T

7º) Corte de T y P $\longrightarrow$ C

8º) el triedro está formado por $\begin{cases} VA \\ VB \\ VC \equiv T \end{cases}$

Girar la recta R alrededor del eje E hasta que forme α con S

a) Cuando R y E se cortan

1º) Int $\{^{R}_{E} \to V$

2º) Angulo formado por R y E $\to \beta$

3º) Recta que pasa por V y forma β con E y α con S

Caso triedros

b) Cuando R y E no se cortan

1º) Por V de E recta $R_1 \parallel R$

2º) Angulo formado $\{^{R_1}_{E} \to \beta$

3º) Calculo recta R_{1G} que pasando por V forme $\hat{\beta}$ con E y $\hat{\alpha}$ con S

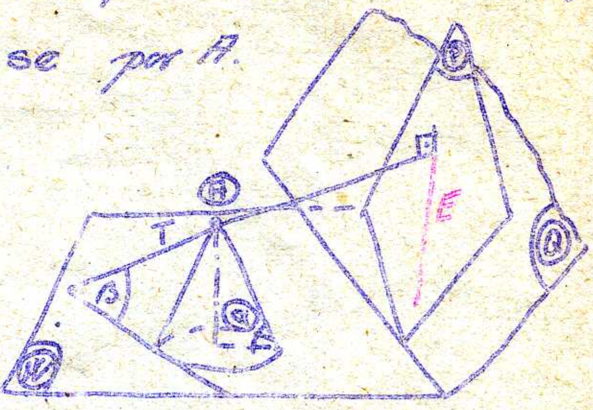
Caso triedros

4º) Calculo el angulo girado entre R_1 y R_{G1}.

5º) Giro el mismo angulo y en el mismo sentido que girado $H \in R \to H_G$

6º) ~~Por~~ $H_G \parallel a R_{G1} \to R_G$

Hallar un eje de giro tal que al girar a P alrededor de él quede ⊥ a Q, forme $\hat{\alpha}$ con W y pase por A.



1º) Por A recta ⊥ a Q $\to$ T

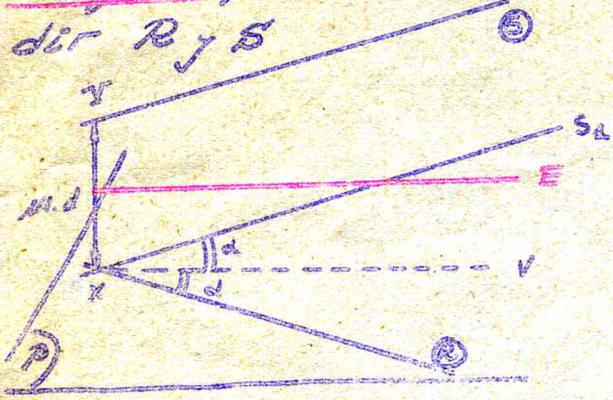
2º) Por T paso β que forme α (mediante un cono de vertice A y angulo α en la base segun fig)

3º) Int $\{^{P}_{\beta} \to E$

Girar la recta R alrededor de E hasta que forme $\hat{\alpha}$ con P

El problema se resuelve igual que el anterior considerando que en vez de formar α con P, forme 90−α con N siendo N ⊥ a P

Dados dos rectas R y S que se cruzan, hallar un eje de giro que lleva a coincidir R y S



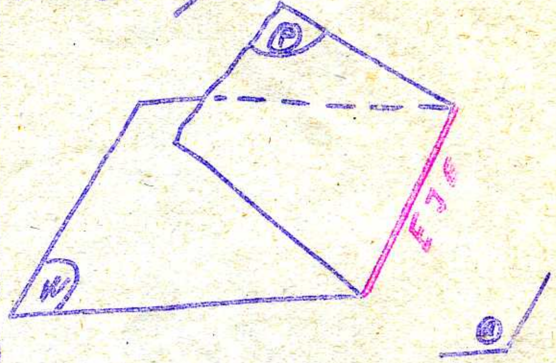
1º) Por un punto de R recta S_1 // a S

2º) Pno formado por $\left\{ \begin{array}{l} R \\ S_1 \end{array} \right. \longrightarrow P$

3º) Abato P y calculo la bisectriz de R y S_1 ⟶ V

4º) Calculo la mínima distancia de R y S ⟶ XY por su punto medio // a V ⟶ E

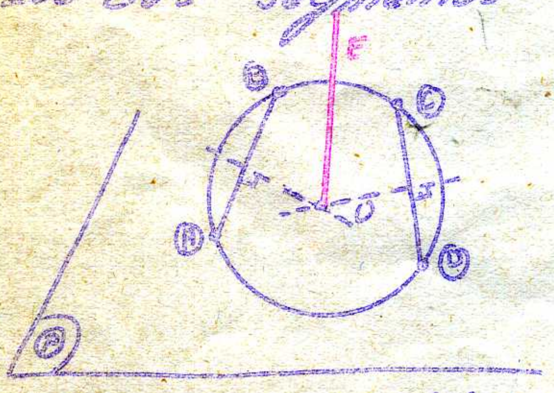
Hallar un eje de giro tal que al girar el pno P alrededor de él pase por un punto A y que de // a un pno Q



1º) Por A pno W // a Q

2º) Int $\left\{ \begin{array}{l} P \\ W \end{array} \right. \longrightarrow E$

Dados los segmentos AB y CD de igual longitud y en el mismo pno. Hallar un eje de giro que lleva a coincidir los dos segmentos

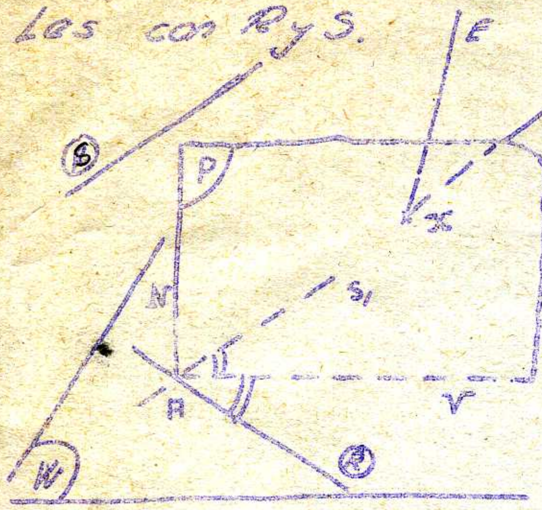


Trazamos las mediatrices de los segmentos AB y CD donde se cortan defini el punto O.
Por O ⊥ a P ⟶ E

Hallar un eje de giro que lleva a coincidir al segmento AB

NO VALE

Mediante un eje de giro V_{cal} girar la recta T hasta que forme ángulos iguales con R y S.



1º) Por un punto A de R recta $S_1 \parallel S$

Pno formado $\left\{ \begin{matrix} R \\ S_1 \end{matrix} \right. \to W$

2º) Abato W y trazo la bisectriz de R y $S_1 \to V$

3º) Por A recta ⊥ a W → N

4º) Pno formado $\left\{ \begin{matrix} N \\ V \end{matrix} \right. \to P$

5º) Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ T \end{matrix} \right. \to X$

6º) Por X recta ⊥ al $H^{tal} \to E$

7º) Int $\left\{ \begin{matrix} E \\ H^{tal} \end{matrix} \right. \to \Omega$ Int $\left\{ \begin{matrix} H^{tal} \\ P \end{matrix} \right. \to M$

Int $\left\{ \begin{matrix} H^{tal} \\ T \end{matrix} \right. \to B$

8º) Abato H^{tal} $\left\{ \begin{matrix} \Omega \to \Omega_1 \\ M \to M_1 \\ B \to B_1 \end{matrix} \right.$ ⊙ centro Ω_1

y radio $\Omega_1 B_1$

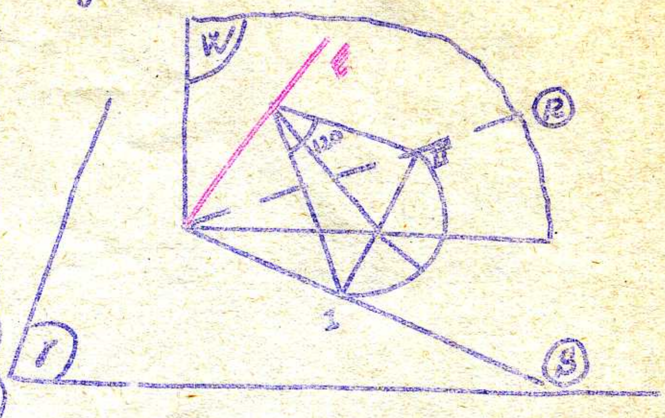
9º) Int $\left\{ \begin{matrix} M_1 \\ O \end{matrix} \right. \to \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right.$

10º) Uno X con y → T_{S_1}

Uno X con z → T_{S_2}

Hallar un eje de giro que lleve a coincidir las rectas R y S mediante un giro de 120º

R y S se cortan

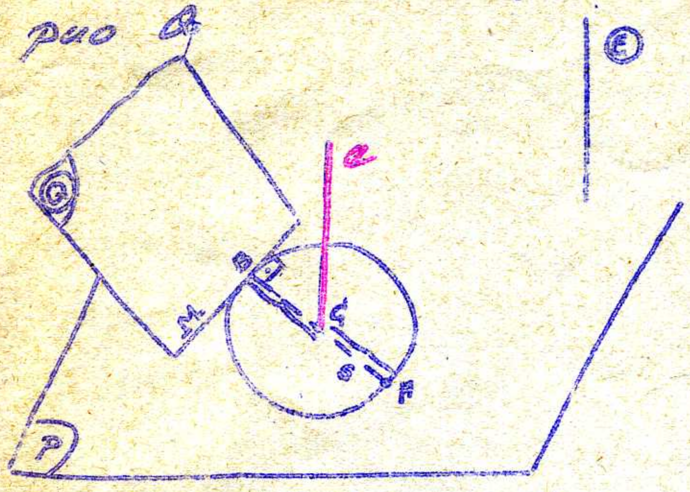


1º) Pno formado $\left\{ \begin{matrix} R \\ S \end{matrix} \right. \to \gamma$

2º) Abato γ y calculo el pno W bisector de R y S

Caso triedros

Girar el punto A alrededor de un eje desconocido (e) ∥ a (E) hasta que describa una circunferencia tg al pno Q



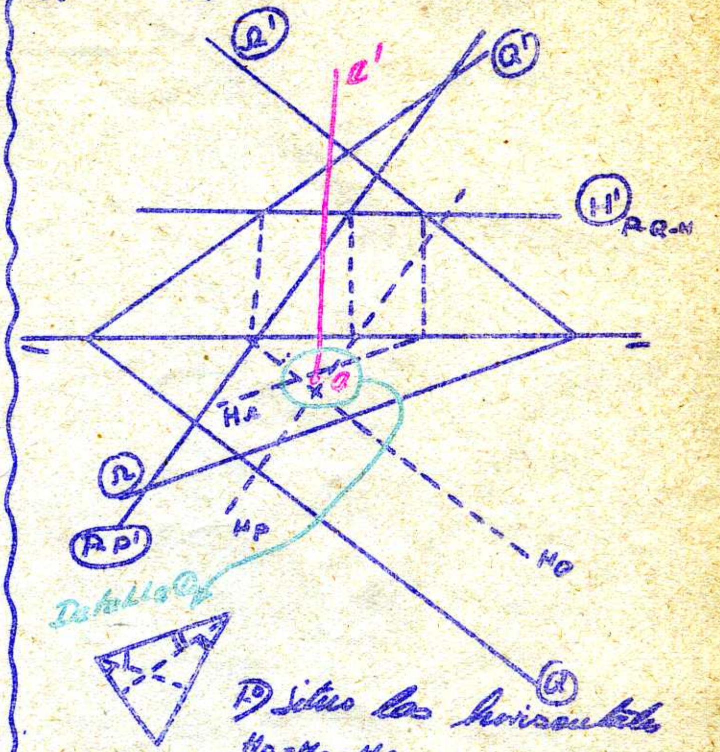
1º Por A pno P ⊥ a E

2º Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow M$

3º Abato P $\left\{ \begin{matrix} A \rightarrow A_1 \\ M \rightarrow M_1 \end{matrix} \right.$ por A_1 recta s_1 ⊥ a M_1 en B_1

4º Por el punto medio de AB ∥ E → e

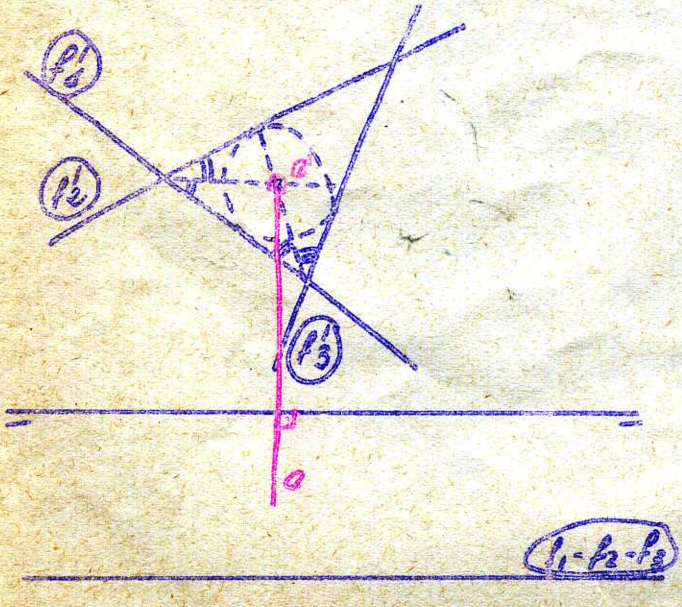
Hallar un eje de giro que lleve a coincidir los tres pnos P, Q, Ω sobre una H H de cota dada



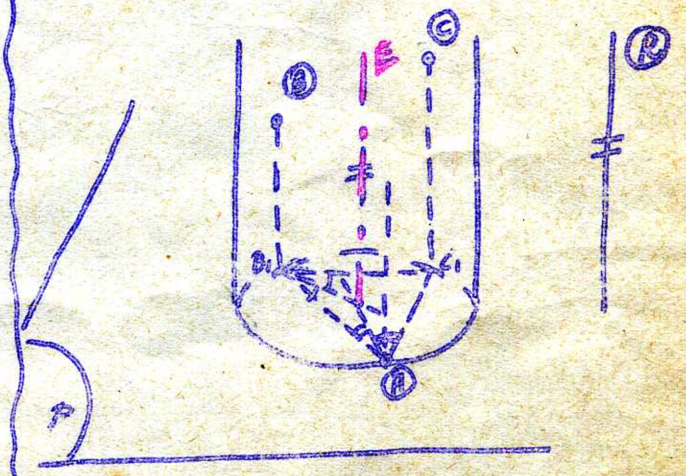
1º Sitúo las horizontales $H_P - H_Q - H_\Omega$

2º Según el formado en el detalle o calculo el eje de giro como intersección de las bisectrices

Hallar un eje de giro que lleve a coincidir las tres frontales F_1, F_2, F_3



Hallar un eje de giro que lleve a coincidir los puntos A, B, C sobre una misma recta ∥ a R



1º Por A pno ⊥ a R

2º Proyecto B y C sobre P en B_1 y C_1

3º Hago la construcción normal con el Δ A B_1 C_1

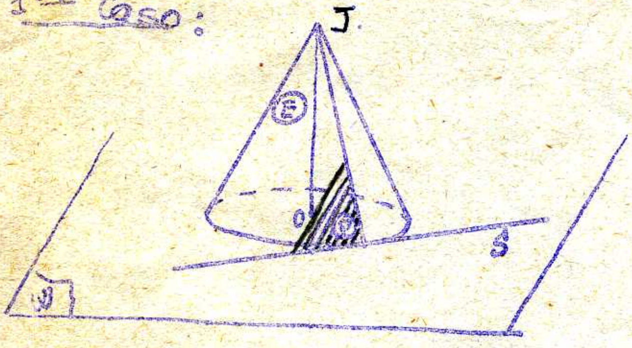
Girar un plano P alrededor de una recta (o eje) E.

Dos casos:

1º) Eje y plano se cortan → cono

2º) Eje y plano paralelos → cilindro.

1er caso:



1º) Inters. de E y P → J

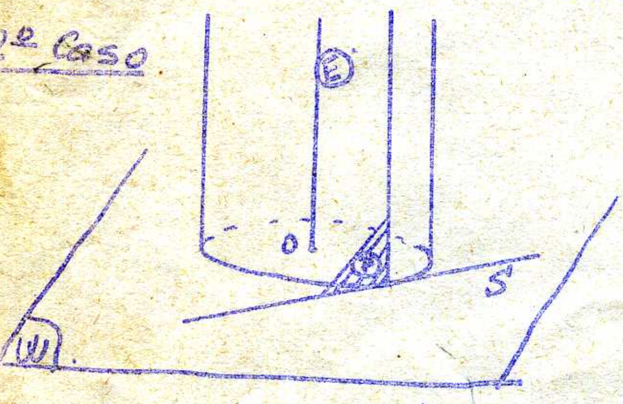
2º) Por O ∈ a E plano W ⊥ a E.

3º) Corte de P y W → S

4º) Abatir W $\begin{cases} O \to O_1 \\ S \to S_1. \end{cases}$

⊙ tg a S_1, las diversas tang a la circunferencia con el punto J me dan las posiciones de P.

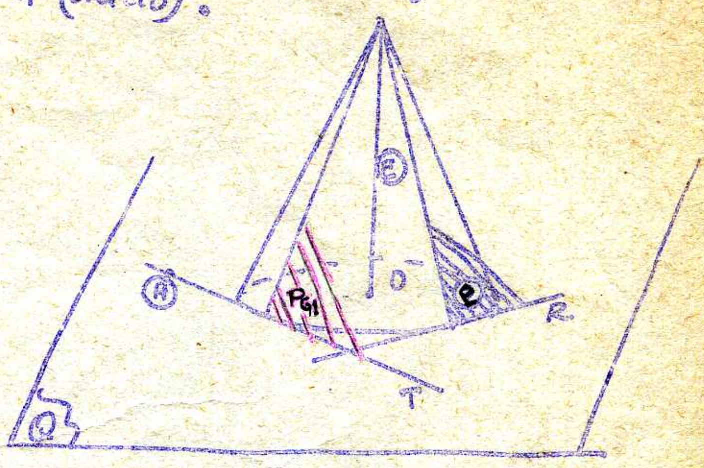
2º caso



Se sigue el mismo metodo que en el anterior caso.

Las posiciones del plano P quedan definido por las tangentes y las rectas paralelas al eje por el punto de tangencia.

Girar un plano P (dado) alrededor de un eje E (dado) que lo corta, hasta que el plano P pase por un punto A (dado).



1º) Corte de P y E punto J

2º) Por A plano Q ⊥ a E

3º) Corte de Q y E → O

4º) Corte de Q y P recta R

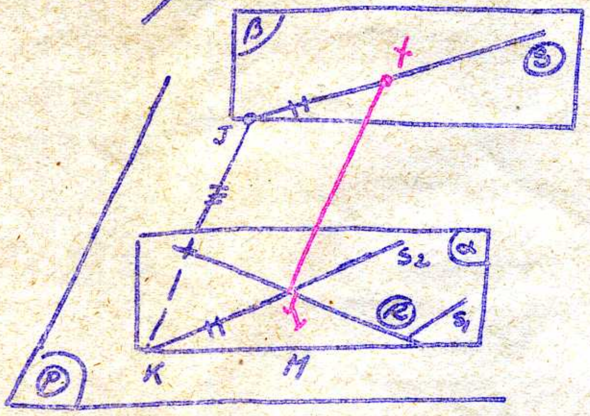
5º) Abatir Q. $\begin{cases} O \to O_1 \\ A \to A_1 \\ R \to R_1. \end{cases}$

⊙ de centro O_1 tg a R_1 por A_1 recta T_1 tg a la ⊙

6º) Desabatir Q $\{ T_1 \to T.$

7º) El plano pedido P_G esta definido por la recta T y el vertice del cono J

Hallar un segmento que se apoye en R y S de longitud $\underline{d}$ que sea ∥ al pno P.



1º Por R ∥ a S → S_1. Pno $\left\{\begin{matrix} S_1 \\ R \end{matrix}\right. \rightarrow \alpha$

2º Por S ∥ R a R_1 Pno $\left\{\begin{matrix} R_1 \\ S \end{matrix}\right. \rightarrow \beta$

3º Int $\left\{\begin{matrix} P \\ \alpha \end{matrix}\right. \rightarrow M$

4º Int $\left\{\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\right. \rightarrow J$

5º Abato P $\left\{\begin{matrix} J \rightarrow J_1 \\ M \rightarrow M_1 \end{matrix}\right.$ ⊙ centro J_1

y radio $\underline{d}$. Int $\left\{\begin{matrix} \odot \\ M_1 \end{matrix}\right. \rightarrow K_1$

desabatido K

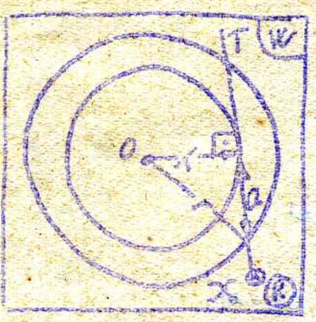
6º Por K en α recta S_2 ∥ a S

7º Int $\left\{\begin{matrix} S_2 \\ R \end{matrix}\right. \rightarrow$ Y

8º Por J ∥ a KJ que corta a S en → X

9º $\overline{XY}$ → distancia $\underline{d}$

Calcular un plano P que pase por R y corte a una esfera (dato) de radio r (centro O) según un círculo de radio a (dato)



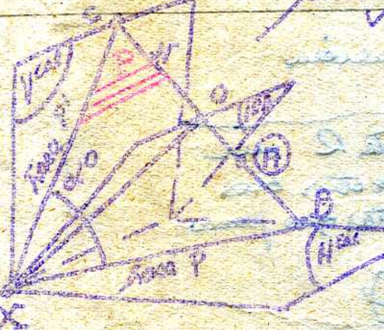
1º) Por O paso W ⊥ a R. Int $\begin{cases} W \\ R \end{cases} \to X$

2º) Según triángulo (1) calculo Δ

3º) Abato W $\begin{cases} O \to O_1 \\ X \to X_1 \end{cases}$ O centro de y radio k por X_1 tg a Q → T_1

4º) Pno formado $\begin{cases} T \\ R \end{cases} \to \boxed{P}$

Hallar un plano P que pase por A, de modo que sus trazas P y P' formen α° entre sí y el mismo ángulo en las dos proyecciones



1º) Por A recta ⊥ a 1ºB → N $\begin{cases} N \\ 1^{\circ}B \end{cases}$

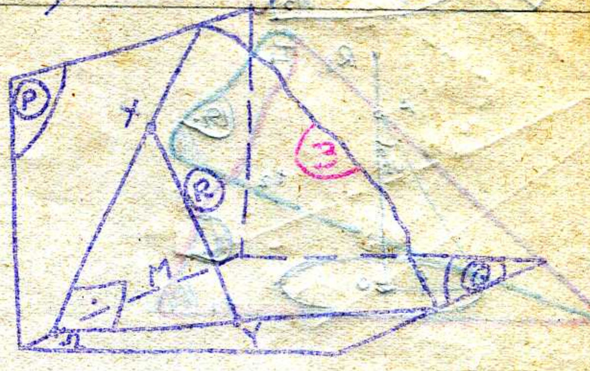
2º) Int $\begin{cases} N \\ H_{cal} \end{cases} \to B$ $\begin{cases} N \\ V_{cal} \end{cases} \to C$

3º) Según Δ calculo $\overline{CX}$

4º) Con radio CX y centro B corto a la línea de tierra → X

5º) Plano formado $\{N$

Trazar por R un plano B cuya intersección con los pnos P y Q sea de 90°



1º) Int $\begin{cases} P \\ Q \end{cases} \to M$

2º) Int $\begin{cases} R \\ P \end{cases} \to X$ $\begin{cases} R \\ Q \end{cases} \to Y$

3º) Hay que buscar un punto Ω de M que vea a $\overline{XY}$ bajo 90° según fig

Para ello:

a) Calculamos distancia $\overline{XY}$ (V.M)

b) Punto medio de XY → O

c) Pno formado $\begin{cases} M \\ O \end{cases} \to \alpha$

d) Abato α $\begin{cases} O \to O_1 \\ M \to M_1 \end{cases}$

con centro O_1 y radio $\frac{\overline{XY}}{2}$ ⊙

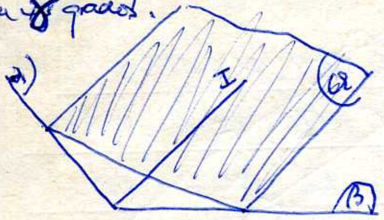
Int $\begin{cases} ⊙ \\ M_1 \end{cases} \to \begin{cases} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{cases}$ puntos bajo los cuales se ve XY bajo 90°

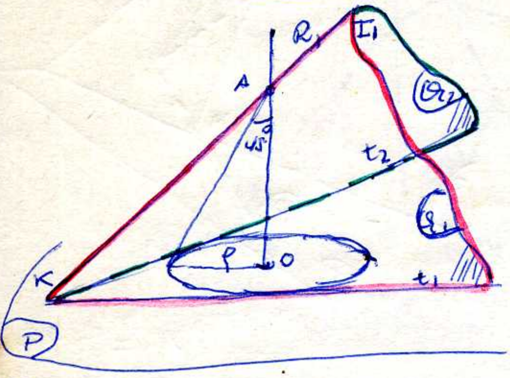
4º) Una vez conocidos Ω_1 y Ω_2 hay dos posibles soluciones

Pno formado por:

$\begin{cases} X \\ Y \\ \Omega_1 \end{cases} \to \boxed{B_1}$ $\begin{cases} X \\ Y \\ \Omega_2 \end{cases} \to \boxed{B_2}$

Dados los planos α y β y un punto A trazar por A un plano Q que corte al α y β según rectas paralelas y que forme con la recta R dada un ángulo α grados.



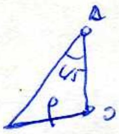


1º $\alpha \times \beta = I$

2º Por A recta $R_1 // R$.
Por A recta $I_1 // R$.

3º Pa $O \in R_1$ plano $P \perp R_1$

4º Conociendo $\overline{AO}$ calculo ρ



5º $I \times P = K$.

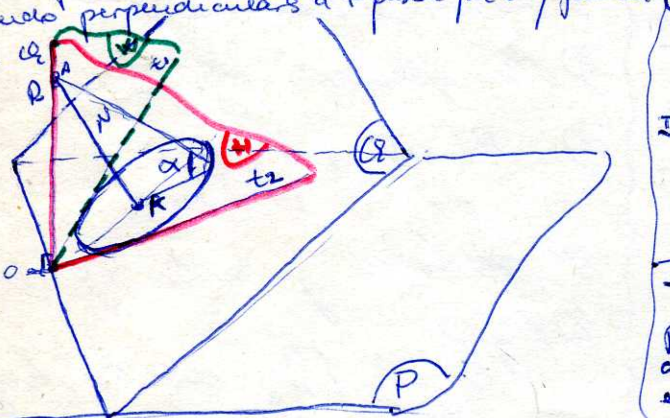
6º Abato $P(K, O)$.

7º circunferencia de centro (O) y radio ρ.

8º Por (K) tangentes a la $\oplus$ (T_1) y (T_2) que desabato

9º $T_1 + I_1 = Q_1$ $T_2 + I_1 = Q_2$ Soluciones.

Dado un plano P que pase por O hallar los planos que siendo perpendiculares a P pasen por O y formen α° con Q



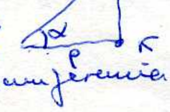
1º Por O recta $R \perp P$

2º Por punto $\forall$ A recta $N \perp Q$

3º $N \times Q = K$

4º Abato $Q(O, K)$

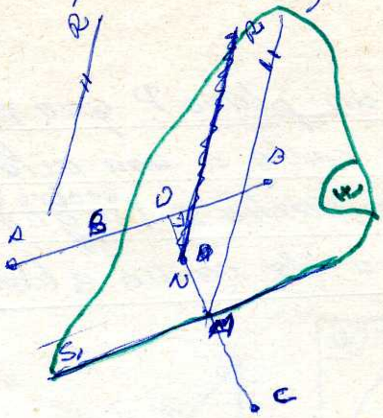
5º Con centro (K) $\oplus$(K) y radio ρ



6º desde (O) trazo tangentes a la circunferencia (T_1) y (T_2) que desabato

7º $T_1 + R = W$ $T_2 + R = H$ Solución

Trazar un plano que equidiste de tres puntos A, B y C y sea // a R



1º $A + B = S$

2º Por C recta $\perp S = N$

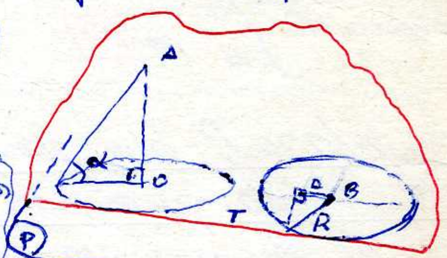
3º $N \times S = O$.

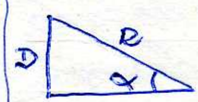
4º Por punto medio de $OC = M$ recta $R_1 // R$.

5º Por M recta $S_1 // S$

6º $S_1 + R_1 = W$ solución.

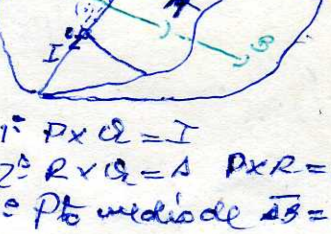
Plano que pase por A diste una distancia D del punto B y forme un ángulo α con el plano P. El punto B $\in$ al plano.





Hay dos soluciones

Trazar por la recta R un plano que corte a otros dos dados según rectas que formen entre sí 90º.



1º $P \times Q = I$

2º $R \times Q = A$ $P \times R = B$

3º Pto medio de $\overline{AB} = M$

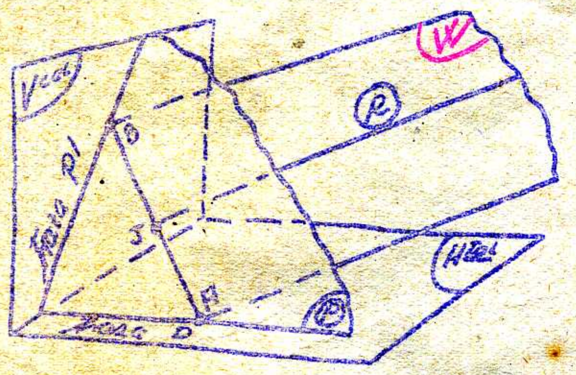
4º Circunferencia de centro M y radio $\frac{AB}{2}$ que corta a I en O_1 y O_2

5º Plano solución el formado por a $\{\overline{AO}_1$ y $\overline{BO}_1\}$ b $\{\overline{AO}_2$ y $\overline{BO}_2\}$

importante

Problema en diédrico solamente

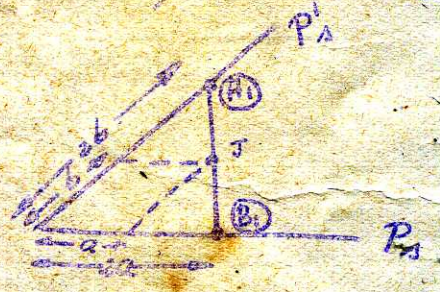
Hallar un plano W que pase por R de modo que corte al plano P (conocido) en un segmento entre sus trazas que tenga el punto medio en R



1º) Inter $\left\{\begin{matrix} P \\ R \end{matrix}\right. \longrightarrow J$

2º) Abato P $\left\{\begin{matrix} \text{traza } P \longrightarrow P_1 \\ \text{"} \quad P' \longrightarrow P'_1 \\ \text{Punto } J \longrightarrow J_1 \end{matrix}\right.$

Según la siguiente construcción calculo los puntos A_1 y B_1 tales que $\overline{A_1 J_1} = \overline{B_1 J_1}$

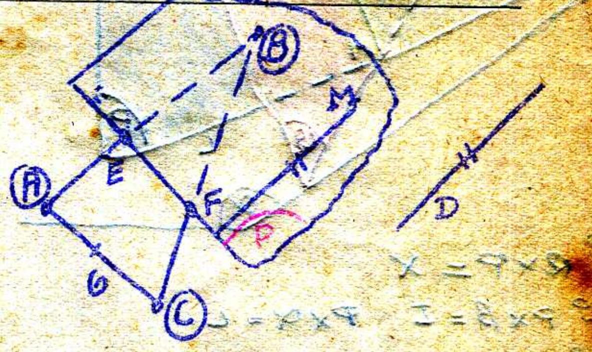


3º) Desabato $\left\{\begin{matrix} A_1 \longrightarrow A \\ B_1 \longrightarrow B \end{matrix}\right.$

$\overline{AB} \longrightarrow S$

4º) Plano formado $\left\{\begin{matrix} R \\ S \end{matrix}\right. \longrightarrow \boxed{W}$

Hallar un plano P que sea equidistante de tres puntos A, B y C y a la vez ∥ a una recta D.



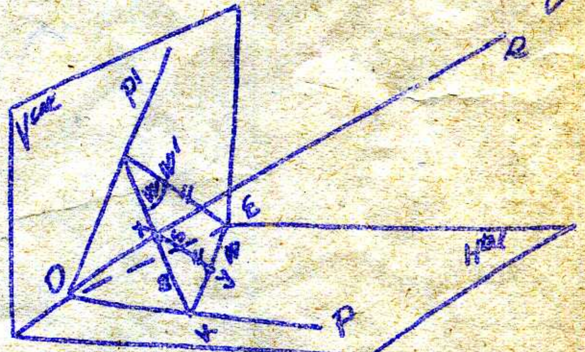
1º) Unimos los puntos ABC y calculamos los puntos medios E, F, G

2º) Unimos dos de los puntos medios EF ⟶ S

3º) Por un punto de S ∥ a D ⟶ M

4º) Plano formado $\left\{\begin{matrix} M \\ S \end{matrix}\right. \longrightarrow \boxed{P}$

Hallar un plano P que pase por R de modo que R sea bisectriz de las trazas P y P'



1º) Por un punto $X \in R$ plano $W \perp$ a R

2º) Por X recta S ∥ a W' Int $\left\{\begin{matrix} W \text{ (traza)} \\ S \end{matrix}\right. \longrightarrow Y$

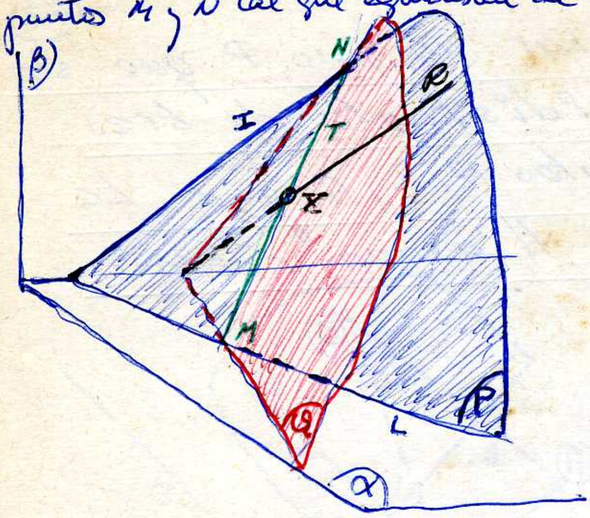
3º) Int $\left\{\begin{matrix} (W) \\ \text{Línea } T \end{matrix}\right. \longrightarrow E$

4º) Abato W $\left\{\begin{matrix} \text{traza } W \longrightarrow W_1 \\ Y \longrightarrow Y_1 \\ E \longrightarrow E_1 \end{matrix}\right.$

A partir de Y_1 llevo $\overline{Y_1 E_1}$ en sentido contrario sobre $W_1 \longrightarrow K_1$

5º) Plano formado por $\left\{\begin{matrix} K \\ O \end{matrix}\right. \longrightarrow \boxed{P}$

Por la recta R hacer pasar un plano Q.
que corte al dado P según una recta T y tal
que esta recta corte a los planos α y β en los
puntos M y N tal que equidisten de R.



1º $R \times P = X$

2º $P \times \beta = I$ $P \times \alpha = L$.

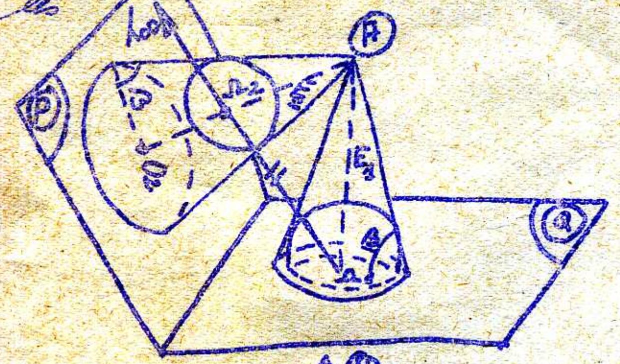
3º Abatimos $P\{X, L, I\}$

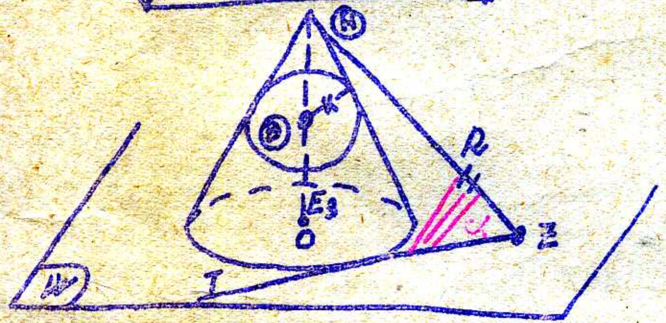
4º Buscamos los puntos M y N tal que $\overline{MX} = \overline{NX}$

5º $M + N = T$ $T + R = Q$

Hallar un plano α que forme angulos iguales con P y Q y diste K rec del punto B

Nota: No especifica el valor del angulo con P y Q solo que sean iguales



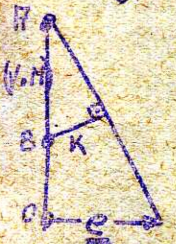


1º Por A se trazan los ejes E_1 y E_2 ⊥ a Q y P en Ω_1 y O_2
Se considera un angulo β cualquiera y se trazan los dos conos.

2º Por el método general de las esferas se calcula la dirección L_∞

3º Unimos A con B → E_3
Por O ∈ E_3 pno W ⊥ a E

4º Según fig calculamos e



5º Por A ∥ a L_∞ → R

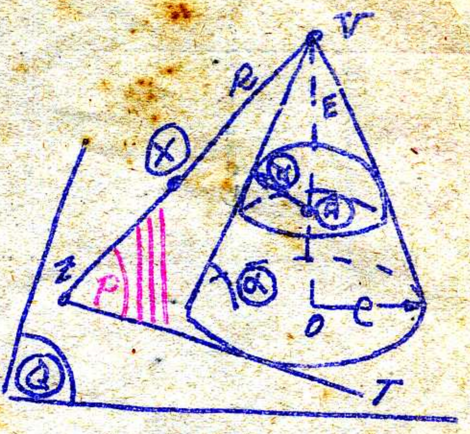
6º Int $\left\{ \begin{matrix} R \\ W \end{matrix} \right. \to Z$

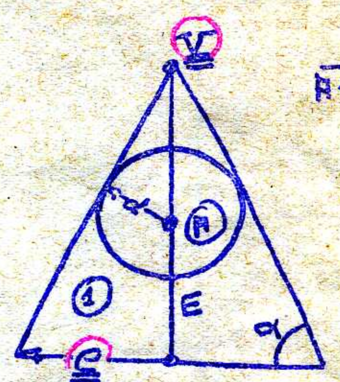
7º Abatir W $\left\{ \begin{matrix} O \to O_1 \\ Z \to Z_1 \end{matrix} \right.$

Con centro O_1 y radio e → ⊙
Por Z_1 tg a ⊙ → T_1

8º Pno formado por $\left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right. \to \boxed{\alpha}$

Hallar un plano P que diste d de A pase por X y forme α con el pno Q.





$\overline{A\text{-}O}$ en V.M

1º Por A recta ⊥ a Q → E Int $\left\{ \begin{matrix} Q \\ E \end{matrix} \right. \to O$

2º Según construcción ① calculo la distancia $\overline{AV}$ y e

3º Llevo $A\overline{V}$ sobre E y calculo V

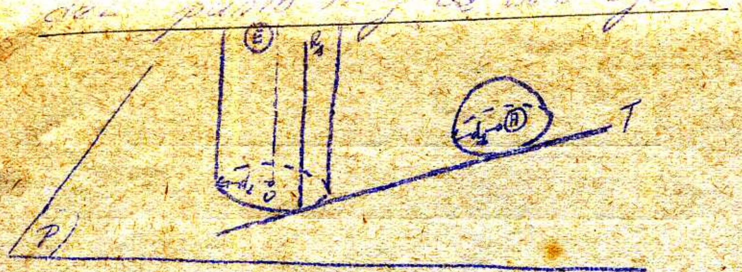
4º Uno V con X → R

5º Int $\left\{ \begin{matrix} R \\ Q \end{matrix} \right. \to Z$

6º Abato Q $\left\{ \begin{matrix} O \to O_1 \\ Z \to Z_1 \end{matrix} \right.$

⊙ centro O_1 y radio e por Z_1 tg a ⊙ → T_1

7º Pno formado $\left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right. \to \boxed{P}$



1º) Por A puo P $\perp$ a E. Int $\left\{\begin{matrix}P\\E\end{matrix}\right. \to O$

2º) Abato P $\left\{\begin{matrix}A \to A_1\\O \to O_1\end{matrix}\right.$

⊙ $r = d_1$ y centro A_1

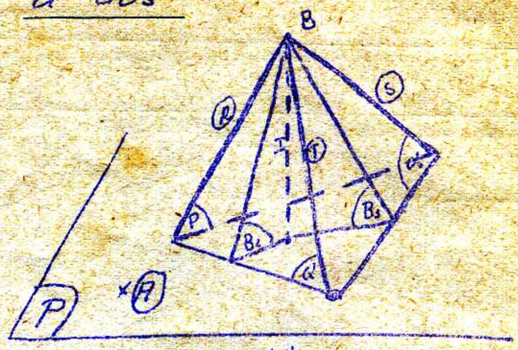
⊙ $r = d_2$ y centro O

tg a ambas ⊙ $\to T_1$

3º) Por un punto de T recta R_1 ∥ al E

4º) Puo formado por $\left.\begin{matrix}R_1\\T\end{matrix}\right\} \to \boxed{Q}$

con los puos que forman las rectas R, S y T (que se cortan) dos a dos



1º) Puo formado $\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right. \to P$

2º) " " $\left\{\begin{matrix}R\\T\end{matrix}\right. \to Q$

3º) " " $\left\{\begin{matrix}S\\T\end{matrix}\right. \to \alpha$

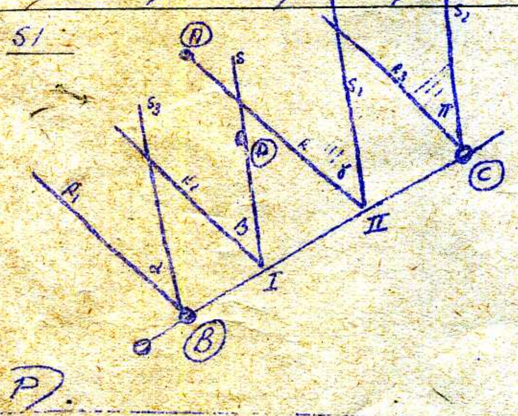
4º) Bisector de $\left\{\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right. \to B_1$

5º) " " $\left\{\begin{matrix}P\\\alpha\end{matrix}\right. \to B_2$

6º) Int $\left\{\begin{matrix}B_1\\B_2\end{matrix}\right. \to I$

7º) Por A puo $\perp$ a I $\to \boxed{P}$

Trazar por cuatro puntos A, B, C, D cuatro puos que equidistan entre sí



1º) Puo formado por A, B y C $\to$ P

2º) Dividimos $\overline{BC}$ en cuatro partes iguales (B, I, II, C)

3º) Unimos A con II $\to$ R

4º) Por B, I y C ∥ a R $\to \left\{\begin{matrix}R_1\\R_2\\R_3\end{matrix}\right.$

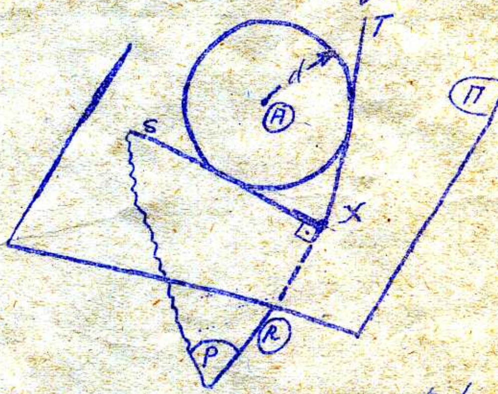
5º) Unimos D con I $\to$ S

6º) Por B, II y C ∥ a S $\to \left\{\begin{matrix}S_1\\S_2\\S_3\end{matrix}\right.$

7º) Los puos son:

$\boxed{\alpha} \left\{\begin{matrix}R_1\\S_3\end{matrix}\right.$ $\boxed{\beta} \left\{\begin{matrix}R_2\\S\end{matrix}\right.$ $\boxed{\gamma} \left\{\begin{matrix}R\\S_1\end{matrix}\right.$ $\boxed{\pi} \left\{\begin{matrix}R_3\\S_2\end{matrix}\right.$

Trazar uno o dos puos que pasen por R. y sean tg a una esfera de centro A y radio d



1º) Por A puo Π $\perp$ a R. Int $\left\{\begin{matrix}\Pi\\R\end{matrix}\right. \to X$

2º) Abato Π $\left\{\begin{matrix}X \to X_1\\A \to A_1\end{matrix}\right.$

3º) ⊙ centro A_1 y radio d

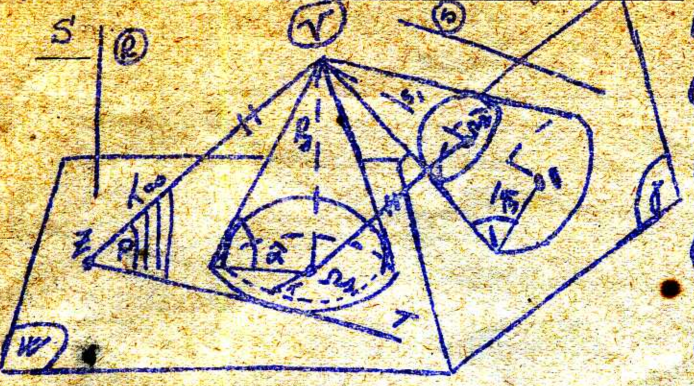
4º) Por X_1 tgs a la ⊙ $\to S_1, T_1$

5º) Desabato Π $\left\{\begin{matrix}S_1 \to S\\T_1 \to T\end{matrix}\right.$

6º) Puo formado

$\boxed{P} \left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right.$ $\boxed{Q} \left\{\begin{matrix}R\\T\end{matrix}\right.$

Hallar un plano P que pase por V forme $\hat{\alpha}$ con R y $\hat{\beta}$ con S

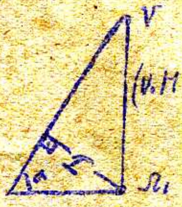


1º Por V rectas R_1 y S_1 ∥ a R y S

2º Por O de S_1 plano γ ⊥ a S_1
Por Ω_1 de R_1 plano W ⊥ a R_1

3º Conos de ejes R_1 y S_1 vértice V y que forman respectivamente $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ en la base

4º Calculo el radio $\underline{r}$ que tendrá una esfera inscrita al cono de eje R_1 con centro Ω_1 según la construcción



5) Sobre $\overline{S_1 O}$ (V.M) calculo el punto Ω_2 que será el centro de otra esfera idéntica a la anterior del mismo radio que el anterior y también inscrita al cono

6º Calculo la dirección $\overline{\Omega_1 - \Omega_2}$

7º Por V ∥ a $\Omega_1 - \Omega_2$ me da L_∞

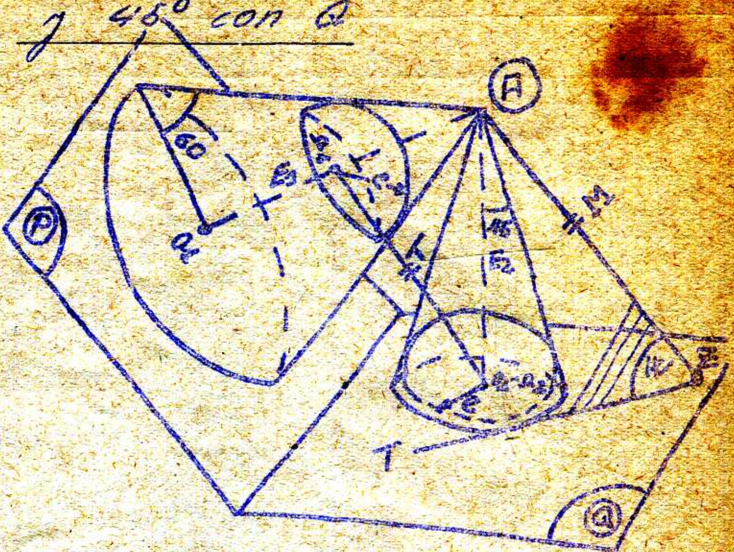
8º Int $\left\{ \begin{matrix} L_\infty \\ W \end{matrix} \right. \rightarrow Z$

9º Abato W $\left\{ \begin{matrix} Z \rightarrow Z_1 \\ \Theta \text{ centro } \Omega_1 \end{matrix} \right.$

Por Z_1 tg a $\Theta \rightarrow T_1$

10º Plano formado por $\left\{ \begin{matrix} T \\ L_\infty \end{matrix} \right. \rightarrow \boxed{P}$

Trazar un plano W que pase por A forme 60º con P y 45º con Q



1º Por A recta ⊥ P → E_1. Int $\left\{ \begin{matrix} E_1 \\ P \end{matrix} \right. \rightarrow O_1$

" " " " Q → E_2 " $\left\{ \begin{matrix} Q \\ E_2 \end{matrix} \right. \rightarrow O_2$

3º Conos de revolución de ejes E_1 y E_2 vértice A y ángulos en la base 60º y 45º

4º Inscribimos en ambos conos dos esferas de un radio e cualquiera por el mismo procedimiento del caso anterior y llamamos a sus orígenes $\overline{\Omega_1 - \Omega_2} = L$

5º Por A ∥ a L → M

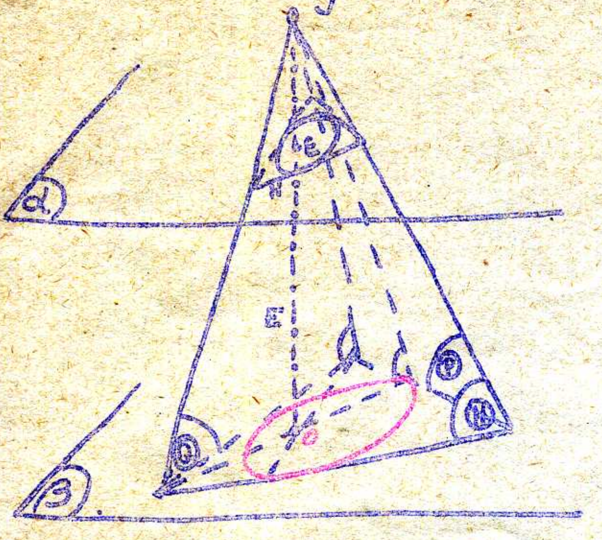
6º Int $\left\{ \begin{matrix} M \\ W \end{matrix} \right. \rightarrow Z$

7º Abato W $\left\{ \begin{matrix} Z \rightarrow Z_1 \\ O_2 \rightarrow O_{21} \end{matrix} \right.$

8º Conocido ya el radio de la base trazo por O_1 una Θ. Por Z_1 tg a $\Theta \rightarrow T_1$

9º Plano formado $\left\{ \begin{matrix} T \\ M \end{matrix} \right. \rightarrow \boxed{W}$

Hallar una circunferencia tg a los planos P, Q, H y de radio $\underline{d}$



1) Inters. de P, Q, H → punto J

2°) Bisector $\left.\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right\}$ B_1

3°) Bisector $\left.\begin{matrix}P\\H\end{matrix}\right\}$ B_2 $\Big\}$ E

4°) Por un punto E de E plano α ⊥ a E

5°) Intersección $\left.\begin{matrix}\alpha\\H\end{matrix}\right\}$ N.

6°) ⊙ de centro E y tg a N de radio e

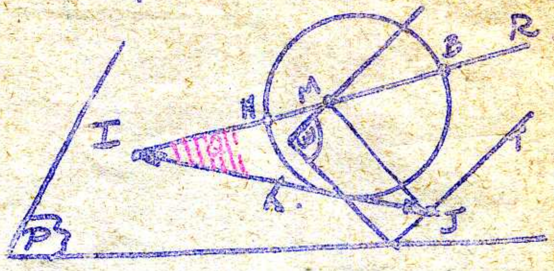
7°) Calculo de la distancia OJ

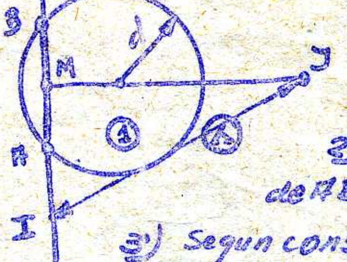
8°) Por O de E plano β ‖ al α

9°) ⊙ de centro O y radio $\underline{d}$ que será tg a los planos

10) Desabatiendo →

Dibujar una circunferencia tg al pno P(dato) de r = d que pase por los puntos A y B (datos).





1°) Int $\left.\begin{matrix}R\\P\end{matrix}\right\}$ I

$\overline{R} = \overline{AB}$

2°) Por M punto medio de AB pno W ⊥ a R.

3°) Según construcción ① calculo la distancia IJ = K

4°) Intersec. $\left.\begin{matrix}W\\P\end{matrix}\right\}$ recta T

5°) Abato P $\begin{cases}T \to T_1\\ I \to I_1\end{cases}$

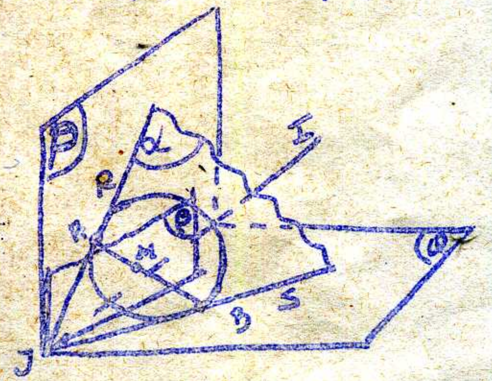
6°) Con centro en I_1 y radio K calculado en 3° corto a T_1 en un punto J_1

7°) Desabato P — J_1 → J

8°) Pno formado por $\left.\begin{matrix}R\\I\end{matrix}\right\}$ Q sobre el cual está la ⊙

9°) Abato Q y trazo normalmente.

Circunferencia tg a los planos P y Q en los puntos A y B



1°) Intersección $\left\{\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right.$ → I

2°) Punto medio de AB → M

3°) Por M plano β ⊥ a AB

4°) Intersección de $\left\{\begin{matrix}B\\I\end{matrix}\right.$ → J

5°) Plano formado por A, B y J → α

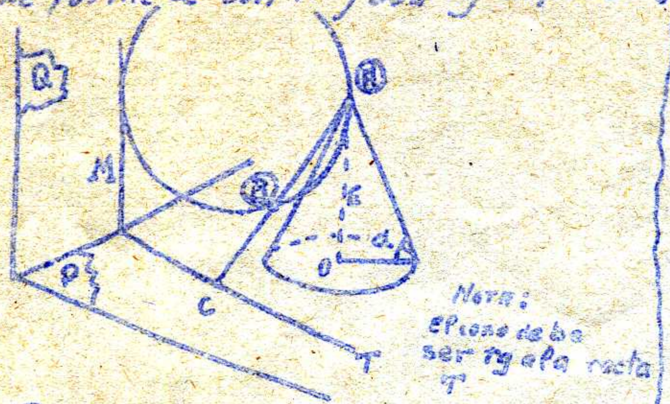
6°) Intersección de $\left\{\begin{matrix}\alpha\\P\end{matrix}\right.$ → R.

7°) Intersección de $\left\{\begin{matrix}\alpha\\Q\end{matrix}\right.$ → S

8°) Abato α $\begin{cases}R \to R_1\ (A_1)\\ S \to S_1\ (B_1).\end{cases}$

⊙ tg a R_1 y S_1 en A_1 y B_1.

Hallar una circunferencia que pase por A y B esté situada en un p^{no} que forme α con P y sea tg al plano Q.



Nota: El plano debe ser tg a la recta T

1º) Por A recta E $\perp$ a P en O.

2º) Según figura calculo ρ

3º) Corte $\left\{\begin{array}{l} AB \\ P \end{array}\right. \to C$

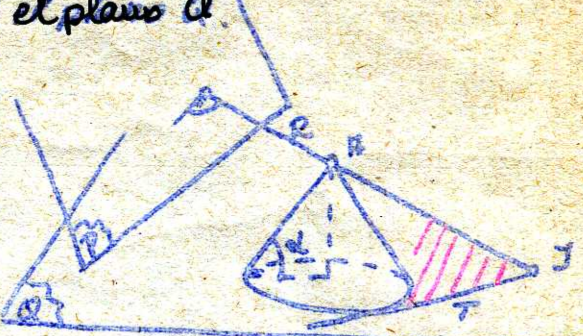
4º) Abato P $\left\{\begin{array}{l} C \to C_1 \\ O \to O_1 \end{array}\right.$ ⊙ de centro O_1 y radio ρ, por C_1 tg a ⊙ $T_1 \to T$

5º) $\left.\begin{array}{l} T \\ AB \end{array}\right\}$ W / de ⊙ / $\left.\begin{array}{l} W \\ Q \end{array}\right\}$ M.

6º) Abato W $\left\{\begin{array}{l} A \to A_1 \\ B \to B_1 \\ M \to M_1 \end{array}\right.$

7º) ⊙ que pasa por A_1, B_1 y es tg a $M_1 \to$ ⊙

Calcular una circunferencia de radio la distancia de un punto A (dato) al p^{no} P dato y de modo que el plano de la ⊙ forme α° con el plano Q



1º) Por A recta R $\perp$ a P que corta a Q en J

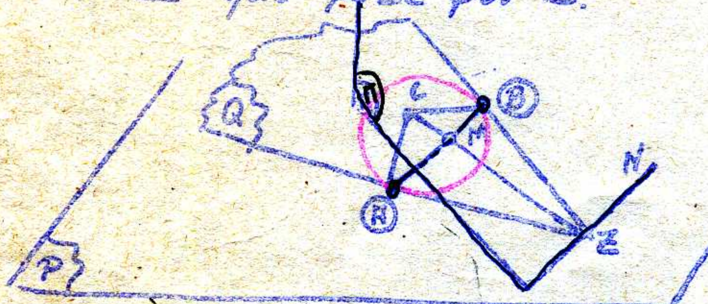
2º) Cono de base Q, vértice A y ángulo de la base α

3º) Por J tg a la ⊙ base del cono $\to$ T

4º) $\left.\begin{array}{l} R \\ T \end{array}\right\}$ plano de la ⊙ pedida.

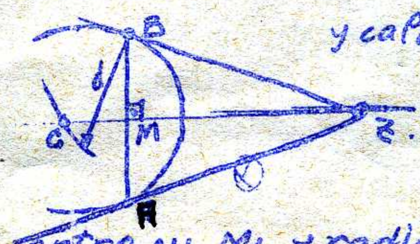
5º) Dibujo de la ⊙ normalmente.

Hallar una circunferencia tg al plano P en el punto A de radio d que pase por B.



1º) Por M (punto medio de AB) plano π $\perp$ a AB. Intersección de $\left.\begin{array}{l} \pi \\ P \end{array}\right\} \to N$

2º) Hacemos la figura y calculamos MZ.



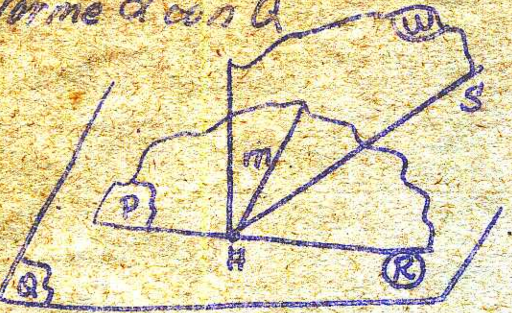
3º) Abato π $\left\{\begin{array}{l} N \to N_1 \\ M \to M_1 \end{array}\right.$ Con centro en M_1 y radio $\overline{MZ}$ corto a N_1 en Z_1

Desabatido Z

5º) Plano formado por A B Z plano Q solución

7º) Abato Q y calculo ⊙

Hallar una circunferencia tg a R en A y situada en un plano que forme α con Q



R no tiene porque estar en Q.

1º) Por A pno W ⊥ a R

2º) Intersec $\left\{\begin{matrix} W \\ Q \end{matrix}\right. \to S$

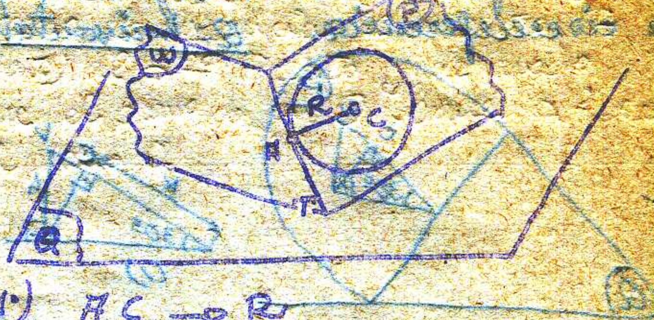
3º) Abato W $\left|\begin{matrix} A \to A_1 \\ S \to S_1 \end{matrix}\right.$

(A no tiene porque estar en S).

trazo por A_1 una recta que forme α con $S_1 \to M_1$

4º) plano formado por $\left.\begin{matrix} M \\ R \end{matrix}\right\} \to P$

Hallar una circunferencia de centro C tg al plano Q en el punto A situado en el



1º) A C → R

2º) Por A plano W ⊥ a R.

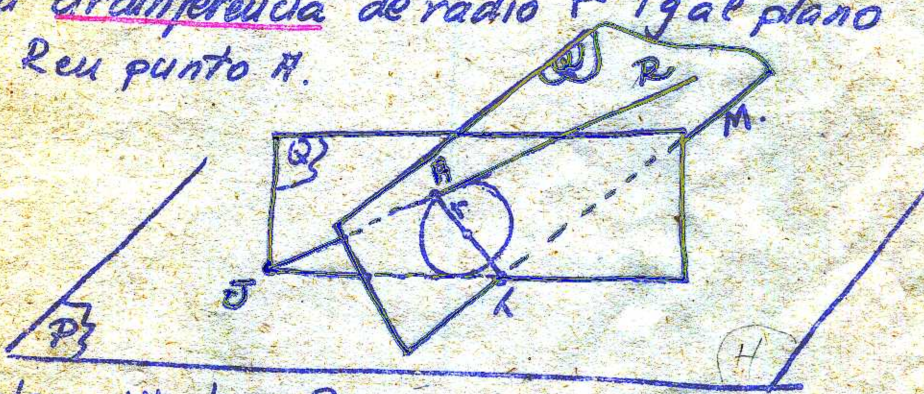
3º) Intersección $\left.\begin{matrix} W \\ Q \end{matrix}\right] T$

4º) Plano formado por $\left.\begin{matrix} T \\ R \end{matrix}\right\} P$.

5º) Abato P $\left|\begin{matrix} C \to C_1 \\ T \to T_1 \end{matrix}\right.$

6º) ⊙ de centro C tg a T_1 → solucion

Hallar una circunferencia de radio r tg al plano P y tg a la recta R en punto A.

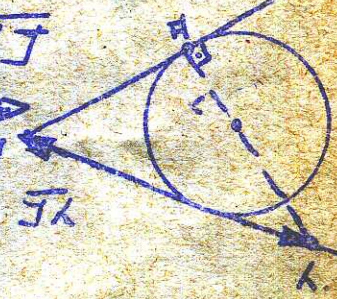


1º) Por A plano W ⊥ a R

2º) Interseccion de W y P ⟶ recta M

3º) Corte $\left\{\begin{matrix} R \\ P \end{matrix}\right. \to J$. Calculo de la distancia $\overline{AJ}$

4º) Segun la figura calculo la distancia $\overline{J\lambda}$ ⟶



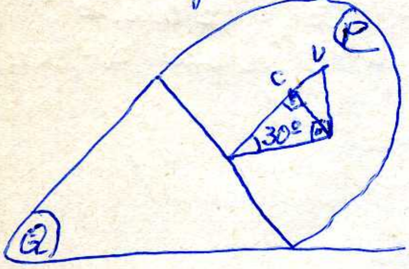
5º) Abato P $\left\{\begin{matrix} J \to J_1 \\ M \to M_1 \end{matrix}\right.$ Con centro en J_1 y radio $\overline{J\lambda}$

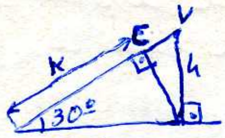
calculo λ_1 (cortando a M_1) ⟶ λ

6º) Plano formado por λ y R plano Q → solucion.

7º) Abato Q, ⊙ tg a R en A y a la interseccion de $\left\{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right.$

Dibujar las proyecciones de una circunferencia de radio R, tg a un plano Q y contenida en un plano P que pasa por A y forma 30º con el Q. El centro C de la circunferencia es la proyección ~~horizontal~~ ortogonal del punto O sobre el plano P de la circunferencia. <u>Q = horizontal</u>





(1)

1º) Mediante la construcción (1) calculo h, V y ρ

2º) Llevo h sobre el eje Z

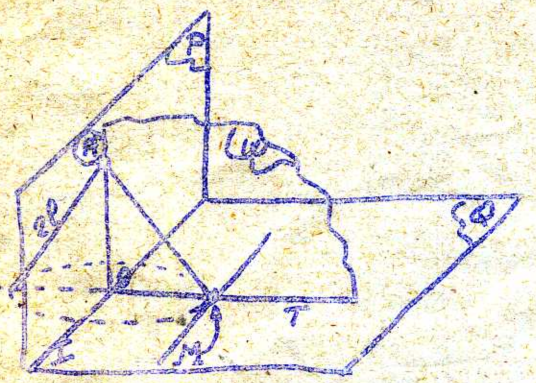
3º) Con centro en (O) y radio ρ trazo una circunferencia

4º) $\overline{AV}$ corta al horizontal en H y por (H) la tg a la O

5º) Desabato la tangente y obtengo P y con el el plano.

6º) El resto no tiene comentario

Hallar una circunferencia tg en A al plano P de radio ρ y tg a Q, se sabe que A es el punto de la ⊙ mas alto respecto a Q



1°) Int $\left\{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right. \to I$ Por A ∥ a I → R.

2°) Por A pno W ⊥ a R int $\left\{\begin{matrix} W \\ I \end{matrix}\right. \to O$

$\left.\begin{matrix} W \\ Q \end{matrix}\right\} \to T$

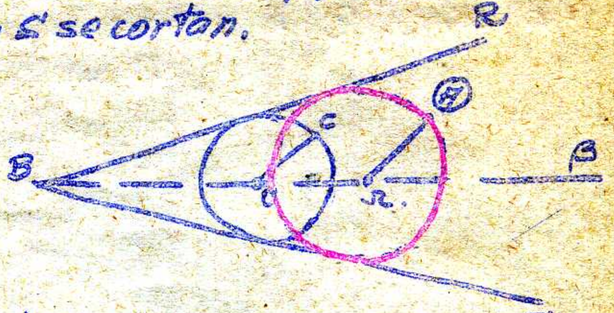
3°) Segun Δ

calculo ρ_1

4°) Abato Q $\left\{\begin{matrix} O \to O_1 \\ T \to T_1 \end{matrix}\right.$ con centro O_1 y $r = \rho_1$ corta a $T_1 \to M_1$

5°) Pno formado $\left\{\begin{matrix} R \\ AM \end{matrix}\right. \to$ solucion.

Hallar una circunferencia tg a las rectas R y S y que pase por A R y S se cortan.



1°) Interseccion de R y S → B

2°) Bisectriz de R y S → β_1

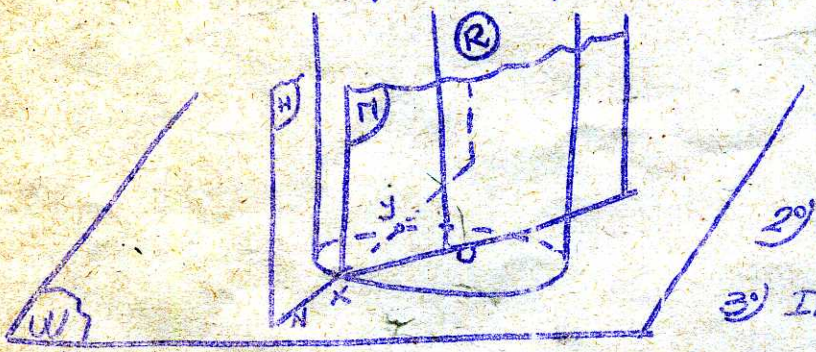
3°) Por un punto cualquiera de B → O ⊙ tg a R y S

4°) Unimos A con B y corta a la ⊙ en C.

5°) Unimos C con O y por A una ∥ a $\overline{C-O}$ que corta a β en Ω centro de ⊙ →

Hallar una circunferencia tg a la recta R y al plano P de radio d y cuyo centro este en el plano H.

Nota: Cuando R y H son paralelos



1°) Por O ∈ R plano W ⊥ a R

2°) Cilindro de eje R y r = d, centro O

3°) Interseccion de W y H → N.

4°) Abato W $\left\{\begin{matrix} O \to O_1 \\ N \to N_1 \end{matrix}\right.$ corte de la ⊙ y N puntos $\left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right.$

5°) Plano formado por X, Y, R → M

6°) Interseccion $\left\{\begin{matrix} M \\ P \end{matrix}\right. \to S$ $\left.\begin{matrix} M \\ H \end{matrix}\right\} \to T$

7°) Abato P $\left\{\begin{matrix} S \to S_1 \\ R \to R_1 \\ T \to T_1 \end{matrix}\right.$

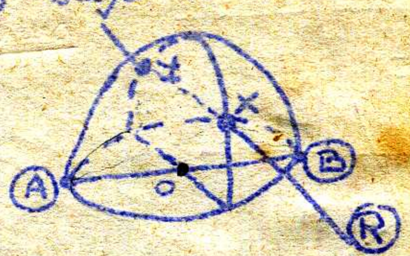
⊙ tg a R_1 y S_1 que tenga r = d y su centro este en T_1

Calcular un punto J de la recta s desde el cual se vea el segmento AB bajo α°.

1º) Hacemos recta AB ≡ r

2º) Recta s la consideramos como la L. de T. en el problema 50 de plano

Calcular 1 ó 2 puntos de la recta R desde los cuales se vea el segmento AB bajo 90°



1º) Punto medio de AB → O

2º) Plano Q formado por R y O

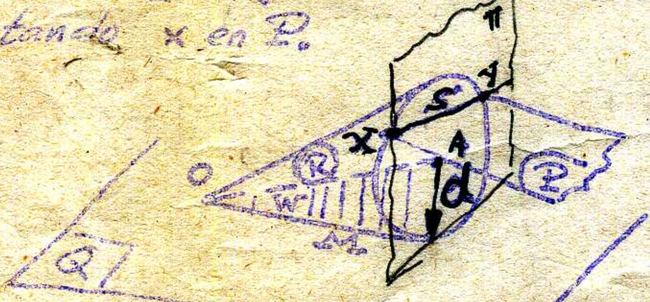
3º) Abato Q → $\begin{cases} R \to R_1 \\ O \to O_1 \end{cases}$

4º) Circunf. de centro O_1 y radio $\frac{AB}{2}$

Corte con R_1 → $\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \end{cases}$

5º) Desabato → $\begin{cases} \boxed{X} \\ \boxed{Y} \end{cases}$

Hallar un punto x que girando alrededor de R describe una ⊙ de r = d tg. al plano Q, estando x en P.



1º) Plano W que contiene a R y es ⊥ a Q $\left.\begin{matrix} W \\ Q \end{matrix}\right\} M$ $\left.\begin{matrix} R \\ Q \end{matrix}\right\} O$

2º) Abato W

y calculo A.

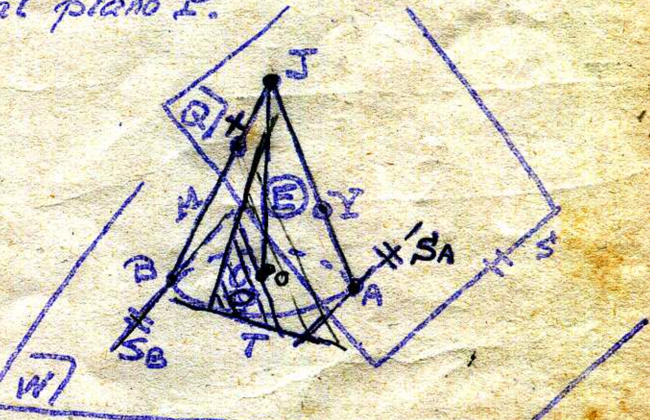
3º) Por A plano π ⊥ a R

$\left.\begin{matrix} \pi \\ P \end{matrix}\right\} S$

4º) Abato π, ⊙ de centro A_1 y corto con S_1

dos soluciones X e Y

Hallar 1 ó 2 puntos del plano Q tales que al girar alrededor de E describan ⊙ de r mín y r máx. tg. al plano P.



1º) Por O de E plano W ⊥ a E

2º) $\left.\begin{matrix} Q \\ W \end{matrix}\right\} S$ $\left.\begin{matrix} Q \\ E \end{matrix}\right\} J$ $\left.\begin{matrix} P \\ W \end{matrix}\right\} T$

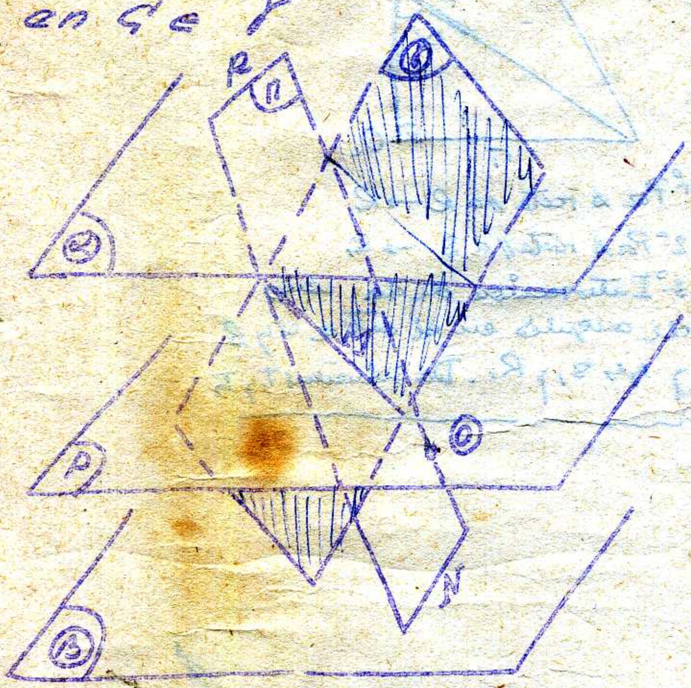
3º) Abato W $\begin{cases} T - T_1 \\ O - O_1 \\ S - S_1 \end{cases}$ ⊙ centro O_1 tg a T_1

4º) En el abato trazo ∥ a S_1 tg a ⊙ en A_1 y B_1

5º) Desabato → uno $\begin{cases} AJ — R \\ BJ — M \end{cases}$

6º) $\left.\begin{matrix} R \\ Q \end{matrix}\right\} \boxed{Y}$ $\left.\begin{matrix} M \\ R \end{matrix}\right\} \boxed{X}$

Hallar una recta S tal que pasando por el punto O, corte a los planos α, β y γ (siendo α y β ∥) según tres puntos A, B, C tal que $\overline{AB} = l$ (dato) y su punto medio se encuentre en C ∈ γ



1° Pno ∥ a α y β equidistante con ellos → P

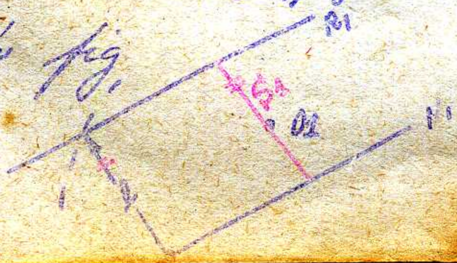
2° Int $\{^{P}_{\gamma} \rightarrow M$

3° Pno formado $\{^{M}_{O} \rightarrow \pi$

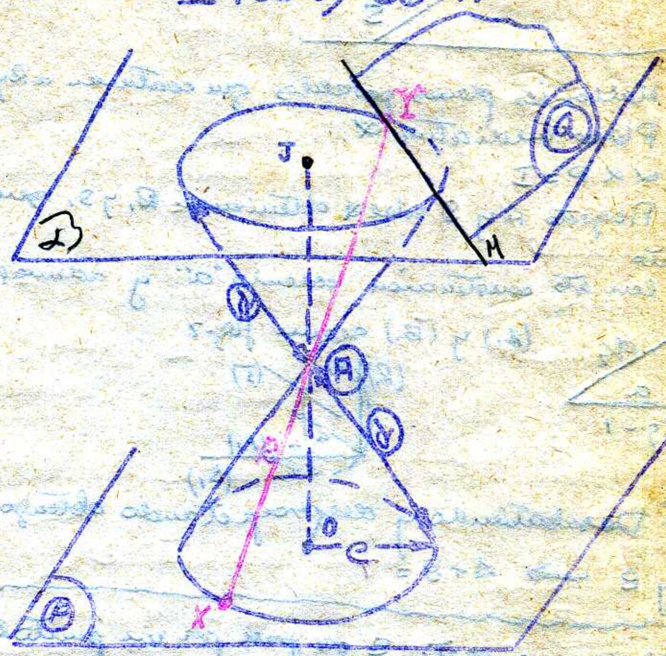
4° Int $\{^{\pi}_{\alpha} \rightarrow R$

5° Int $\{^{\pi}_{\beta} \rightarrow N$

6° Abato π $\left\{\begin{array}{l} O \rightarrow O_1 \\ R \rightarrow R_1 \\ N \rightarrow N_1 \end{array}\right.$ y calculo S según fig.

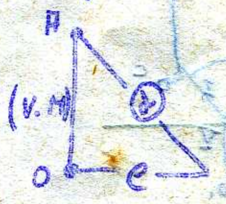


Hallar una recta R que pase por A de modo que corte a los pnos P y Q en dos puntos X e Y que disten d (dato) de A



1° Por A recta ⊥ a P. Int $\{^{P}_{e} \rightarrow O$

2° según fig calculo e



3° Calculo J sobre E de modo que $AO = AJ$

4° Por J pno ∥ a P → α

Int $\{^{\alpha}_{Q} \rightarrow M$

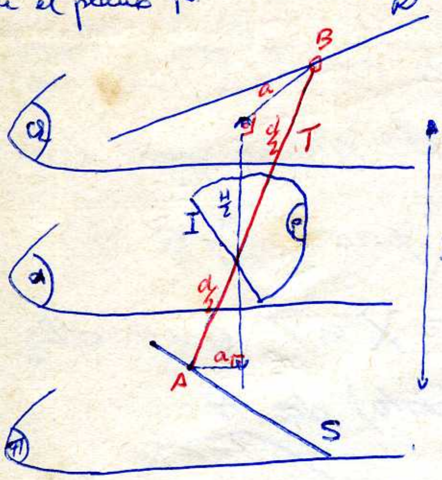
5° Abato α $\left\{\begin{array}{l} J \rightarrow J_1 \\ M \rightarrow M_1 \end{array}\right.$

⊙ centro J_1 y radio e.

Int $\{^{M_1}_{\odot} \rightarrow Y_1$

6° Uno A con Y → R

Hallar una recta T que se apoye en dos dadas R, S de longitud dada igual a "d" y cuyo punto medio esté en el plano P.



1º Hallo los planos paralelos que contienen a R y S

2º Plano mediatriz α.

3º α × P = I

4º Proyecto R y S sobre α obteniendo R_1 y S_1 que abato

5º Con esta construcción calculo "a" y además (A_1) y (B_1) según fig-2

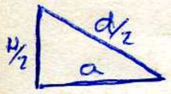
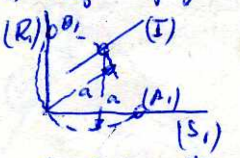
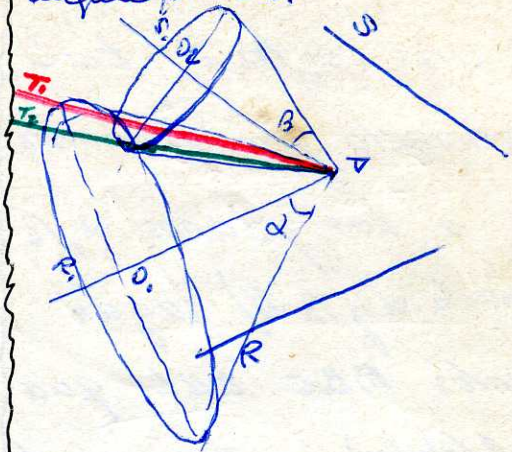


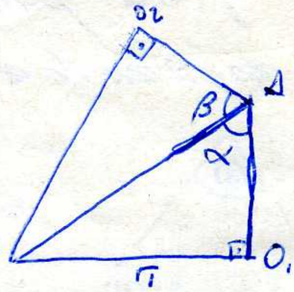
fig-1



6º Desabatiendo y desproyectando obtengo A y B → A+B = T

Hallar una recta que pase por A forme un ángulo α con R y un ángulo β con S.



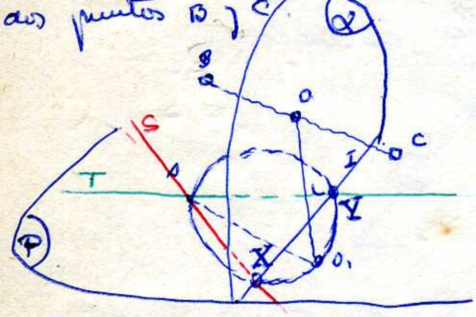


1º Por A recta // a R → R_1

2º Por A recta // a S → S_1

3º Intersección de dos conos de ángulos en el vértice α y β y ejes S_1 y R_1. Dos soluciones T_1 y T_2

Hallar una recta S que pase por un punto A esté contenida en un plano P y equidiste de dos puntos B y C



1º Por punto medio de AB, O plano α ⊥ AB.

2º α × P = I.

3º Por O recta L ⊥ P.

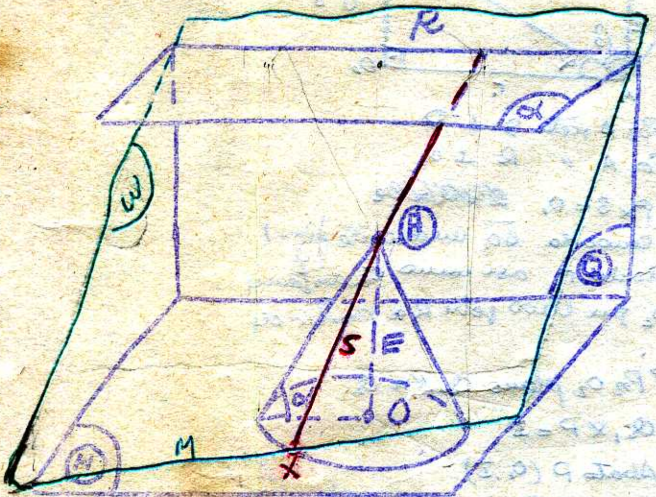
4º L × P = O_1

5º Arco capaz que ve al segmento AO_1 bajo ángulo de 90º

6º I × Arc. Capaz 90º = X, Y

7º A + X = S   A + Y = T

Hallar una recta S que pase por A forme α con H de modo que corte al pao Q en un punto que equidiste de A y del corte con H



1º) Por A recta E ⊥ a H.

Int $\left\{ \begin{matrix} H \\ E \end{matrix} \right. \rightarrow O$

2º) Como angulo en base α

3º) A una distancia AO (V.M) por encima de A pno ∥ a H → α

4º) Int $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow R$

5º) Pno $\left\{ \begin{matrix} R \\ A \end{matrix} \right. \rightarrow W$ Int $\left\{ \begin{matrix} W \\ H \end{matrix} \right. \rightarrow M$

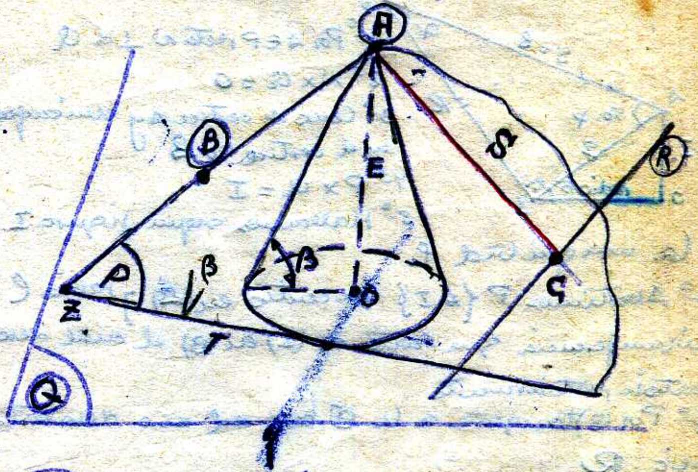
6º) Abato H $\left\{ \begin{matrix} M \rightarrow M_1 \\ O \rightarrow O_1 \end{matrix} \right.$ ⊙ centro O_1

y radio e según fig

Int $\left\{ \begin{matrix} \odot \\ M_1 \end{matrix} \right. \rightarrow X_1$

7º) Uno X con A → $\boxed{S}$

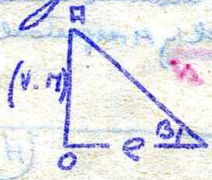
Hallar una recta S que pase por A y se apoye en R de forma que el pao formado por $\left\{ \begin{matrix} S \\ B \text{ punto dato} \end{matrix} \right. \rightarrow R$ (pe) forme β con el pno Q



1º) Por A recta ⊥ a Q → E

Int $\left\{ \begin{matrix} E \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow O$

2º) Según triangulo calculo e



3º) Uno A con B y corto a Q en Z

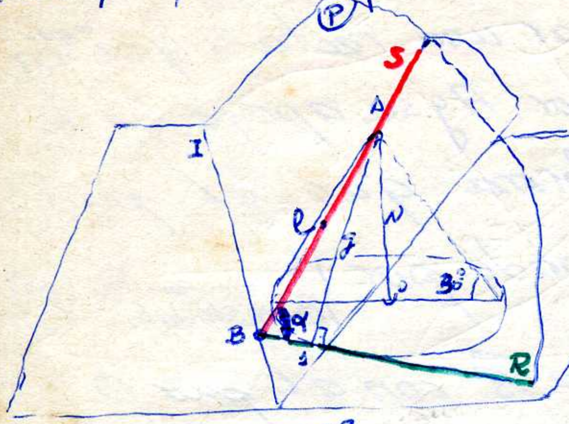
4º) Abato Q $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ Z \rightarrow Z_1 \end{matrix} \right.$ ⊙ de centro O_1 y radio e, por Z_1 tg a la ⊙ da T_1

5º) Pno formado $\left\{ \begin{matrix} AB \\ T \end{matrix} \right. \rightarrow P$

6º) Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right. \rightarrow C$

7º) Recta formada $\left\{ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \right. \rightarrow \boxed{S}$

Dados dos planos P y Q hallar una recta R en el plano Q y otra en P de modo que el ángulo formado por R y S sea $\alpha = 45^\circ$ y el plano formado por las rectas R y S forme un ángulo $\beta = 30^\circ$ con el plano Q.



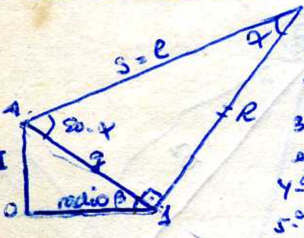
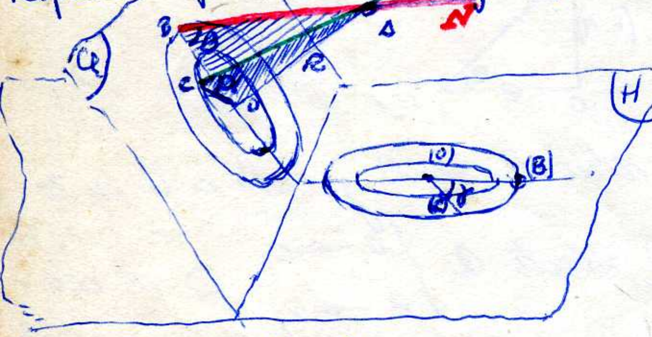


fig-I

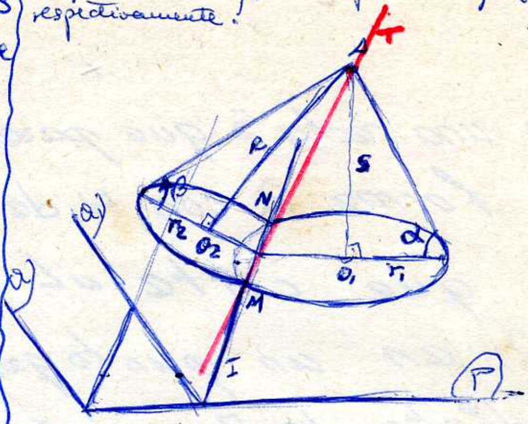
1° Por A∈P recta N ⊥ a Q
2° N × Q = O
3° Cono de vértice A y semiángulo en el vértice 90-β
4° P × Q = I
5° Hallamos según figura I la magnitud l
6° Abatimos P{A,I} con centro en (A) y radio l circunferencia que corta a (I) en (B) el cual será batido posteriormente
7° Por (B) tangente a la base del cono desabatida será R
8° AB recta S solución junto con R.

Por el punto A trazar dos rectas M y N que formen los ángulos α y β con el plano Q y de manera que las proyecciones ortogonales de las rectas sobre Q formen un ángulo γ. La N tiene la mínima inclinación respecto al plano horizontal (y M respecto al vertical)



1° Por A recta ⊥ a Q = R
2° R × Q = O
3° Conos de vértice A y semiángulos 90-α y 90-β
4° Abatimos plano Q sobre H y en él hallamos (B)∈N y (C)∈M.

Trazar por un punto A una recta que forme ángulos dados α y β con los planos P y Q respectivamente.



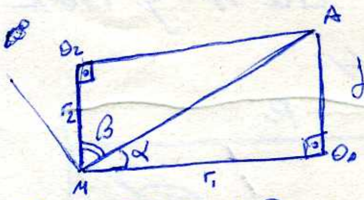


fig-1

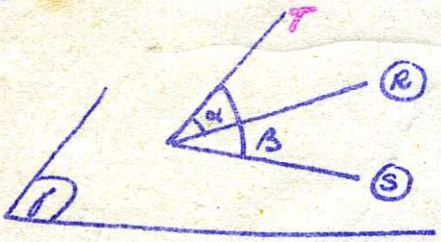
1° Por A recta S ⊥ P
Por A " R ⊥ Q
2° P × S = O_1
3° conocida $\overline{AO_1}$ mediante fig-1 calculo r_1 así como la distancia AO_2 que llevo sobre R a partir de A.
4° Por O_2 plano Q_1 // a Q.
5° Q_1 × P = I
6° Abato P (O_1 I)
7° En el abatimiento de P trazo circunferencia de centro (O_1) y radio r_1 que cortará a (I) en dos puntos (M) y (N) los cuales desabato.
8° M+A = T   N+A = J (no dibujo) soluciones del problema.

Hallar una recta T que se apoya en R y S formando respectivamente α y β

a) Cuando R y S se cortan

b) " " " " cruzan

[a] Directamente 1º de triedros



[b] 1º Por $X \in S$ recta M $\parallel$ a R

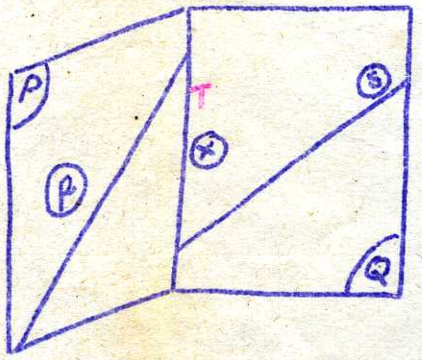
2º Pno $\left\{\begin{matrix}M\\S\end{matrix}\right. \rightarrow \gamma$

3º Por J de R recta N $\perp$ a γ

4º Pno $\left\{\begin{matrix}N\\R\end{matrix}\right. \rightarrow W$. Int $\left\{\begin{matrix}W\\\gamma\end{matrix}\right. \rightarrow R_1$

5º Igual que caso [a] considerando R_1 en vez de R

Hallar una recta T que se apoya en R y S y pase por el punto X

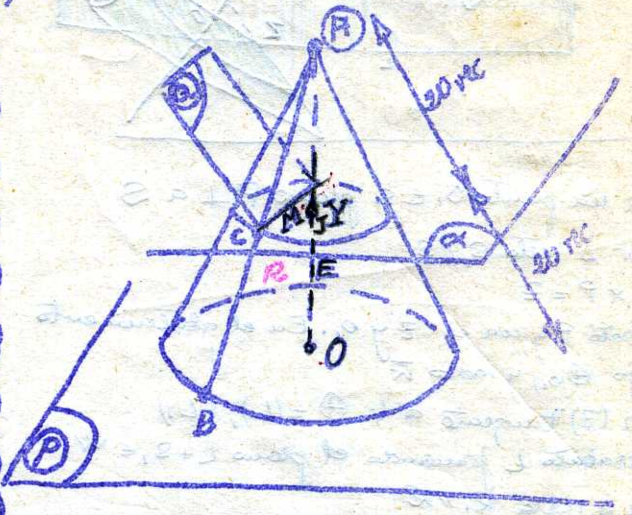


1º Pno formado $\left\{\begin{matrix}R\\X\end{matrix}\right. \rightarrow P$

2º Pno formado $\left\{\begin{matrix}S\\X\end{matrix}\right. \rightarrow Q$

3º Int $\left\{\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right. \rightarrow \boxed{T}$

Hallar una recta R que pase por A corta a P y Q en dos puntos B y C tales que BC = CA = 20 m

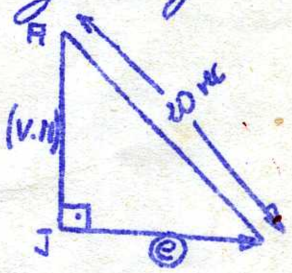


1º Por A recta E $\perp$ al pno P. Int $\left\{\begin{matrix}E\\P\end{matrix}\right. \rightarrow O$

2º Por J (punto medio de AO) pno $\parallel$ a P $\rightarrow \alpha$ o Int $\left\{\begin{matrix}\alpha\\E\end{matrix}\right.$

3º Int $\left\{\begin{matrix}Q\\\alpha\end{matrix}\right. \rightarrow M$

4º Según fig calculo e



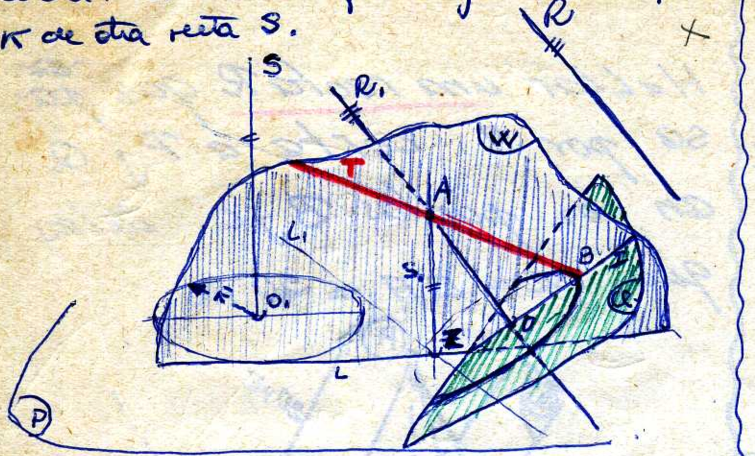
5º Abato α $\left\{\begin{matrix}J \rightarrow J_1\\M \rightarrow M_1\end{matrix}\right.$

⊙ centro J_1 y radio e Int $\left\{\begin{matrix}\odot\\M_1\end{matrix}\right. \rightarrow C_1$

6º Uno A con C $\rightarrow \boxed{R}$

7º Int $\left\{\begin{matrix}R\\P\end{matrix}\right. \rightarrow B.$

Hallar una recta que pase por un punto A forme con la recta R un ángulo α y diste un segmento K de otra recta S.



1º Por un punto $O_1 \in S$ plano $P \perp$ a S

2º Por A recta $S_1 // S$

3º $S_1 \times P = Z$

4º Abato P y con el Z y O_1. En el abatimiento dibujo $\oplus (O_1)$ y radio $\overline{K}$

5º Por (Z) tangente a la $\oplus = (L), (L_1)$

6º Desabato L formando el plano $L + S_1 = W$

7º Por A recta $R_1 // R$.

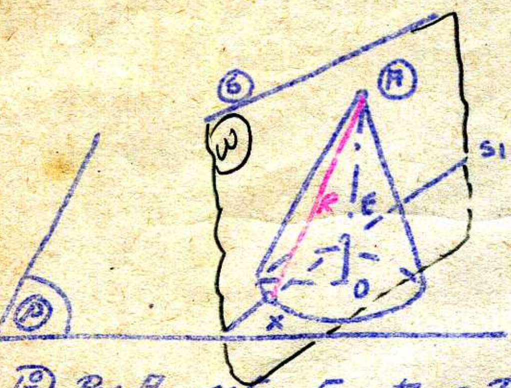
8º Por un punto cualquiera $O \in R_1$ plano $Q \perp R_1$

9º $W \times Q = I$

10º Abato Q (O, I), con centro en (O) traza circunferencia de radio ρ que cortará a (I) en dos puntos tomo por ejemplo (B) el cual desabato

11º $A + B = T$ solución (4 soluciones).

Hallar una recta R que pase por A forme α con P y se apoye en S



1º Por A, recta E $\perp$ a P. Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ E \end{matrix} \right. O$

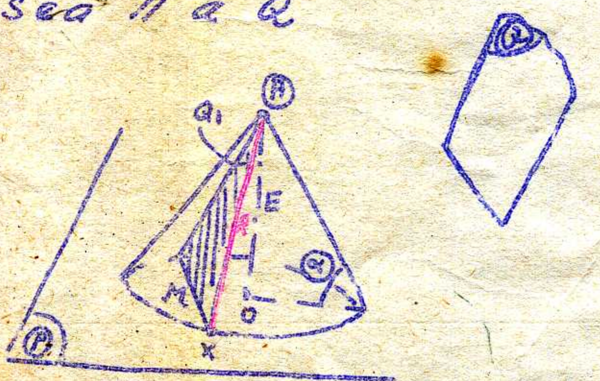
2º según fig calculo e

3º Plan $\left\{ \begin{matrix} S \\ A \end{matrix} \right. \rightarrow W$. Int $\left\{ \begin{matrix} W \\ P \end{matrix} \right. \rightarrow S_1$

4º Abato P $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ S_1 \rightarrow S_{11} \end{matrix} \right.$ con centro O_1 y radio e ○ Int $\left\{ \begin{matrix} O \\ S_{11} \end{matrix} \right. \rightarrow X_1$

5º Uno X con A $\rightarrow \boxed{R}$

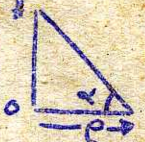
Hallar una recta R que pase por A forme α con P y sea // a Q



1º Por A recta E $\perp$ a P. Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ E \end{matrix} \right. \rightarrow O$

2º Por A plano // a Q $\rightarrow Q_1$. Int $\left\{ \begin{matrix} Q_1 \\ P \end{matrix} \right. \rightarrow M$

3º Calculamos e según fig

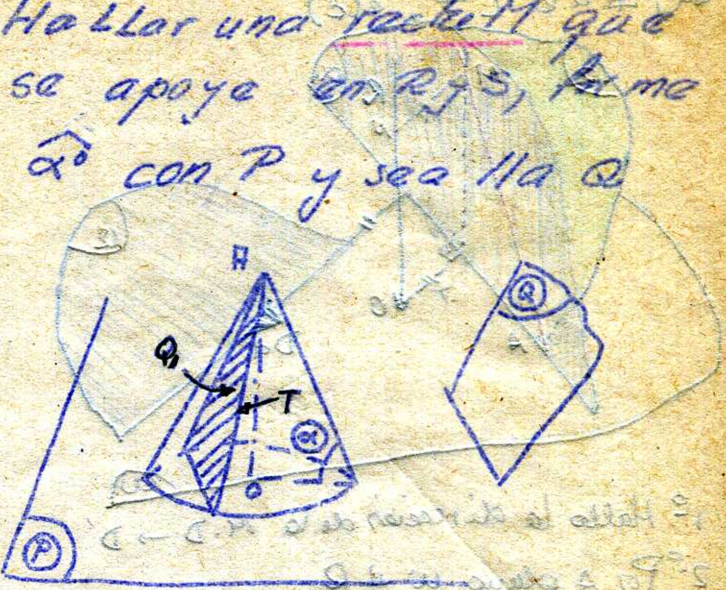


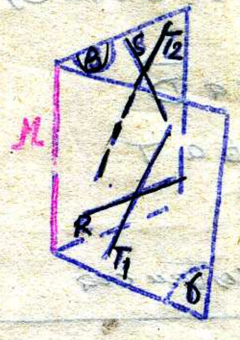
4º Abato P $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ M \rightarrow M_1 \end{matrix} \right.$ O centro O_1 y radio e

Int $\left\{ \begin{matrix} O \\ M_1 \end{matrix} \right. \rightarrow X_1$

5º Uno A con X $\rightarrow \boxed{R}$

Hallar una recta M que se apoye en R y S, forme $\hat{\alpha}$ con P y sea // a Q





1º Tomamos un punto A y lo proyectamos sobre P según O

2º Trazamos un cono de vértice A y semiángulo α

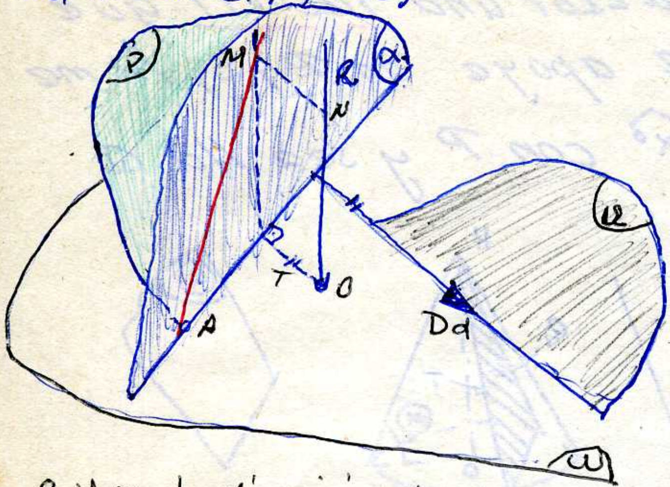
3º Calculamos la recta T como intersección de Q_1 // a Q por A y el cono

4º Por un punto de R trazamos T_1 // T. Para formado $\left\{ \begin{matrix} R \\ T_1 \end{matrix} \right. \rightarrow \gamma$

5º Por un punto de S trazamos una T_2 // T. Para formado $\left\{ \begin{matrix} T_2 \\ S \end{matrix} \right. \rightarrow \beta$

6º Int $\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right. \rightarrow \boxed{M}$

Por un punto A trazar una recta contenida en un plano P de tal forma que la M.D tenga una posición determinada (⊥ al horizontal, ⊥ a la L.T, etc)



1º Hallo la dirección de la M.D → D

2º Por A plano ω ⊥ R.

3º α (plano que contiene a D o // a D) x ω = D

4º R x ω = O

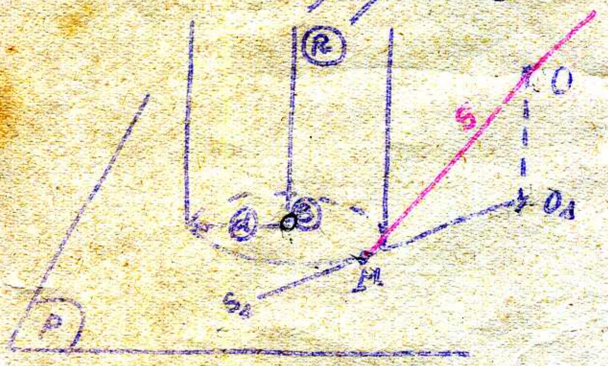
5º Por O recta T // a $\vec{D}$

6º Por A plano α ⊥ a T.

7º α x P = S

8º MN mínima distancia

Hallar una recta S que pase por O de modo que la mínima distancia con R valga $\underline{d}$ y pase (la m. d) por B



1º Por B pno P ⊥ a R

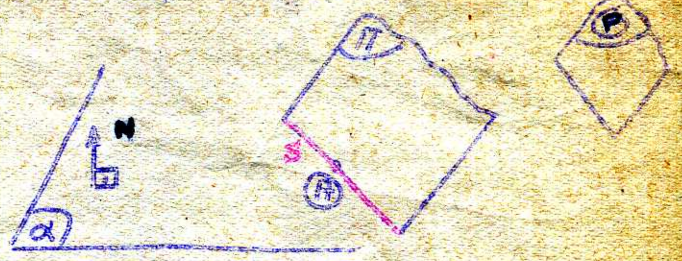
2º Proyecto O sobre P → O_1

3º Abato P $\begin{cases} O_1 \to O_{1_1} \\ B \to B_1 \end{cases}$ ⊙ centro B_1 y radio $\underline{d}$

4º Desde O_{1_1} tg a la ⊙ en M_1

5º Recta $\overline{MO}$ → $\boxed{S}$

Trazar una recta S que pase por A sea ∥ al pno P y tal que su m. d. con R sea ∥ a Q



1º Por un punto B de R pno W ⊥ a R

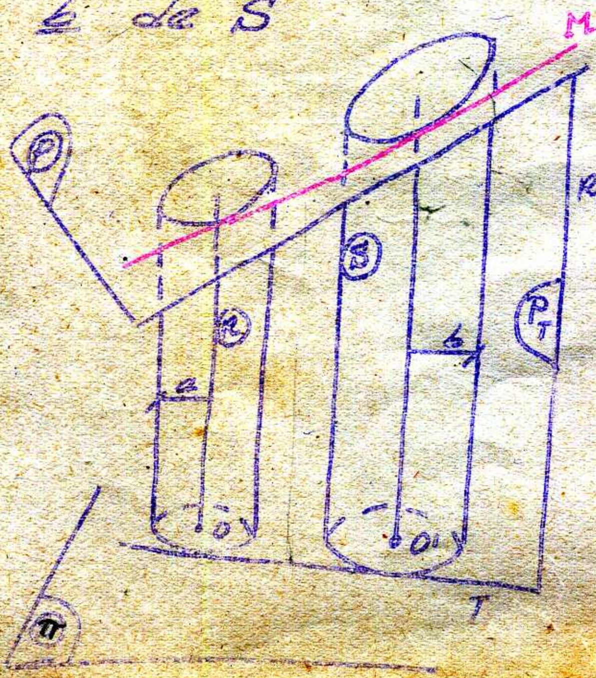
2º Int $\begin{cases} W \\ Q \end{cases}$ → N

3º Por A pno π ∥ a P

4º Por A pno α ⊥ a N

5º Int $\begin{cases} \pi \\ \alpha \end{cases}$ → $\boxed{S}$

Dadas dos rectas ∥ R y S calcular una recta M que pertenezca al pno P y diste $\underline{a}$ de R y $\underline{b}$ de S



1º Pno π ⊥ a R y S

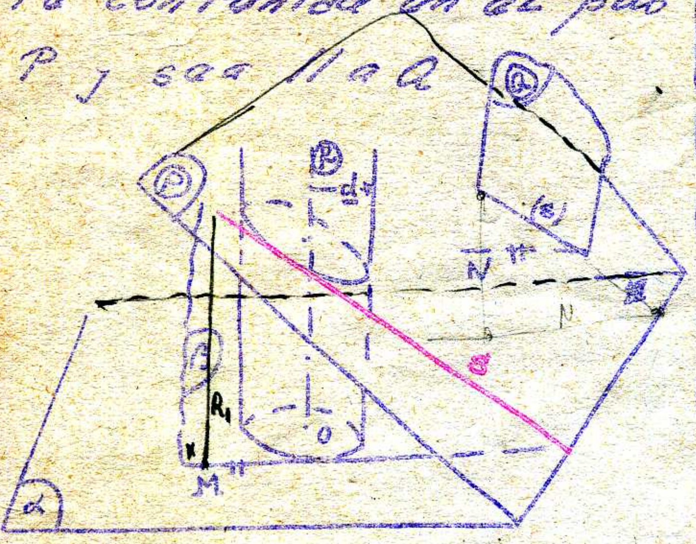
2º En π trazo ⊙ de centro O y O' y radio $\underline{a}$ y $\underline{b}$ siendo $\begin{cases} R \\ \pi \end{cases}$ → O
$\begin{cases} \pi \\ S \end{cases}$ → O'

3º Tg a ⊙ → T

4º Por T ∥ a R → R_1 Pno $\begin{cases} T \\ R_1 \end{cases}$ → P_T

5º Int $\begin{cases} P_T \\ P \end{cases}$ → $\boxed{M}$

Hallar una recta S ⊥ L que su m.d con R sea d estará contenida en el pno P y sea // a Q



1.º Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right. \longrightarrow (s)$

2.º Por O de R pno α ⊥ a R

3.º ~~[illegible]~~ Proyecto (s) sobre α según N

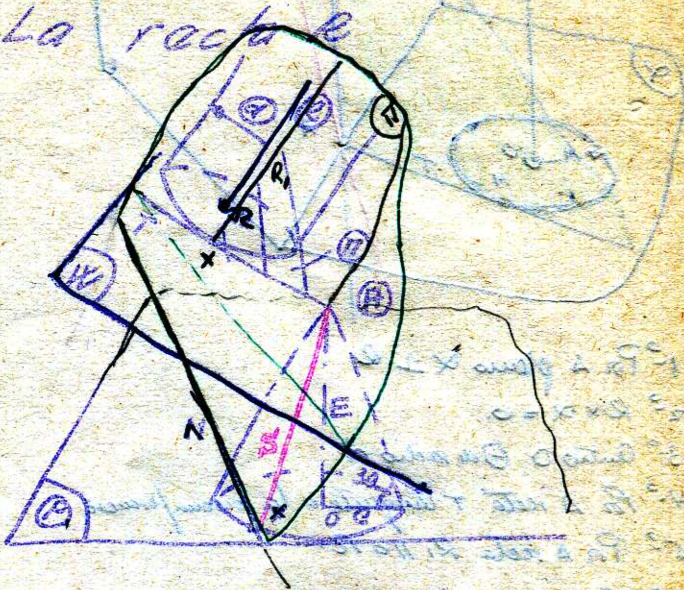
4.º Abato α $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ N \rightarrow N_1 \end{matrix} \right.$ con centro O_1 y radio $d \rightarrow \odot$ trazo tg a $\odot$ // a $N_1 \longrightarrow M_1$

5.º Por $x \in M$ // a $R \rightarrow R_1$

6.º Pno $\left\{ \begin{matrix} R_1 \\ M \end{matrix} \right. \longrightarrow \beta$

7.º Int $\left\{ \begin{matrix} \beta \\ P \end{matrix} \right. \longrightarrow \boxed{S}$

Hallar una recta S que pase por el punto A forme 30° con P y diste d de la recta R



1.º Por A recta E ⊥ a P. Int $\left\{ \begin{matrix} E \\ P \end{matrix} \right.$

2.º Calculamos el radio ρ del cono según fig

3.º Por A pno W ⊥ a R

Int $\left\{ \begin{matrix} W \\ R \end{matrix} \right. \longrightarrow \Omega$

4.º Abato W $\left\{ \begin{matrix} \Omega \rightarrow \Omega_1 \\ A \rightarrow A_1 \end{matrix} \right.$

$\odot$ centro Ω y radio d por A_1 tg a $\odot \longrightarrow T_1$

5.º Por $x \in T$ recta R_1 // R

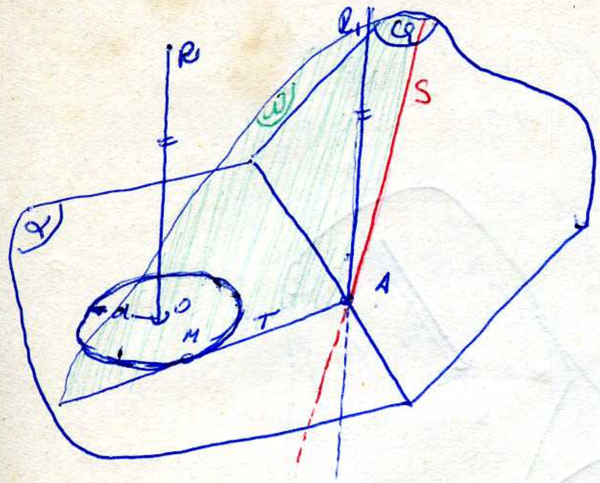
$\left. \begin{matrix} R_1 \\ T \end{matrix} \right\} \pi$

6.º Int $\left\{ \begin{matrix} \pi \\ P \end{matrix} \right. \longrightarrow N$

7.º Int $\left\{ \begin{matrix} N \\ O \text{ en } P \end{matrix} \right. \longrightarrow X$

8.º Uniendo $XA \longrightarrow \boxed{S}$

Hallar una recta S que pase por un punto A, esté contenida en un plano Q sabiendo que su mínima distancia con R vale d.



1º Por A plano $\alpha \perp R$

2º $R \times \alpha = O$.

3º Centro O ⊕ de radio d.

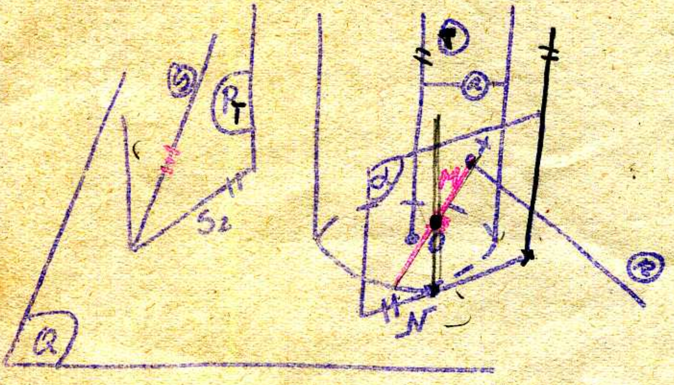
4º Por A recta T tangente a la circunferencia

5º Por A recta $R_1 \parallel$ a R.

6º $R_1 + T = W$

7º $W \times Q = S$ (Solución).

Hallar una recta M que diste a de T se apoye en R y sea // a S



1º) Por O ∈ T pno Q ⊥ a T

2º) ⊙ radio a y centro O

3º) Pno P_T que pasa por S y es ⊥ a Q

4º) Int $\left\{ \begin{array}{l} P_T \\ Q \end{array} \right. \rightarrow S_2$

5º) Trazamos una recta N tg a la ⊙ en Q que sea // a S_2

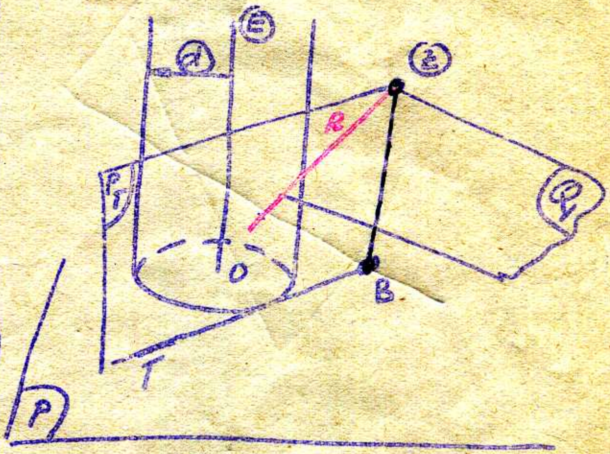
6º) Por un punto x ∈ N // a T → T_1

7º) Pno formado $\left\{ \begin{array}{l} N \\ T_1 \end{array} \right. \rightarrow \alpha$

8º) Int $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ R \end{array} \right. \rightarrow x$

9º) Por x trazamos una // a S en α → $\boxed{M}$

Hallar una recta R que pase por Z de modo que su mínima distancia con E valga d y sea // al pno Q



1º) Por O ∈ E pno T ⊥ a E

2º) ⊙ centro O y radio d

3º) Proyecto Z sobre P → B

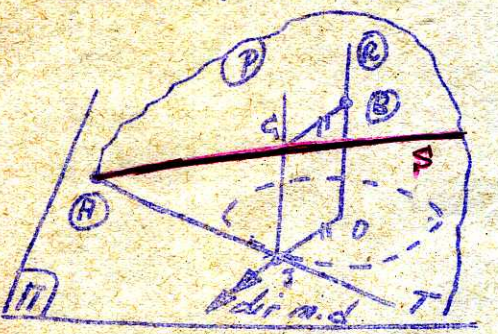
4º) Por B tg a ⊙ centro O (en el abatimiento de P) → T

5º) Pno $\left\{ \begin{array}{l} T \\ Z \end{array} \right. \rightarrow P_T$

6º) Por Z pno Q_1 // a Q

7º) Int $\left. \begin{array}{l} P_T \\ Q_1 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{R}$

Hallar una recta S cuya m.d. con R valga d y pase por B :. S pasa por A



1º) Por A pno Π $\perp$ a R en O

2º) Con centro O ⊙ radio d en Π_1

3º) Por A recta // a R → R_1

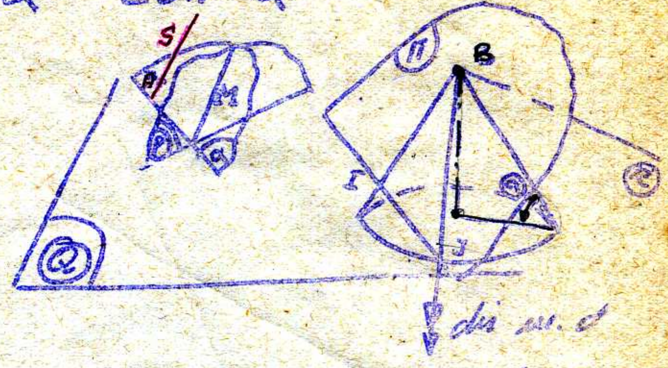
4º) Pno $\left\{\begin{matrix} T^{⊙} \\ R_1 \end{matrix}\right.$ → P

5º) Por B recta $\perp$ a P en G

6º) Por A tg a ⊙ → T_1

7º) La recta AG → S

Hallar una recta S que pasa por A sea // a P y cuya m.d con R forme $\hat{\alpha}$ con Q



1º) Por B ∈ R pno Π $\perp$ R. Int $\left\{\begin{matrix} \Pi \\ Q \end{matrix}\right. \to I$

2º) Por B cono de base Q y angulo $\hat{\alpha}$ en la base

3º) Int en Q_1 $\left\{\begin{matrix} ⊙ \text{ cono} \\ I_1 \end{matrix}\right.$ → J

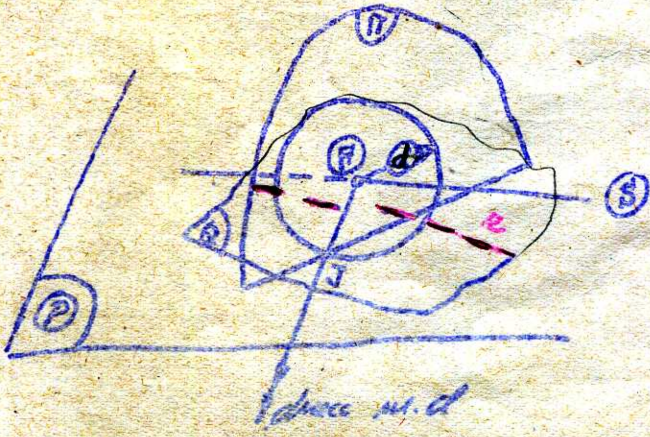
4º) Uno BJ ⇒ direcc m.d

5º) Por A pno α $\perp$ m.d

6º) Int $\left\{\begin{matrix} \alpha \\ P \end{matrix}\right.$ → M

7º) Por A // a M → S

Hallar recta R en P tal que su m.d con S valga d y pase por A ∈ S



1º) Por A pno Π $\perp$ a S

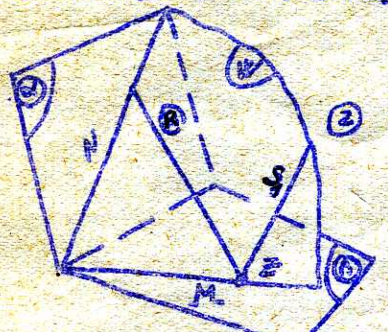
2º) Int $\left\{\begin{matrix} \Pi \\ P \end{matrix}\right.$ → I. Abato Π $\left\{\begin{matrix} I \to I_1 \\ A \to A_1 \end{matrix}\right.$ con centro A_1 y radio d ⊙ que corta a I_1 en J_1

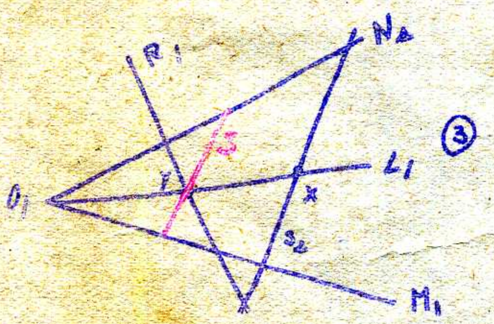
3º) Por J_1 pno Q $\perp$ a AJ

4º) Int $\left\{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right.$ → R

PD = Si la circunferencia no cortase a I el problema daría como solución una recta R cuya m.D con la S no pasará por A

Trazar una recta S // a P que forma α con Q de modo que el punto medio de los cortes de S con πos α y β esta sobre la recta R.





1º) Por un punto J cualquiera cono de vertice J, angulo en la base Q igual a α

2º) Por J paso P_1 // a P

3º) Int $\left\{\begin{matrix} \text{cono} \\ P_1 \end{matrix}\right. \longrightarrow$ direc S ①

4º) Paso formado $\left\{\begin{matrix} R \\ S_1 \parallel S \text{ por } Z \in R \end{matrix}\right. \longrightarrow W$

5º) Int $\left\{\begin{matrix} W \\ \alpha \end{matrix}\right. \to N$. Int $\left\{\begin{matrix} W \\ \beta \end{matrix}\right. \to M$ ②

6º) Abato W $\left\{\begin{matrix} N \to N_1 \\ M \to M_1 \\ R \to R_1 \\ S_1 \to S_2 \end{matrix}\right.$ ③

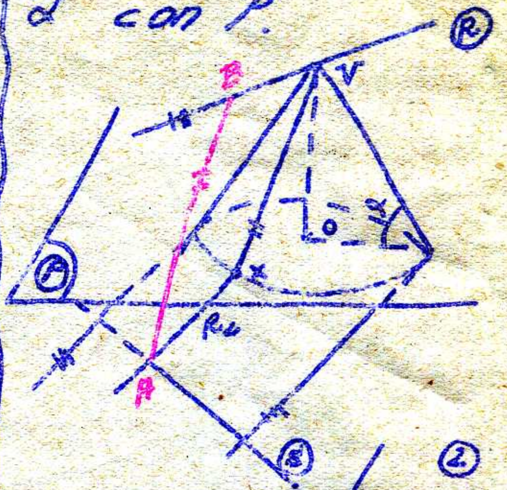
~~Trazo~~ Donde una recta S_2 corta a M_1 y N_1 calculo su punto medio X

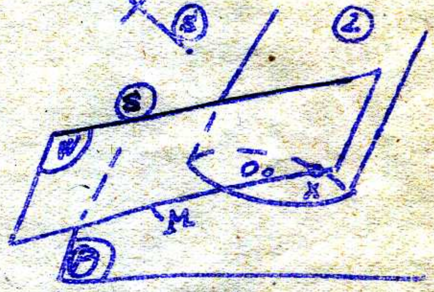
Uno X con $O_1 \to L_1$. Int $\left\{\begin{matrix} L_1 \\ R_1 \end{matrix}\right. \to J_1$

Por J_1 // a $S_2 \longrightarrow$ S

PO.- Creo ahorrar un paso si tomo J∈R entonces evito trazar por Z recta S_1 // dirección

Hallar un segmento de longitud d que se apoye en R y S, forme α con P.





1º) Segun fig  calculo r y H

2º) Paso Q // a P a una altura H

3º) Int $\left\{\begin{matrix} Q \\ R \end{matrix}\right. \to V$

4º) Por V cono de angulo en la base α

5º) Por un punto de S // a R $\to R_1$ paso $\left\{\begin{matrix} S \\ R_1 \end{matrix}\right. \to W$ ②

6º) Int $\left\{\begin{matrix} W \\ P \end{matrix}\right. \longrightarrow M$

7º) Abato P $\left\{\begin{matrix} O \to O_1 \\ M \to M_1 \end{matrix}\right.$ por O_1 ○ radio r

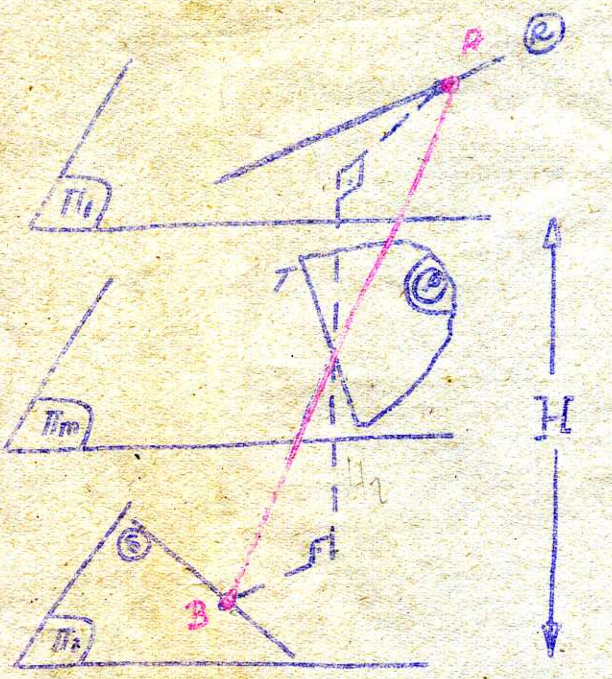
Int $\left\{\begin{matrix} ○ \\ M_1 \end{matrix}\right. \to X_1$

8º) Por X recta // a R $\to R_2$

9º) Int $\left\{\begin{matrix} R_2 \\ S \end{matrix}\right. \longrightarrow$ A

10º) Calculo la dirección XV y por A trazo // a ella donde corta a Q $\longrightarrow$ B siendo $\overline{AB} = d$

Hallar un segmento que se apoya en R y S de longitud d y que tenga su punto medio en el pno P

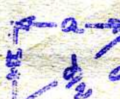


1º Por R ∥ a S → S_1 $\left\{ \begin{array}{l} R \\ S_1 \end{array} \right. \to \pi_2$

2º Por S ∥ a R → R_1 $\left\{ \begin{array}{l} S \\ R_1 \end{array} \right. \to \pi_1$

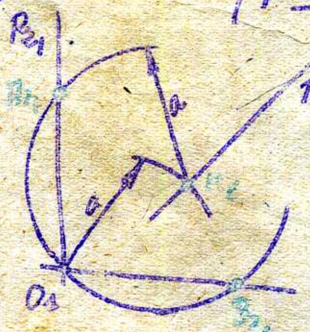
3º Pno medio de π_1 y π_2 → π_m

4º Int. $\left\{ \begin{array}{l} \pi_m \\ P \end{array} \right. \to T$

5º Según construcción  calculo a

6º Proyecto R sobre π_m → R_2
   " S " " → S_2

7º Abato π_m $\left\{ \begin{array}{l} R_2 \to R_{21} \\ S_2 \to S_{21} \\ T \to T_1 \end{array} \right.$ y obtengo



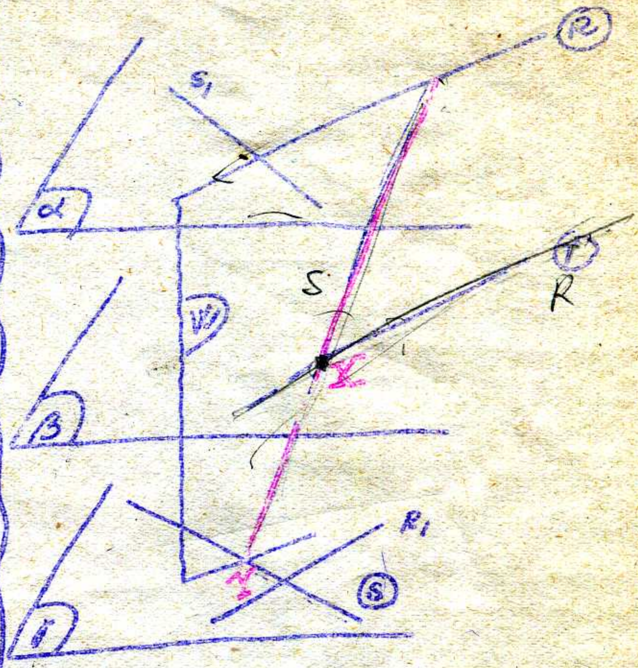
Según construcción calculamos M_1, B_{21} - R_{21}

8º Desabatimos B_{21}, R_{21} sobre S_2 y R_2

9º Proyectando S_2 sobre su pno π_2 obtenemos B_2 → B

10º Desproyectando R_2 sobre su pno π_1 obtenemos M_2 → A

Calcular recta o segmento que apoya en R y S 59 y tenga su punto medio en T



1º Por un punto de R recta S_1 ∥ S

2º Pno formado $\left\{ \begin{array}{l} R \\ S_1 \end{array} \right. \to \alpha$

3º Por un punto de S recta R_1 ∥ a R

Pno $\left\{ \begin{array}{l} R_1 \\ S \end{array} \right. \to \gamma$

4º Pno mediatriz de α y γ → β

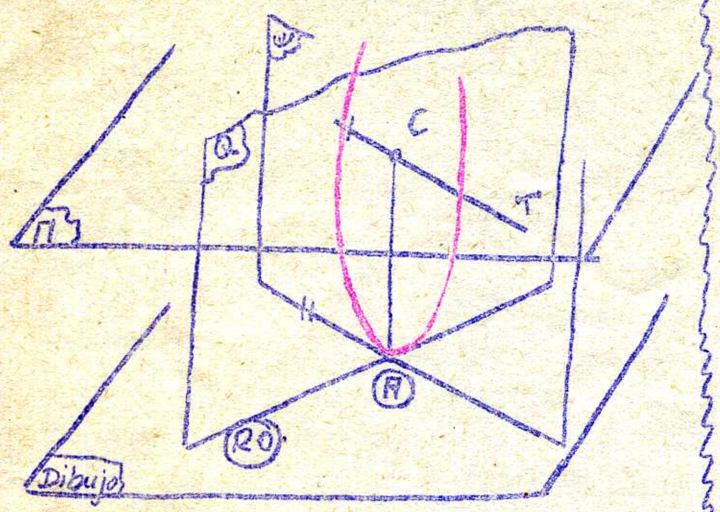
5º Int $\left\{ \begin{array}{l} \beta \\ T \end{array} \right. \to X$

6º Pno formado $\left\{ \begin{array}{l} X \\ R \end{array} \right. \to \omega$

7º Int $\left\{ \begin{array}{l} \omega \\ S \end{array} \right. \to Y$

8º Uno X con Y → recta RTA.

Circunferencia de radio conocido, tga Ro en A cuyo centro esta a 4 ▫ encima del cuadro del dibujo. Dibujar la proyeccion directa.



1º) Plano W ⊥ a Ro por A.

2º) Plano H paralelo al dibujo a 4 ▫ por encima

3º) Interseccion de W y H → T

4º) Abatir W $\begin{cases} T \rightarrow T_1 \\ A \rightarrow A_1 \end{cases}$

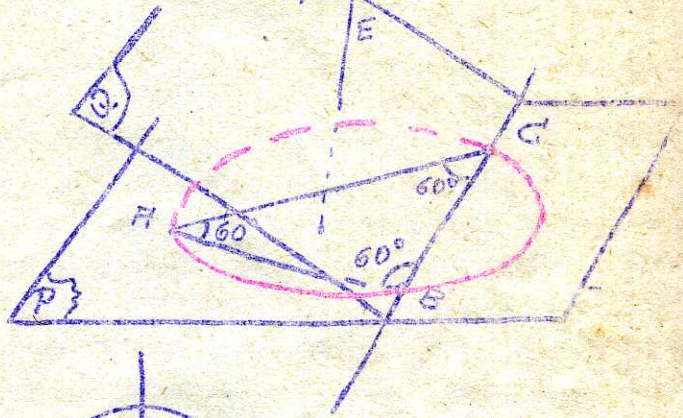
5º) Arco de centro A_1 y radio R hasta cortar a T_1 en $C_1 \rightarrow C$

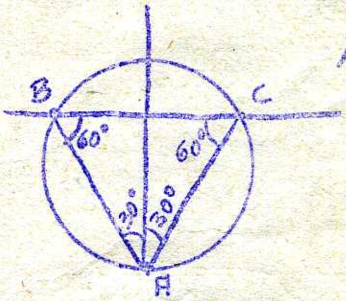
6º) Plano Q formado por C y Ro. (Plano de la ⊙).

7º) Abatir Q { C → C_1.
Dibujo la ⊙ de centro C_1 y radio conocido.

Nota: da circunferencia solucion me debe salir tangente a Ro en A.

se da un plano Q por una traza Q' y un punto T.
Trazar la circunferencia que describe el punto A al girar alrededor de un eje E dado da circunferencia corta al plano Q en los puntos B y C de forma que el triangulo ABC sea equilatero.





1º) Hallamos la traza Q que pasa por T por ser T del plano.

2º) Por A plano P perpendicular a E

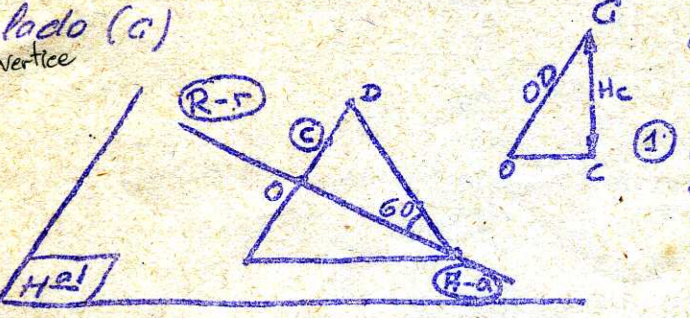
3º) Interseccion de P y Q recta I

4º) Formar el triangulo equilatero $\widehat{ABC}$, segun figura, en el cual B y C estan sobre la recta I que a su vez esta en P.

5º) Circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

Dibujar un Triangulo equilatero sabiendo que (A) es un vertice y que (R) contiene a (B) asi como que c es la proyeccion H^{al} del lado (C)

vertice



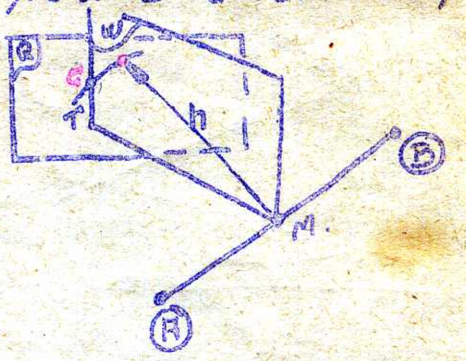
1º) sobre el Hal abatido por c recta ⊥ a r que corta a esta en O y al cono de 60º en D.

2º) Segun la figura ① calculo Hc

3º) Por c recta H ⊥ al H^{al} a una distancia Hc de c calculo C

4º) Plano formado por (R) y (C) plano P del Δ abatiendolo calculo el punto B sobre R.

Hallar un triangulo equilatero conociendo dos puntos A B y sabiendo que el 3º C esta en el plano Q.



1º) Punto medio de AB → M

2º) Por M plano W ⊥ a AB

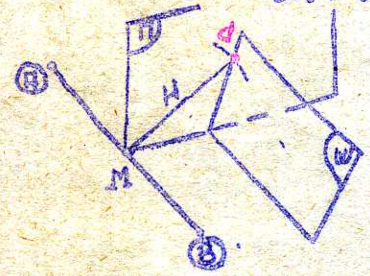
3º) Inters. $\left\{ \begin{matrix} W \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow T$

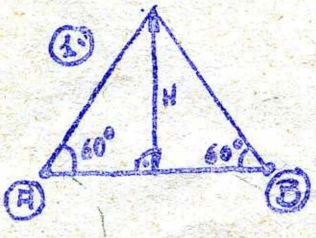
4º) Segun construccion calculo <u>h</u>

5º) Abato W $\left\{ \begin{matrix} M \rightarrow M_1 \\ T \rightarrow T_1 \end{matrix} \right.$

con centro M_1 y radio h corto a T_1 en C

Dibujar un Triangulo equilatero de lado AB siendo r la proyeccion H^{al} del lado A C





1º) Segun construccion ① calculo H

2º) Por M (punto medio de AB) trazamos un plano π ⊥ a AB

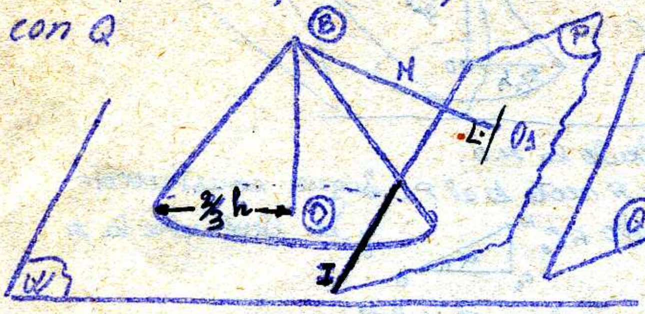
3º) Trazamos un plano W proyectante sobre el H^{al} (W ≡ r).

4º) Corte de π y W → recta S

5º) Abatimos el plano π y en él el punto M y la recta S. Con radio H y centro M_1 cortamos a S_1 en C_1 → C

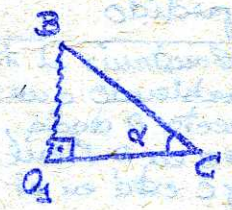
<u>NOTA:</u> Si nos darian un lado y nos dirian que el otro punto tiene su proyeccion sobre el H^{al} sobre una recta R seria lo mismo con el plano W proyectante sobre el H^{al} y W ≡ R.

Hallar un tetraedro de altura OB sabiendo que BC forma $\hat{\alpha}$ con Q



1º) A partir de la altura H del tetraedro calculamos el lado de este.

2º) Por B recta N ⊥ a Q
Segun construccion calculo BO_1 y la llevo sobre N



3º) Por O_1 plano P // a Q

4º) Interseccion de $\left\{\begin{matrix} P \\ W \end{matrix}\right. \rightarrow I$

5º) Abato W $\left\{\begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ I \rightarrow I_1 \end{matrix}\right.$

con centro en O_1 y radio los $\frac{2}{3}$ de la altura de una cara corto a I_1 en

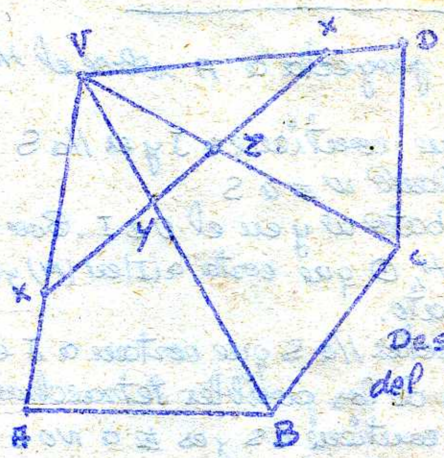
6º) Situo D, A y C en el abatimiento de W.

7º) Solucion el tetraedro pedido BACD.

Nota:
Hay que visualizar siempre los tetraedros

1º por el punto O plano W ⊥ a OB

~~Dado el triedro VABC~~
Calcular el camino minimo sobre el tetraedro para rodearlo por las caras, y ademas pasando por un punto dado X

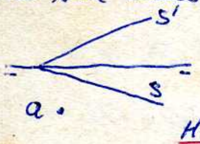


Desarrollo del tetraedro

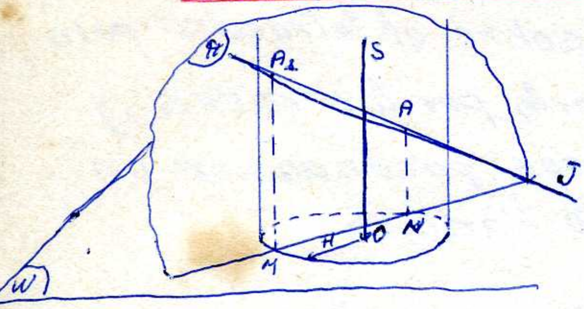
1º) Segun el desarrollo calculo las distancias VJ y VZ sobre VB y VC

2º) Las llevo sobre las aristas correspondientes en el tetraedro y lo tengo resuelto.

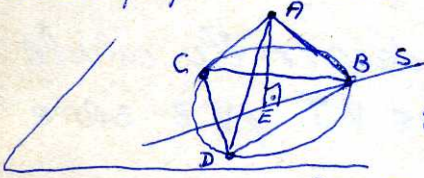
Dibujar las proyecciones de un tetraedro regular de lado l y vertice A siendo S la altura de la cara opuesta al vertice A. De las dos soluciones para A elegir la que sea mas alta.



El vertice A estará en un cilindro de eje S y radio H
H (altura del tetraedro)

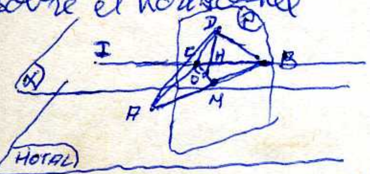


1º) Recta J que proyecta a A sobre el Hori. (de punta)
2º) Plano Π que contiene a J y es // a S
3º) Por $O \in S$ plano W ⊥ a S
4º) $W \times \Pi \equiv I$, Abato W y en el O e I. Con centro en O y radio = H, ⊙ que corta a (I) en (M) y (N) que los desabato.
5º) Por M y N rectas // a S que cortan a J en A y A_1 (vertices de los posibles tetraedros)
6º) Plano β que contiene a S y es ⊥ a NO



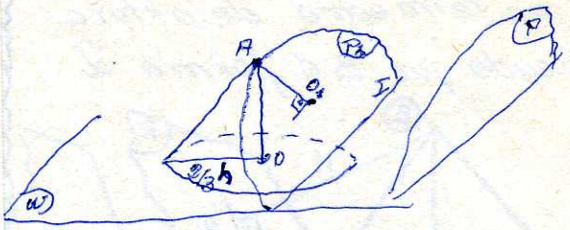
7º) Por A recta T ⊥ β
8º) $T \times S \equiv E$
9º) Abato β y en el E y S. Con centro en (E) ⊙ de radio = $\frac{2}{3}h$ (h altura de cara)
10º) $(S) \times ⊙ \equiv (B)$ 11º) Con (B) calculo (C) y D, los desabato y con el A tengo el tetraedro pedido

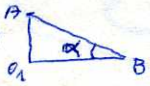
Dibujar las proyecciones de un tetraedro regular de arista AB, sabiendo que el vertice C se encuentra a 20 recuadros de altura sobre el horizontal



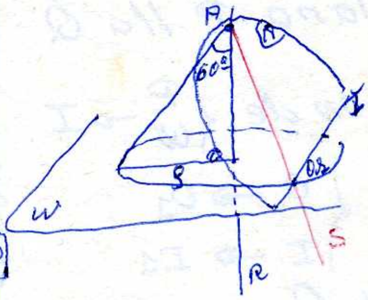
1º) ~~Por B~~ Plano α // al Htal a 20 recuadros de altura
2º) Por M (½ AB) plano P ⊥ a AB
3º) $P \times \alpha \equiv I$
4º) Con radio $\overline{AB}$ y centro B arco que corta a I en C
5º) Abato P y en el M y C, por (O) (½ de (M)(C)) trazo la ⊥ a $\overline{(M)(C)}$ y con centro en (C) y radio $\overline{AB}$ arco que corta a la ⊥ por (O) en (D), lo desabato y obtengo el cuarto vertice del tetraedro

Dibujar las proyecciones de un tetraedro sabiendo que la minima distancia entre R y S es la altura del tetraedro en posición y magnitud. La arista AB forma α° con un plano P.



1º) Calculo la M.D.
2º) Por A recta ⊥ al P. Segun construcción calculo AO_1  y la llevo sobre la ⊥
3º) Por O_1 plano P_1 // al P
4º) $W \times P_1 \equiv I$
5º) Abato W y en el O e I
6º) Con centro en (O) y radio $\frac{2}{3}h$ que corta a (I) en (B), formo el triangulo y obtengo (C) y (D)
7º) Los desabato y obtengo el tetraedro pedido

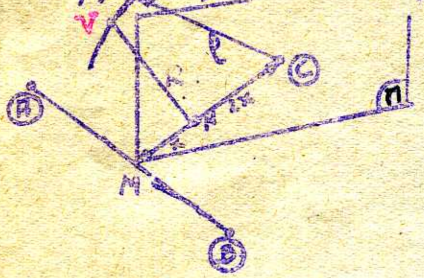
Construir el tetraedro regular ABCD, sabiendo que la arista AB está sobre la recta R dada, la arista AC contigua a la AB en A tiene por proyección horizontal S y C está en el horizontal



1º) Por $O \in R$ plano W ⊥ a R
2º) Plano Π que proyecta a S sobre el Htal
3º) $W \times \Pi \equiv I$
4º) Con centro en O y radio S  trazo ⊙ que corta a I en O_1, $\overline{AO_1}$ recta S.
5º) Con S y s calculo el vertice C y a partir de hay el tetraedro

Dibujar un teatraedro de lado AB siendo r la proyeccion H^{al} de un lado AC

Nota: Resolvemos el problema 1º de triangulos y proseguimos asi:



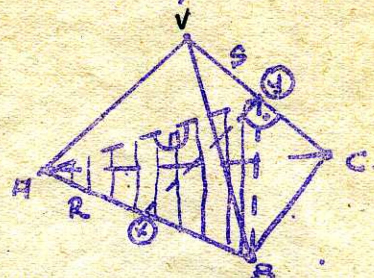
1º) Conocido ABC y el plano π trazamos una ⊙ de centro C y radio ℓ (longitud AB en V. M.)

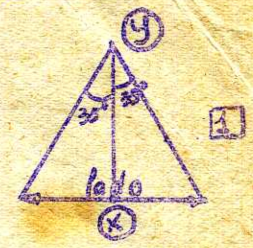
2º) Calculamos el punto M de la altura MC y trazamos por él una ⊥ R

3º) Corto a la ⊙ en el punto V

4º) Todas las operaciones se realizan en el plano π.

Hallar un tetraedro regular sabiendo xy es la m. d. entre los lados AB y VC, que la recta r es la proyeccion H^{al} del lado AB





1º) Por x plano M ⊥ a $\overline{xy}$

2º) Plano W, por r proyect. sobre el H^{al}

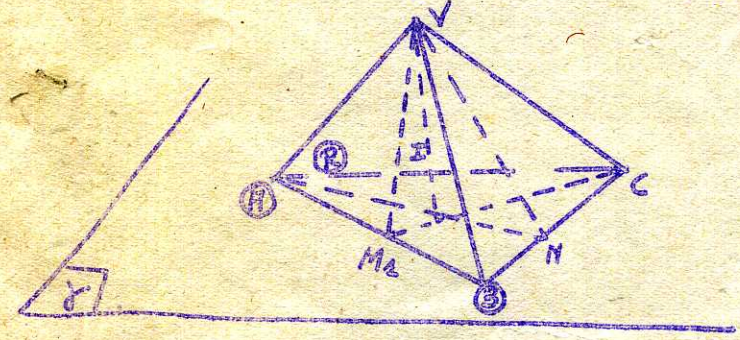
3º) Inters. $\left.\begin{matrix} W \\ M \end{matrix}\right\} R$ (contiene a x).

4º) Abato W $\left\{\begin{matrix} R \to R_1 \\ x \to x_1 \end{matrix}\right.$ con centro en x_1 y radio ½ calculado en ① corto a R_1 en los puntos A y B

5º) Por y recta S ⊥ a M.

6º) Sobre S tomo a ambos lados de y ½ y obtengo C y D

Hallar un tetraedro sabiendo que AB (dato) es un lado y que la recta R (dato) contiene al lado AC.



1º) $\left.\begin{matrix} AB \\ R \end{matrix}\right\} \gamma$

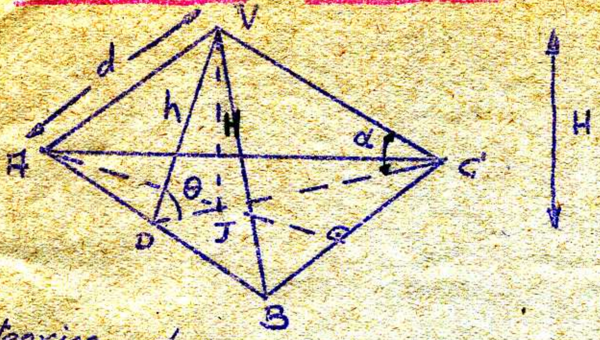
2º) Abato γ y con centro en A_1 y radio A_1B_1 corto a R_1 en C_1. Calculo M_1 y N_1 puntos medios de AB y BC

3º) Por M y N planos W y α ⊥ respectivamente a AB y BC

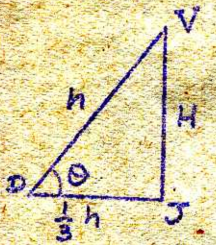
4º) $\left.\begin{matrix} W \\ \alpha \end{matrix}\right\} I$ $\quad \left.\begin{matrix} I \\ \gamma \end{matrix}\right\} V$

5º) Abato W $\left\{\begin{matrix} V \to V_1 \\ I \to I_1 \end{matrix}\right.$ con centro en V_1 y radio H calculado segun Δ corto a I_1 en V_1 que desabatido da V

TETRAEDRO TEORICO



teorico $h = a \cdot 0'867$



$$H = \sqrt{h^2 - \frac{1}{9}h^2}$$

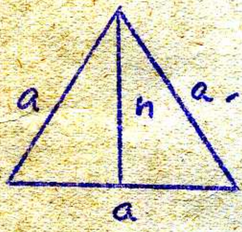
$$H = \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{2} = 0'94\, h$$

$$H = 0'815 \cdot a$$

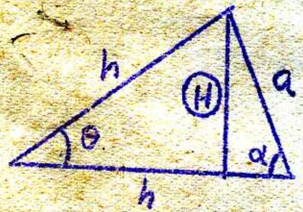
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{H}{h} = \frac{0'815}{0'867} \; ; \; \theta = 70^\circ 4'$$

$$\alpha = 54^\circ 4'$$

Calculo de la altura H del tetraedro graficamente (seguir este metodo) sabiendo a (arista)

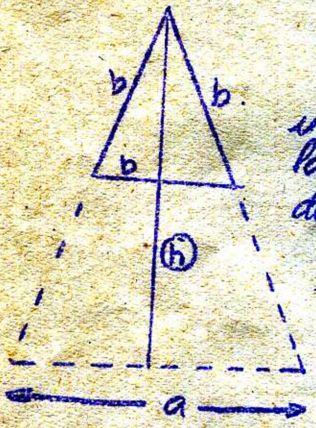


→ hallo h.



→ hallo H

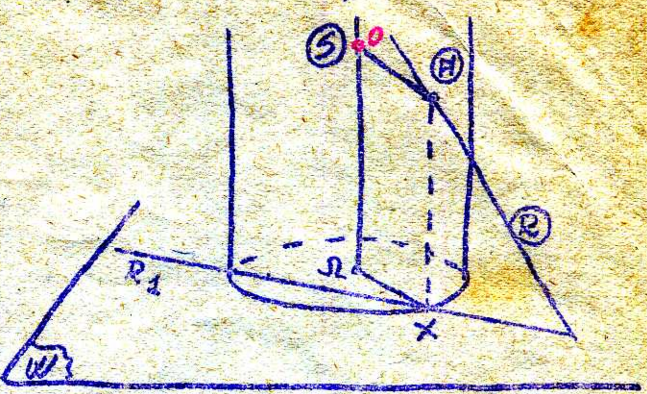
Si el dato es h



Construimos un triangulo equilatero cualquiera de lado b, llevando h sobre ese triangulo calculo a

NOTA: Conociendo H o h calculo la arista inversamente al metodo seguido ahora.

Hallar un tetraedro sabiendo el valor de su altura H el punto A sobre la recta R y que la recta S es la altura de la cara opuesta a A.

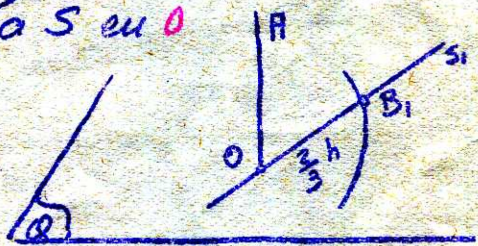


1º) Por $\Omega \in$ a S plano W $\perp$ a S

2º) Proyecto R sobre W segun R_1

3º) Abato W $\begin{cases} \Omega \to \Omega_1 \\ R_1 \to R_{11} \end{cases}$ ⊙ de centro Ω_1 y $r = H$ corto a R_{11} en X

4º) Por A recta // a $\overline{\Omega X}$ corta a S en O



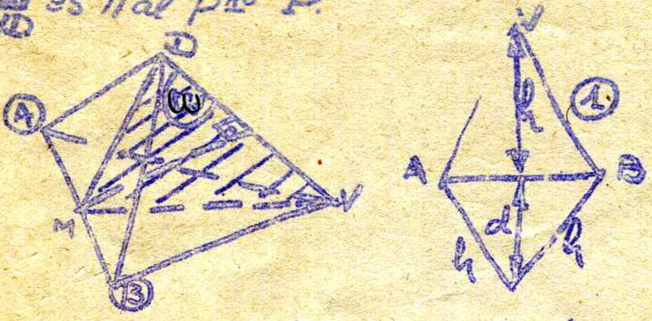
5º) Conociendo H calculo la arista y a partir de esta hallo h

6º) Plano Q formado por $\begin{cases} O \\ S \end{cases}$

7º) Abato Q $\begin{cases} O \to O_1 \\ S \to S_1 \end{cases}$ ⊙ de centro O_1 y radio $\frac{2}{3} h$ corto a S_1 en B_1

8º) dos puntos C y D los calculo en el abatimiento de Q.

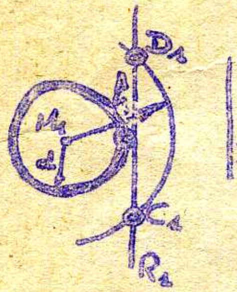
Hallar un tetraedro conociendo la arista AB y sabiendo que la arista VD es ‖ al plº P.



1º) Por M, punto medio de AB, plano W ⊥ a AB → $\frac{W}{P}\}$ I

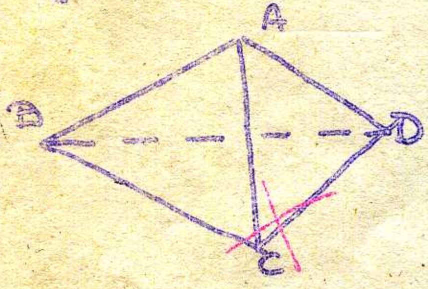
2º) Calculo las distancias h y d según (1)

3º) Abato W $\begin{cases} M \to M_1 \\ I \to I_1 \end{cases}$ Trazo ⊙ de centro M_1 y radios h y d. Tg. a la ⊙ interior y ‖ a I_1 da R_1 que corta a la exterior en C_1 y D_1.



Desabato → $\boxed{C}$ y $\boxed{D}$

Cortar un tetraedro por un pno. que pase por el punto A de modo que la sección sea un paralelogramo

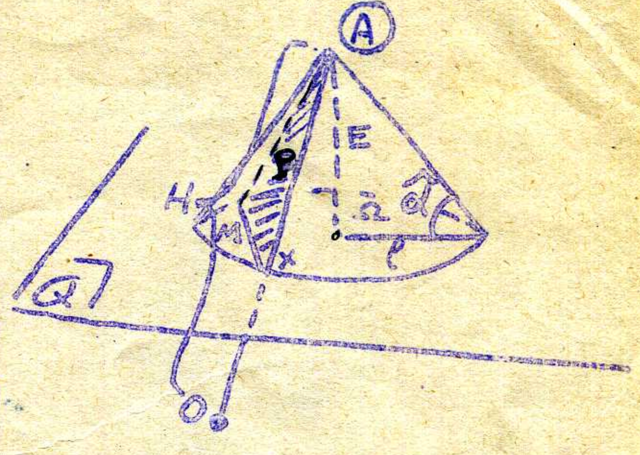


Hay 3 soluciones

Plano por A formado por rectas ‖ a:

$\boxed{1.-)}\begin{cases} AB \\ CD \end{cases}$ $\boxed{2.-)}\begin{cases} AC \\ BC \end{cases}$ $\boxed{3.)}\begin{cases} AD \\ BC \end{cases}$

Hallar un tetraedro conociendo un vertice A y sabiendo que su altura AO está en el pno. P y forma ∡ α con Q. La arista BC es ‖ a Q y mide d.

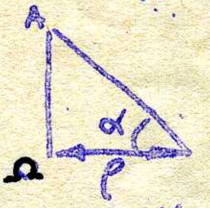


1º) Por A recta E ⊥ a Q en Ω

2º) Conociendo la arista calculo la altura H.

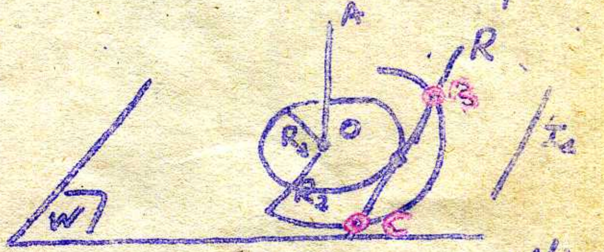
3º) $\frac{P}{Q}\}$ M

4º) Abato Q $\begin{cases} \Omega \to \Omega_1 \\ M \to M_1 \end{cases}$ y según figura calculo ℓ.



Por Ω ⊙ de radio ℓ que corta a M_1 en X.

Uno AX y sobre él llevo la altura H calculando el punto O.

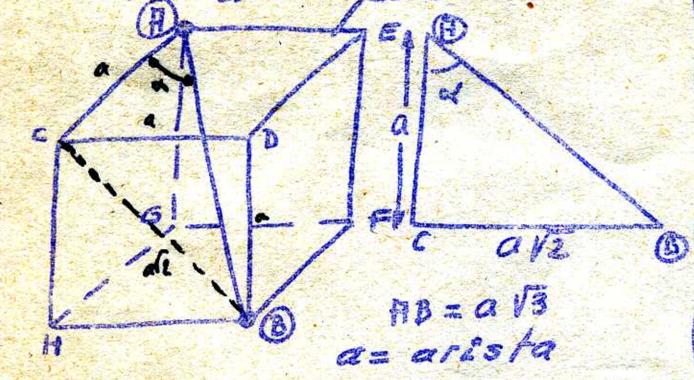


5º) Por O pno W ⊥ a OA → $\frac{W}{Q}\}$ I

6º) Abato W $\begin{cases} O \to O_1 \\ I \to I_1 \end{cases}$ con centro en O_1 y radios R_1 y R_2 $\begin{cases} R_1 = \frac{1}{3} \text{ altura ca} \\ R_2 = \frac{2}{3} \text{ altura ca} \end{cases}$

⊙ y por la interior tg y ‖ a I_1 que corta a la exterior en B, C

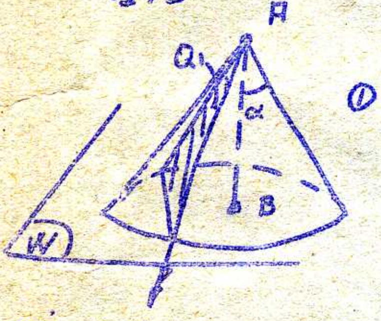
Calcular un cubo sabiendo que el segmento AB es una diagonal de él y que AC es // al pno Q



AB = $a\sqrt{3}$

a = arista

$a = \frac{AB}{1'73}$ $\quad \alpha = 54^\circ 36'$



1º Por B pno W ⊥ a AB

2º Cono de eje AB y semiángulo en el vértice α

3º Por A pno Q1 // Q

4º Int $\left\{ \begin{array}{l} \text{cono} \\ Q_1 \end{array} \right.$ → direcc C

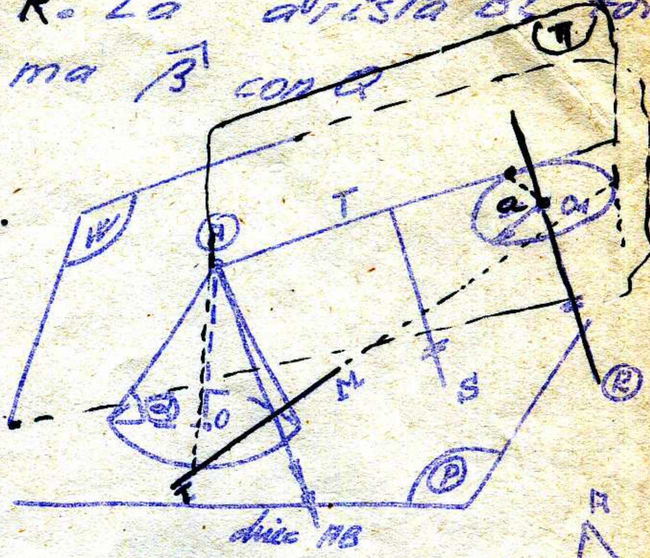
5º A partir de A sobre direc C llevo valor a → C

6º Por B pno P ⊥ a AC en C

7º Abato P $\left\{ \begin{array}{l} B \to B_1 \\ C \to C_1 \end{array} \right.$ trazo cuadrado de diagonal BC y calculo H y D

8º Conocido ABCDH seguir paralelas calculo E, F, G

Calcular un cubo de arista A y lado d sabiendo que AB forma α° con P, dista a de R. La arista BC forma β con Q



1º Por A recta E ⊥ a P en O según fig calculo e

2º Por A pno W ⊥ a R en O1 con centro O1 y radio a ⊙, por A tg a ⊙ → T

3º Por x ∈ T recta S // a R.

4º Pno formado $\left\{ \begin{array}{l} S \\ T \end{array} \right.$ → π

5º Int $\left\{ \begin{array}{l} P \\ \pi \end{array} \right.$ → I

6º Abato P $\left\{ \begin{array}{l} O \to O_1 \\ I \to I_1 \end{array} \right.$ con centro O1 y radio e ⊙ que corta a I1 en A1

7º Llevo sobre Aπ la distancia d y calculo → B

8º Por B pno ⊥ a Q → E2 en O2

9º Por B pno α ⊥ a AB

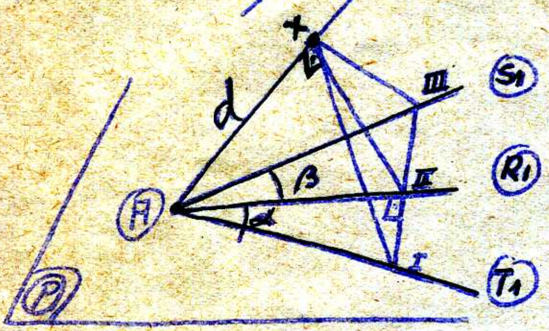
10º Int $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ Q \end{array} \right.$ → L

11º Abato Q $\left\{ \begin{array}{l} L \to L_1 \\ O_2 \to O_2 \end{array} \right.$ ⊙ centro O2 y radio según  . Int $\left\{ \begin{array}{l} \odot \\ L_1 \end{array} \right.$ → N

12º Sobre BN a d → C

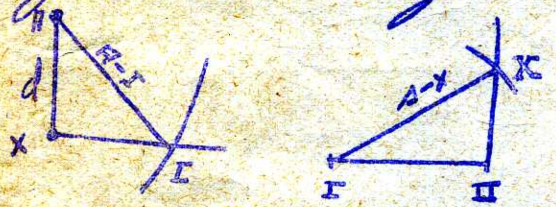
Conocida una cara se sigue método usual

Hallar un cubo de vértice A y lado $\underline{d}$ siendo R, S y T las proyecciones de las tres aristas que concurren en A al cortarlas por un pno P.



1º) Abato P y llego a la fig donde calculo α y β

2º) Seguir estos triangulos



calculo A-I, A-II, ...

3º) Por A recta N perpendic a P

4º) Con formado $\begin{cases} N \\ A\text{-}II \end{cases} \rightarrow W$

5º) Abato W $\begin{cases} A \rightarrow A_1 \\ II - II_1 \end{cases}$ Con centro A_1 y radio $\underline{d}$ trazamos un arco, con centro en II_1 y radio II-X arco. Int arcos $\rightarrow$ X

6º) Pno formado $\begin{cases} T \\ N \end{cases} \rightarrow Q$ $\begin{cases} S \\ N \end{cases} \rightarrow \Pi$

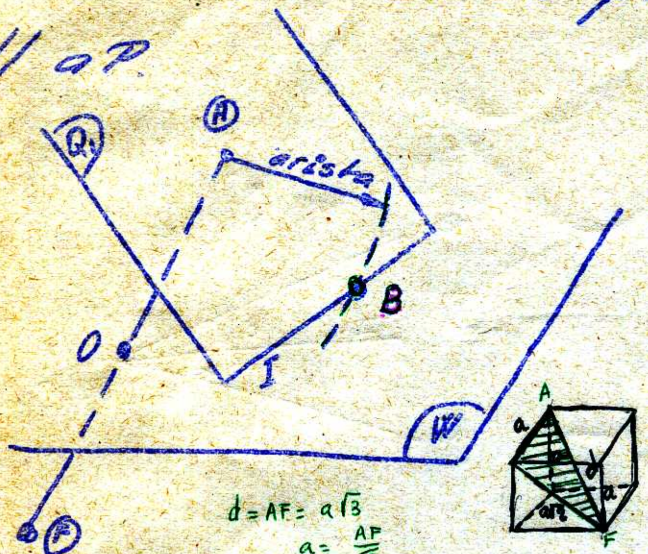
7º) Int $\begin{cases} \Pi \\ Q \end{cases} \rightarrow L$

8º) Abato α $\begin{cases} X \rightarrow X_1 \\ M \rightarrow M_1 \\ N \rightarrow N_1 \end{cases}$ a partir de X_1 con radio $\underline{d}$ corto a M_1 y N_1 en B, C

Hallar un ...

AB

Hallar un cubo conociendo su diagonal A-F y sabiendo que la cara ABCD se encuentra en un pno // a P.



$d = AF = a\sqrt{3}$

$a = \frac{AF}{\sqrt{3}}$

1º Según 1º caso de cubos calculo el valor de la arista a partir del valor AF

2º Por A pno α // a P

3º Por O punto medio de AF pno W ⊥ a AF

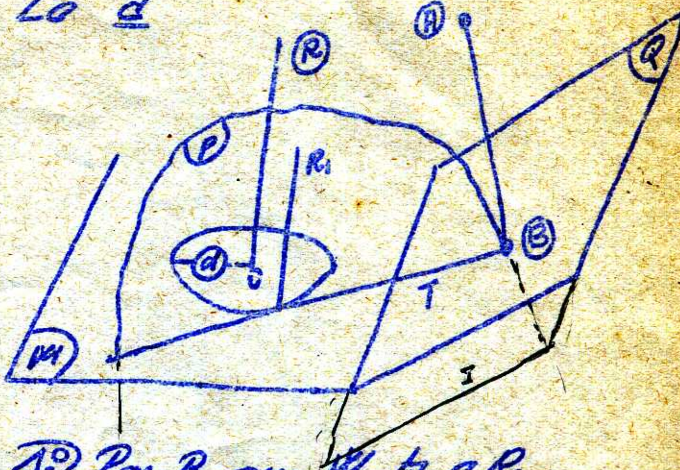
4º Int $\left\{ \begin{matrix} W \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow I$

5º Abato Q $\left\{ \begin{matrix} I - I_1 \\ A - A_1 \end{matrix} \right.$ con centro A_1 y radio la arista cortamos a I_1 en → B

6º Conociendo A, B_1 en Q calculo C_1 y D_1

7º Sabiendo ABCDF por // calculo E, G, H

Hallar un cubo sabiendo la arista AB y que la m.d entre BC y R vale d



1º Por B pno W ⊥ a R

2º Int $\left\{ \begin{matrix} W \\ R \end{matrix} \right. \rightarrow O$

3º Abato W $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ B \rightarrow B_1 \end{matrix} \right.$ O centro O_1 y radio d.

Desde B_1 tg a O → T_1

4º Pno formado $\left\{ \begin{matrix} T \\ R_1 // R \end{matrix} \right. \rightarrow P$

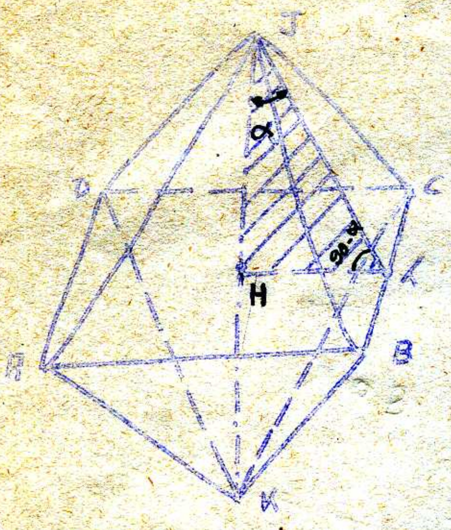
5º Por B pno Q ⊥ a AB

6º Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow I$

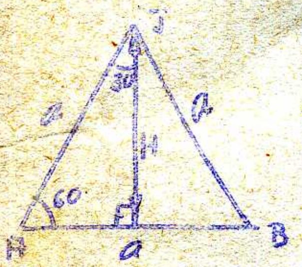
7º Abato Q $\left\{ \begin{matrix} I \rightarrow I_1 \\ B \rightarrow B_1 \end{matrix} \right.$ con centro B_1 y arco AB corto a I_1 en → A

Conociendo ABC conocemos una cara y por tanto seguimos método normal.

OCTAEDROS

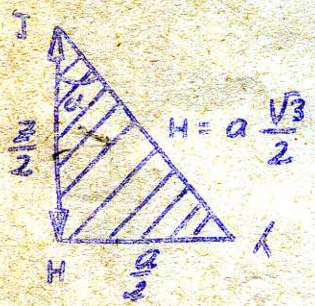


Las caras son △ equiláteros



$H = a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0867\cdot a$

La altura del octaedro será



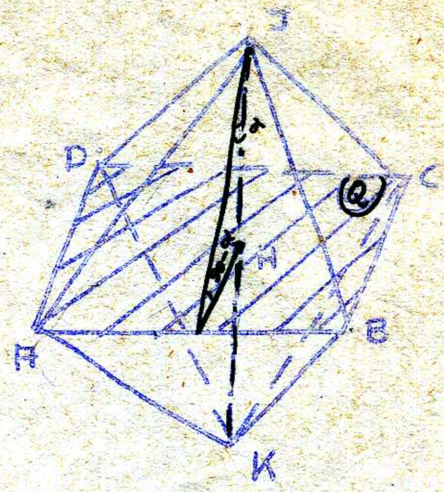
$\frac{Z}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = 35^\circ 12'$

Nota: Lo 1º que trataremos de calcular en el octaedro será el punto H

Dato una cara ABJ (plano P)



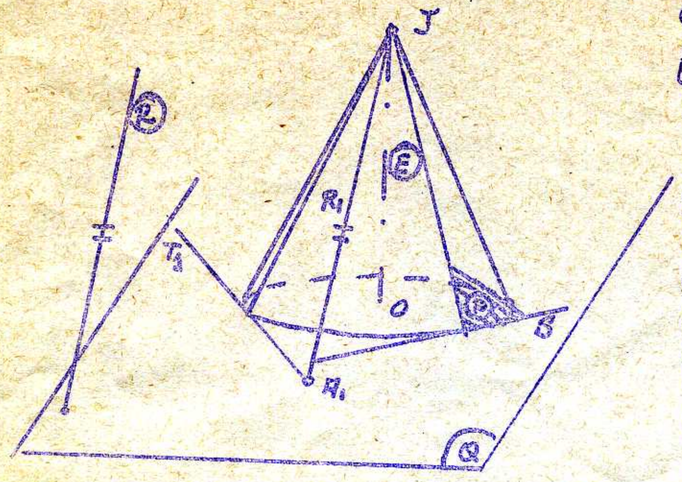
1º Pno Q que pasa por AB y forma $(90-\alpha) = 54^\circ 48'$ con el Pno P definido por ABJ

2º Abatimos Q y calculamos un cuadrado de lado AB teniendo en cuenta que la proyección de J tiene que estar dentro del cuadrado.

3º Calculamos el punto H como intersección de las diagonales del cuadrado

4º Recta HJ → R
distancia HJ = d
A partir de H llevamos d en el otro sentido y calculamos K

Girar el plano P alrededor del eje E hasta que quede ∥ a la recta R



1º) Por un punto O del eje plano Q $\perp$ a E

2º) Abato Q y trazo el cono

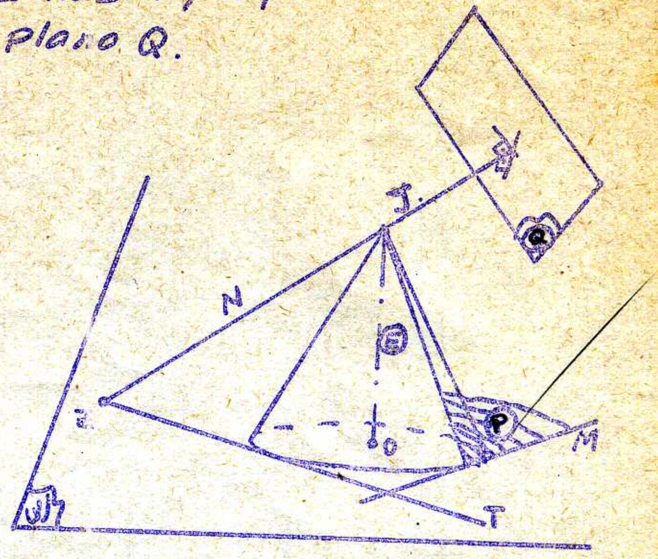
3º) $\left.\begin{matrix} E \\ P \end{matrix}\right\} \rightarrow J$ por J recta R_1 ∥ a R

4º) Intersección $\left.\begin{matrix} R_1 \\ Q \end{matrix}\right\} A.$

5º) Por A tg en el abatimiento de Q a la ⊙ → T_1

6º) $T_1 + J \Rightarrow P_G$.

Girar el plano P alrededor del eje E hasta que forme 90º con otro plano Q.



1º) Intersección de P y E → J

2º) Por O plano W $\perp$ a E

3º) Por J recta N $\perp$ a Q

4º) $\left.\begin{matrix} N \\ W \end{matrix}\right\} Z$ $\qquad \left.\begin{matrix} P \\ W \end{matrix}\right\} \rightarrow M$

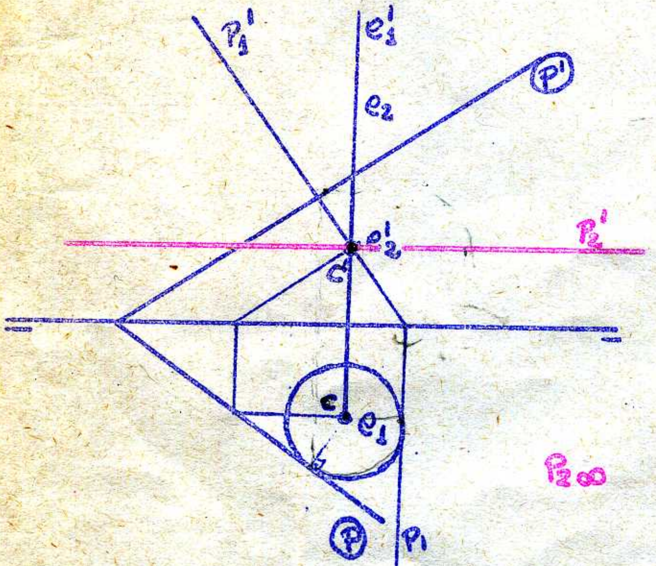
5º) Abato W $\left\{\begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ M \rightarrow M_1 \\ Z \rightarrow Z_1 \end{matrix}\right.$ ⊙ de centro O_1 tg a M_1.

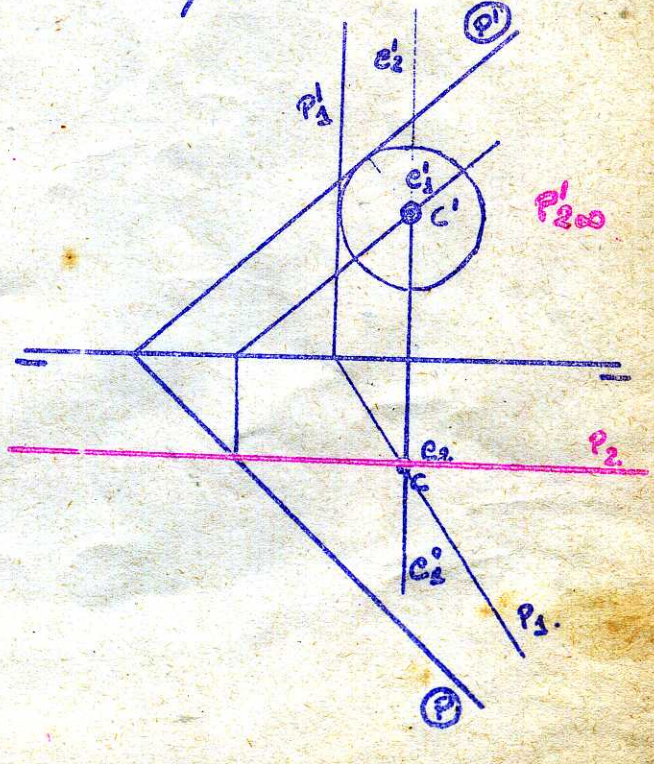
Por Z_1 recta tg a la ⊙ → T_1

6º) Desabato T_1 → T

7º) Plano formado por $\left\{\begin{matrix} T \\ N \end{matrix}\right. \rightarrow$.

Girar un plano hasta dejarlo ∥ al H^{al} y V^{al}

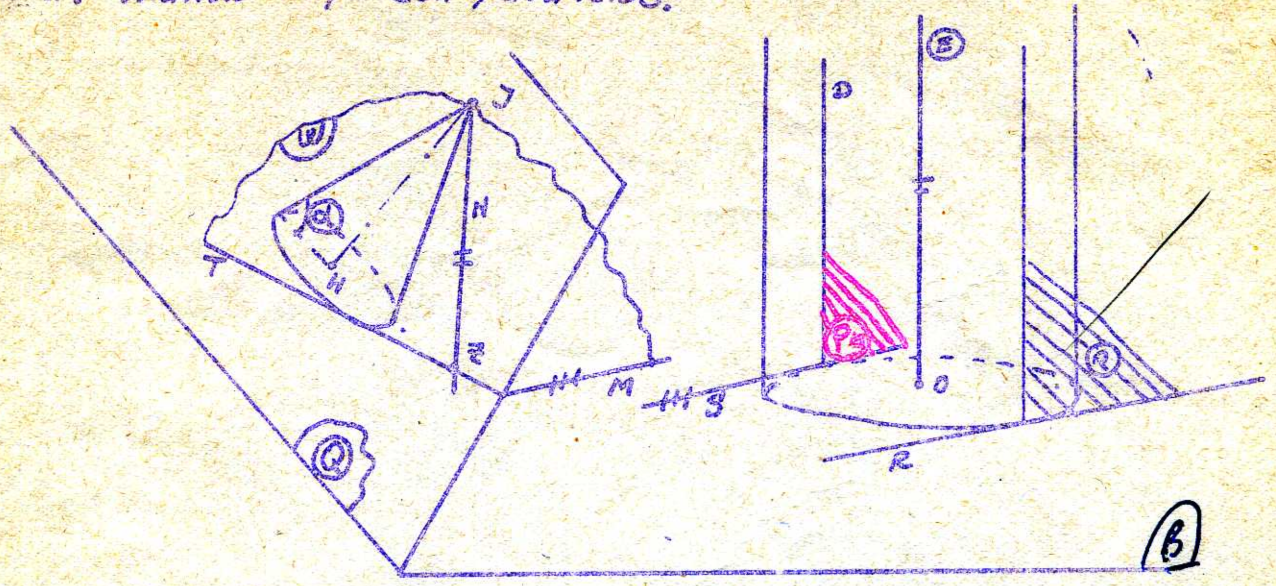




Tomamos un punto C que pertenezca al plano y en él los ejes e_1 y e_2

Girar el plano P alrededor del eje E hasta que forme un angulo α con Q

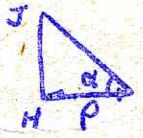
Nota: Cuando P y E son paralelos.



1°) Por un punto O de E plano $\beta \perp$ a E

2°) Tomo un punto J cualquiera del espacio y lo proyecto sobre Q en H.

3°) Segun la figura calculo ρ.



4°) Por J recta N // a E . Intersección $\left.\begin{matrix} N \\ Q \end{matrix}\right\} \to Z$

5°) Abato Q $\left\{\begin{matrix} H \to H_1 \\ Z \to Z_1 \end{matrix}\right.$ ⊙ de centro H_1 y radio ρ calculado.

Por Z_1 tg a la ⊙, recta $T_1 \to T$

6°) Plano formado por $\left.\begin{matrix} T \\ J \end{matrix}\right\}$ W que es paralelo al solucion

7°) Intersecciones de $\left.\begin{matrix} W \\ \beta \end{matrix}\right\}$ M $\left.\begin{matrix} P \\ \beta \end{matrix}\right\}$ R Nota: M y R no tienen porque ser paralelas.

8°) Abato β $\left\{\begin{matrix} O \to O_1 \\ R \to R_1 \\ M \to M_1 \end{matrix}\right.$ ⊙ de centro O_1 tg a R_1

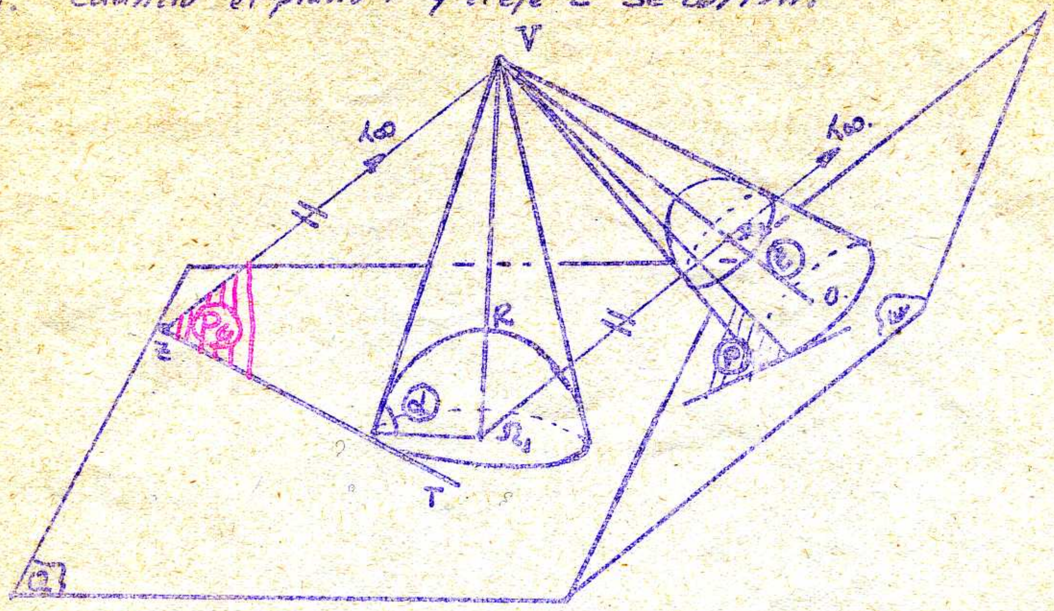
9°) En el desabatimiento recta S_1 // a M_1 y tg a la ⊙ $\to S_1$.

10°) Por un punto de S recta D // a E.

11°) Plano formado por D y S $\to$ D. P_G.

Girar el plano P alrededor del eje E hasta que forme $\hat{\alpha}$ con Q

Nota: Cuando el plano P y el eje E se cortan.



1º) Intersección del plano P y el eje E punto V

2º) Por O de E plano $\omega \perp$ a E.

3º) Por V recta R $\perp$ a Q.

4º) Cono de revolución de eje R y angulo α en la base.

5º) Inscribimos en los conos dos esferas de igual radio y hallamos sus centros Ω_1 y Ω_2.

6º) Calculamos la dirección k_∞ uniendo Ω_1 y Ω_2.

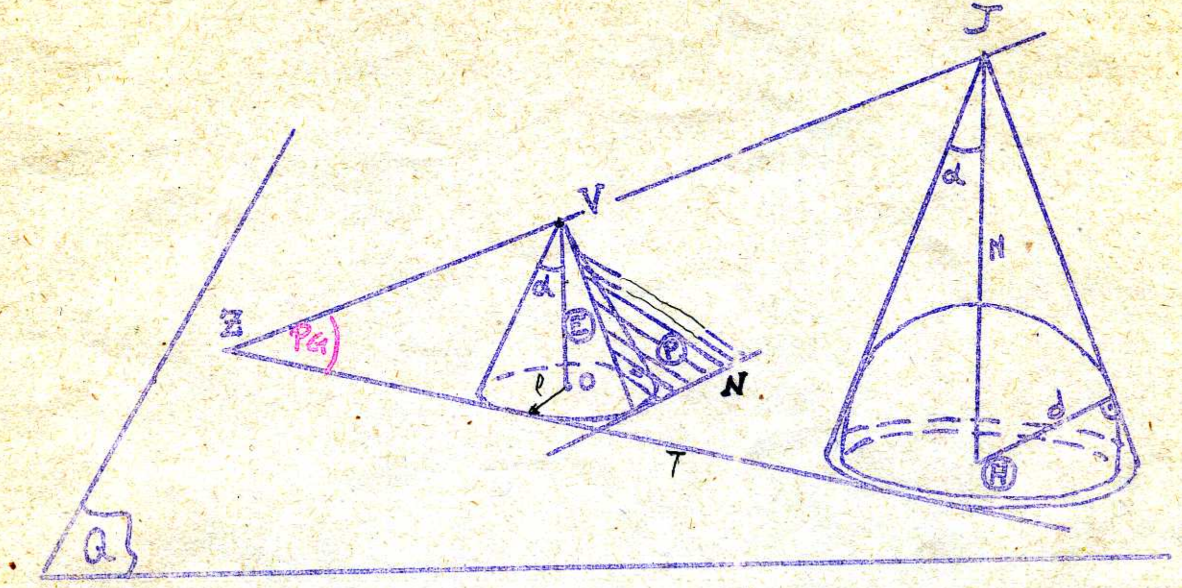
7º) Por el punto V trazamos una paralela a $\Omega_1 \Omega_2$ que cortará a Q en el punto z

8º) Abato Q $\begin{cases} \odot \text{ de la base del cono de centro } \Omega_1. \\ z \rightarrow z_1. \end{cases}$

9º) Por z_1 recta tg a la $\odot \rightarrow$ T.

10º) El plano girado (solución) está formado por la recta T y el punto V, vértice de los conos (o también entre la recta T y la dirección k_∞ que pasa por V) $\longrightarrow$ P_a.

Girar el plano P alrededor del eje E hasta que diste d del punto A.



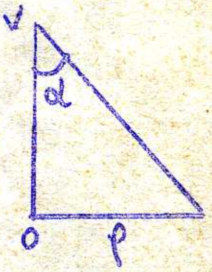
1º) Intersección de E y P ⟶ V

2º) Por A plano Q ⊥ a E

3º) Intersección de Q y E punto O.

4º) Intersección de Q y P ⟶ N

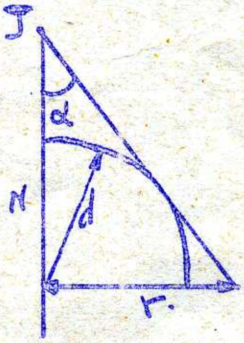
5º) Abato Q $\begin{cases} N \to N_1 \\ O \to O_1 \end{cases}$ ⊙ de centro O_1 y tg a N_1 de aquí calculamos el radio ρ de la ⊙. Calculo el ángulo α.



6º) Por A recta N ⊥ a Q.

7º) Según figura calculo J y r

Calculado J, uno J con V y me corta a Q en Z



8º) Abato Q $\begin{cases} A \to A_1 \\ Z \to Z_1 \end{cases}$. ⊙ de centro A_1 y radio r.

Desde Z_1 trazo la tg a la ⊙ ⟶ T_1, que desabatido me da T

9º) Plano formado por V J, T nos da. P_G.

HOMOLOGÍAS

Los principales elementos de la homología son:

Centro (S)

El centro viene definido por el corte de dos rectas que unen puntos homólogos

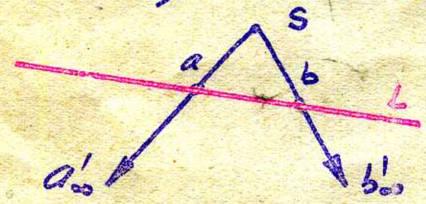
Eje de homología (E)

Es el l. g de puntos dobles

Está definido por los puntos de corte de rectas que unen puntos homólogos

Recta Límite (L)

Es el l. g de los puntos primitivos (sin primas) cuyos homólogos (primados) se encuentran en el ∞

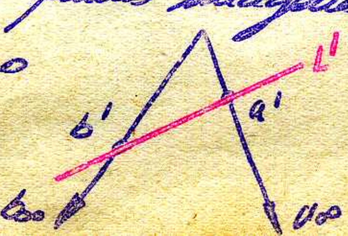


La correspondencia entre puntos homólogos es biunívoca

La recta L siempre es // a E

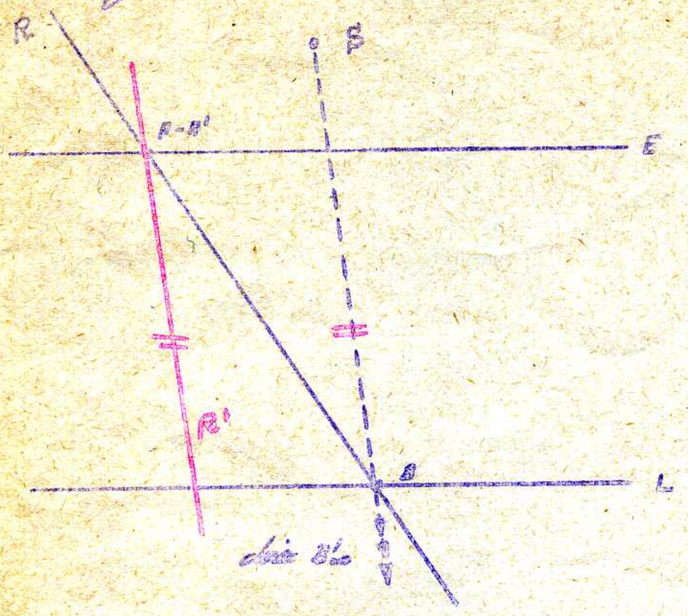
Recta Límite (L')

Es el l. g de puntos imágenes (primados) cuyos homólogos originales están en el ∞



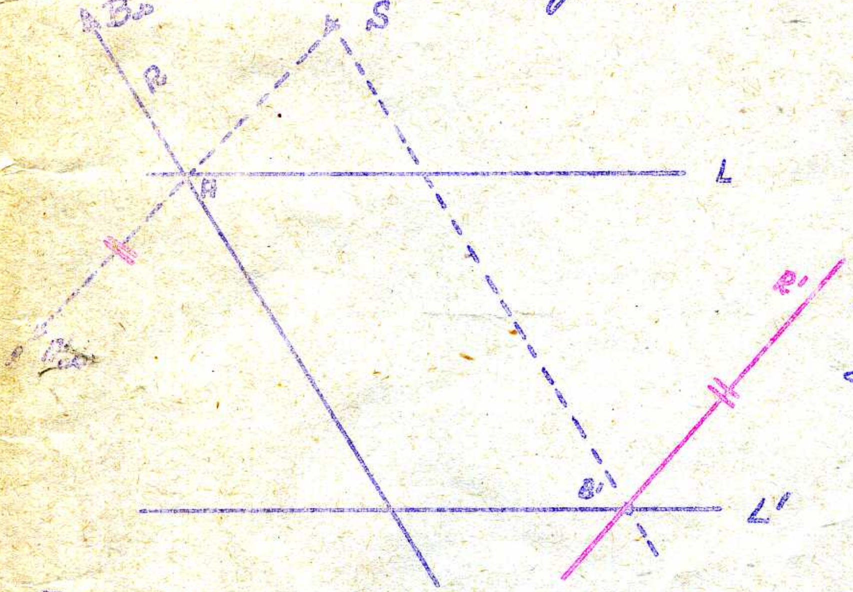
La recta L' es siempre // a E y L

EJEM Dado el centro y la recta límite L, calcular la homóloga de R



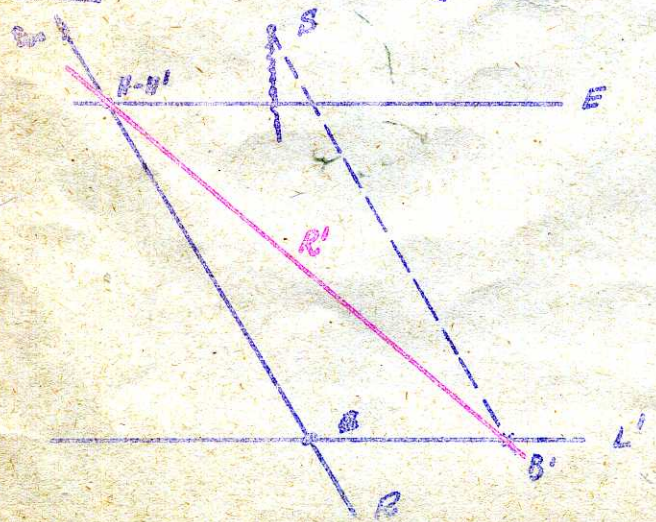
La recta R está definida por los puntos A B luego la R' vendrá definida por A' y B'
A' es doble por estar en E
B' estará alineado con B y S y en el punto del ∞ por estar en L
Luego por A' ∥ a dir. B' → R'

EJEM Conocidos S, L y L'. Calcular la homóloga de R

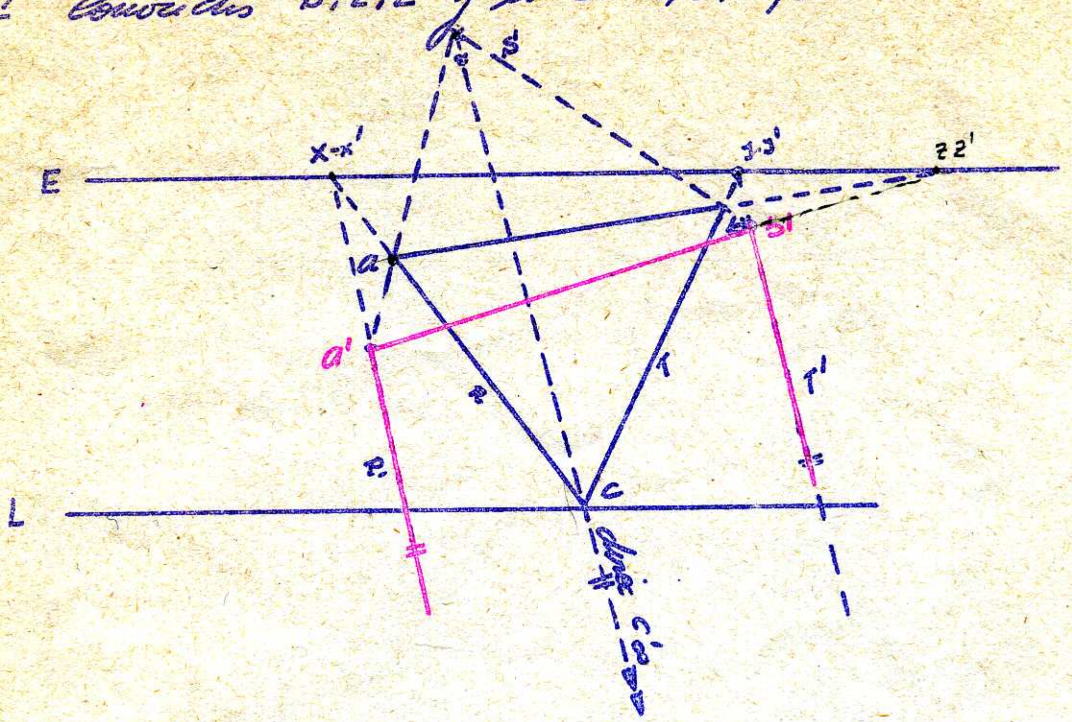


Calculamos la dirección de A' que estará en el ∞ por ser A ∈ L
Si consideramos el punto B∞ de R su homólogo B' estará sobre L' por ser B∞
Luego por B' ∥ a A'∞ → R'

EJEM: Conocidos S, E y L', calcular la homóloga de R



EJEM Conocidos S, E, L y el Δ a, b, c, calcular su homólogo



Para definir el Δ' definimos las rectas R y T de sus lados

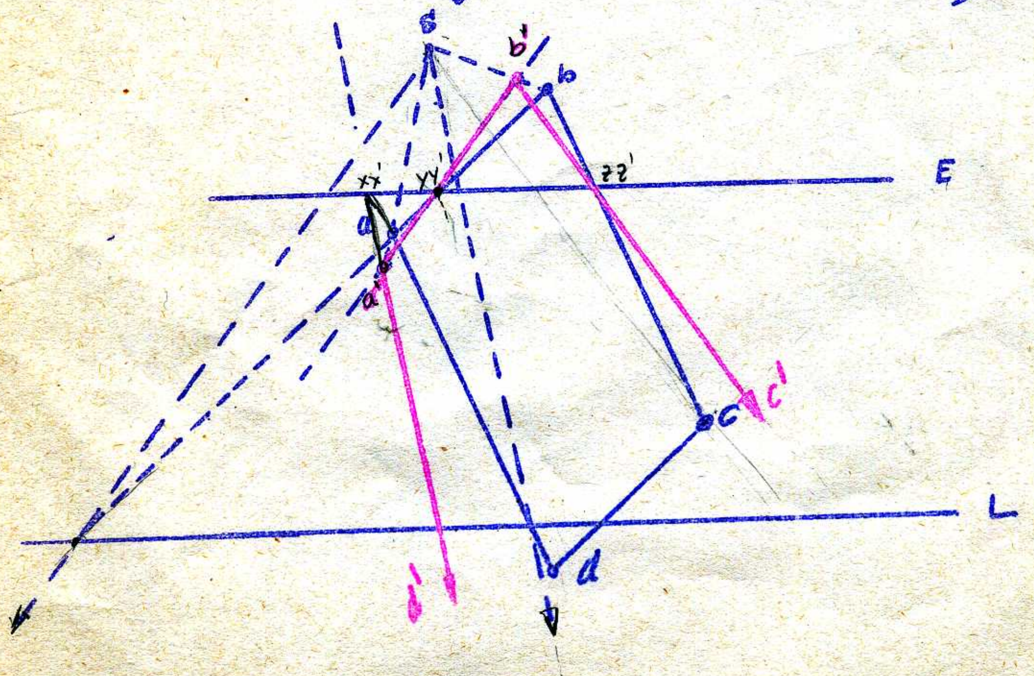
$\begin{cases} T \equiv bc \\ R \equiv ac \end{cases}$ Calculamos c' que estará en el ∞ por ser $c \in L$

R tiene su punto doble x-x' luego $R' \equiv x'c'$ como $R \ni a$; $a\ R' \ni a' \Rightarrow a'$

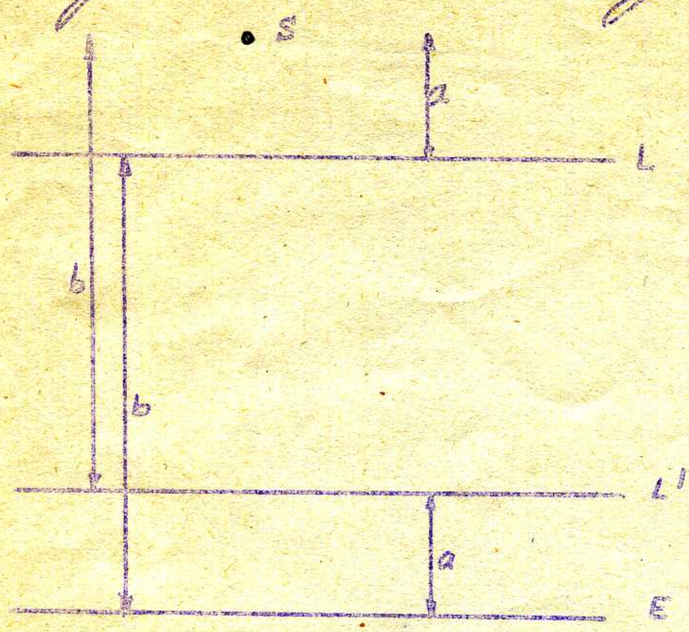
Lo mismo ocurre con el $y y' \in T$ luego $T' = y'c'$ como $b \in T$; $b' \in T' \Rightarrow b'$

Nos queda un Δ degenerado ya que c' está en el ∞

EJEM Conocidos S, E y L calcular el homólogo del rectángulo



Al plantear una homología siempre se cumple que:



La distancia del centro S a una recta límite es la misma que la que hay del eje a la otra recta límite

Una homología puede verse totalmente definida por el centro y 2 rectas

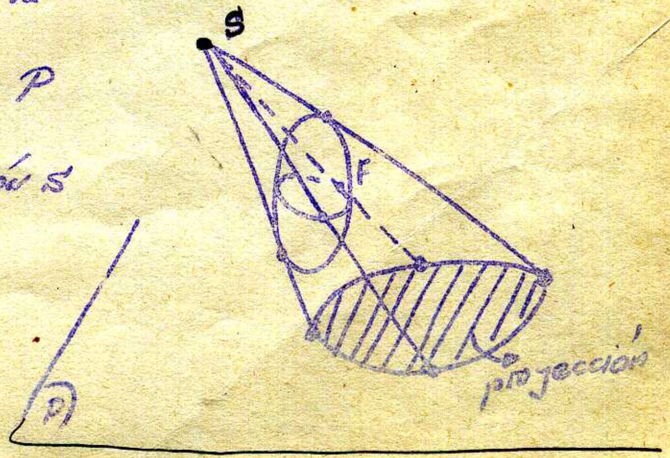
Nosotros utilizaremos S, E y L

APLICACIÓN DE HOMOLOGÍAS

Las homologías se utilizan para proyecciones, sombras y secciones.

Los tres casos son asimilables a uno ya que sombra no es ni más ni menos que una proyección desde el punto luminoso sobre un plano que si es una ~~pro~~ sección, será sobre el plano de la sección

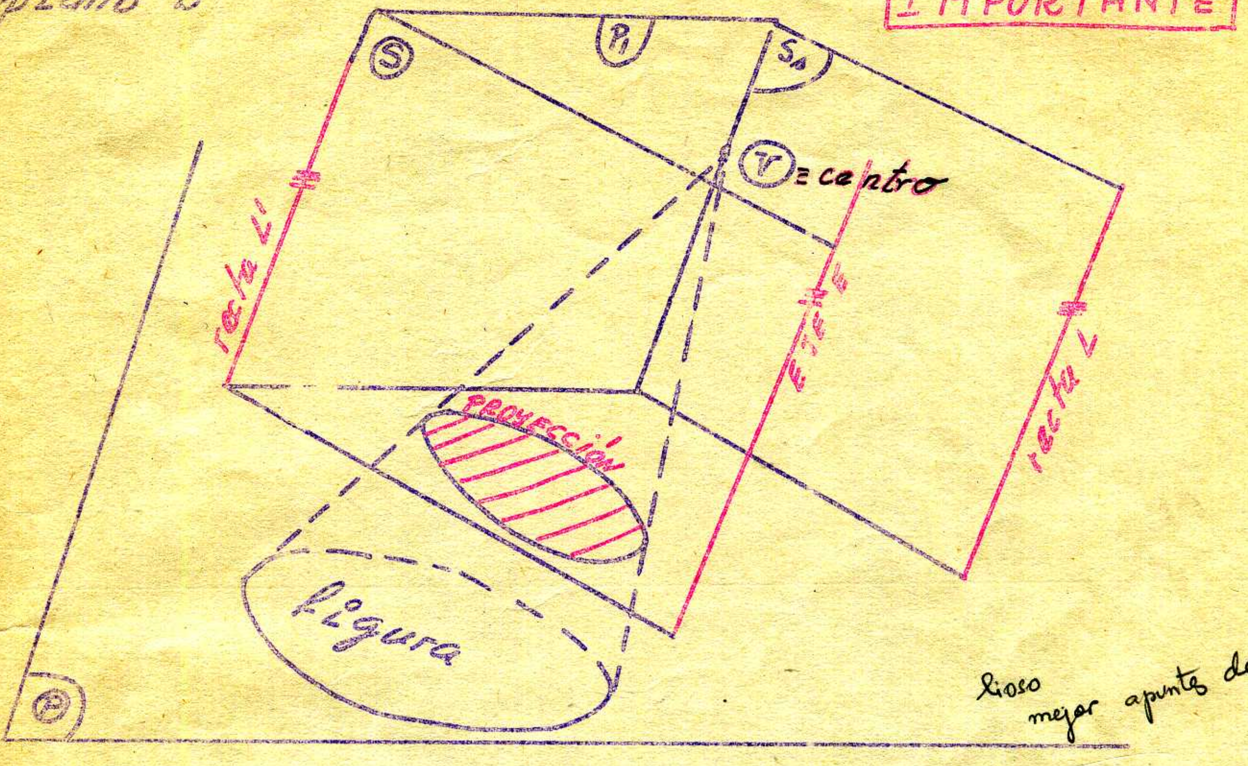
Proyectar una figura desde un punto sobre un plano es calcular la sombra de esa figura F sobre ese plano P desde el centro de proyección S



APLICACIÓN DE HOMOLOGÍAS A PROBLEMAS

Dada una fig en P projectarla desde V sobre el plano S

IMPORTANTE



Lioso
mejor apuntes de Pachi

1º) El punto V identifico al centro

2º) Int $\int^{P}_{S}$ ⟶ EJE

3º) Por el punto V paso $S_1 \parallel$ a S. Int $\int^{S_1}_{P}$ ⟶ ~~EJE~~ RECTA L

4º) Por el punto V paso $P_1 \parallel$ a P. Int $\int^{P_1}_{S}$ ⟶ recta L'

Luego tenemos definida la homología

La homología se puede definir en cualquier proyección nosotros la definimos en proyección directa y después la sustraemos la sección en el plano S

HOMOLOGIAS EN CIRCUNFERENCIAS

En homologías de circunferencia existen tres casos

a) Cuando L es exterior a la ○ ⇒ ningún punto en el infinito ⟶ caso elipse

b) Cuando L es tg a ○ ⇒ 1 punto en el infinito luego la transformada parábola ⟶ caso parábola

c) Cuando L corta a ○ ⇒ 2 puntos en el infinito luego la transformada es hipérbola ⟶ caso hipérbola

Pasos caso elipse

1º) Trazamos las tg T_1 y T_2 a la ○ ∥ a E en los puntos I y II que definen la recta R.

2º) Calculamos la homología de R ⟶ R' y sobre ella I' y II'

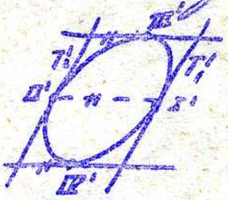
3º) Por I' y II' ∥ a E ⟶ $\begin{cases} T_1' \\ T_2' \end{cases}$

4º) Calculamos punto medio de I'II' ⟶ O' que será transformado de O∈R

5º) Por O ∥ E ⟶ M Int $\begin{cases} M \\ ○ \end{cases}$ ⟶ $\begin{matrix} III \\ IV \end{matrix}$

6º) Por O' ∥ E ⟶ M' y sobre ella calculo las homologías de III y IV ⟶ $\begin{matrix} III' \\ IV' \end{matrix}$

7º) Conocidos $\begin{cases} T_1' \\ T_2' \end{cases}$ $\begin{cases} I' \\ II' \end{cases}$ $\begin{cases} III' \\ IV' \end{cases}$ está resuelto



Pasos caso parábola

1º) Uno S con el punto de tg de la ○ y L → A y obtengo la dirección del eje

2º) Por S ∥ a la dirección del eje → direc. tg en el origen que corta a L en K

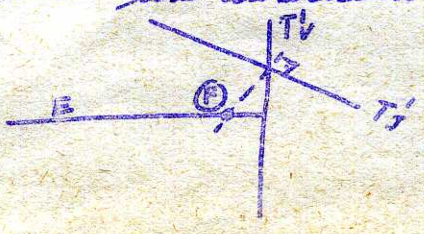
3º) Por K tg a ○ en V ⟶ T_V siendo V el vértice de la parábola

4º) Calculo la homología de T_V ⟶ T_V' y sobre ella V' (T_V' será ∥ direc. tg en origen)

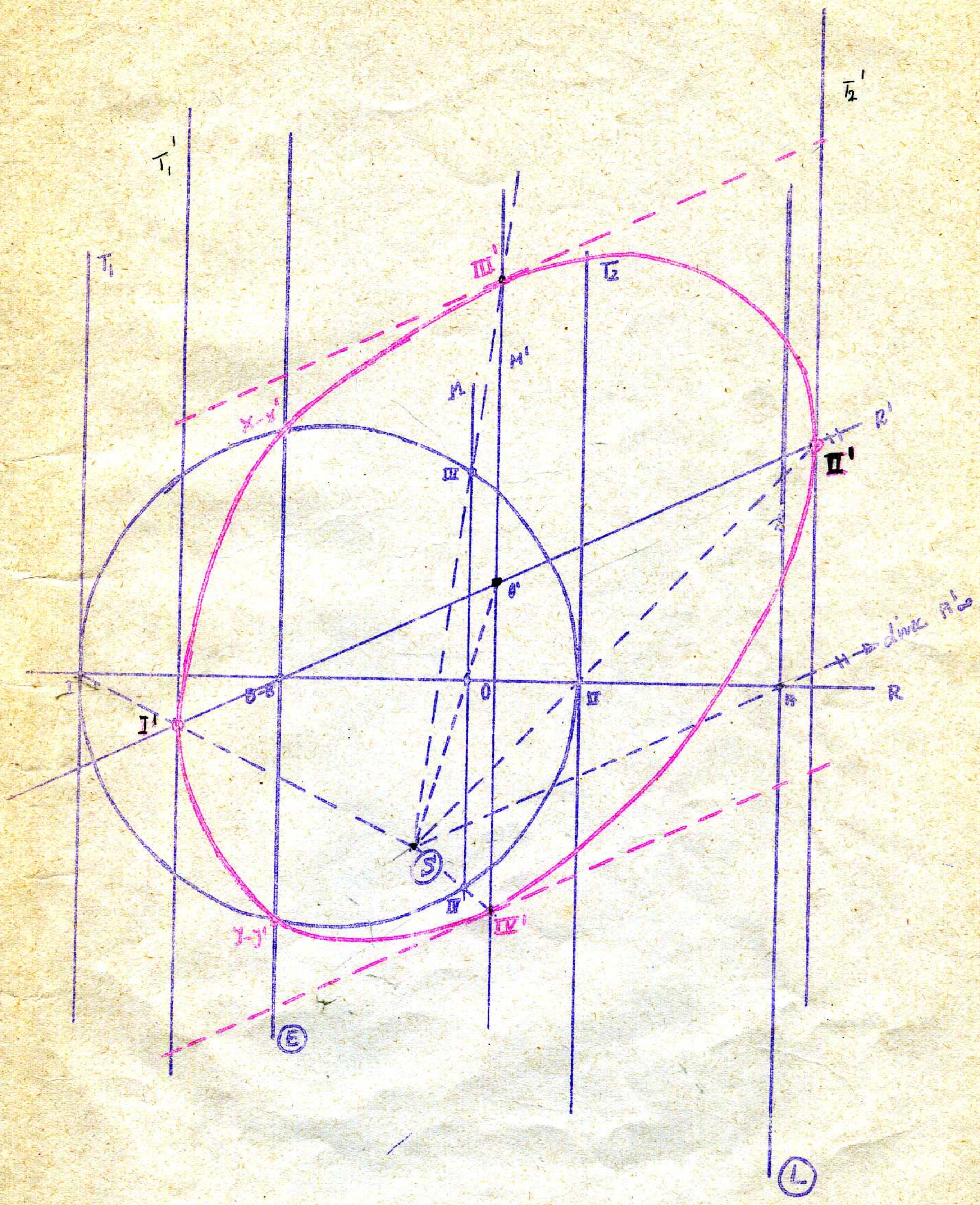
5º) Desde S trazo una tg a ○ en J ⟶ T_J que será doble por pasar por S es decir $T_J = T_J'$ mediante M calculo J'

6º) Conocido E, T_V' y T_J' está resuelto el problema

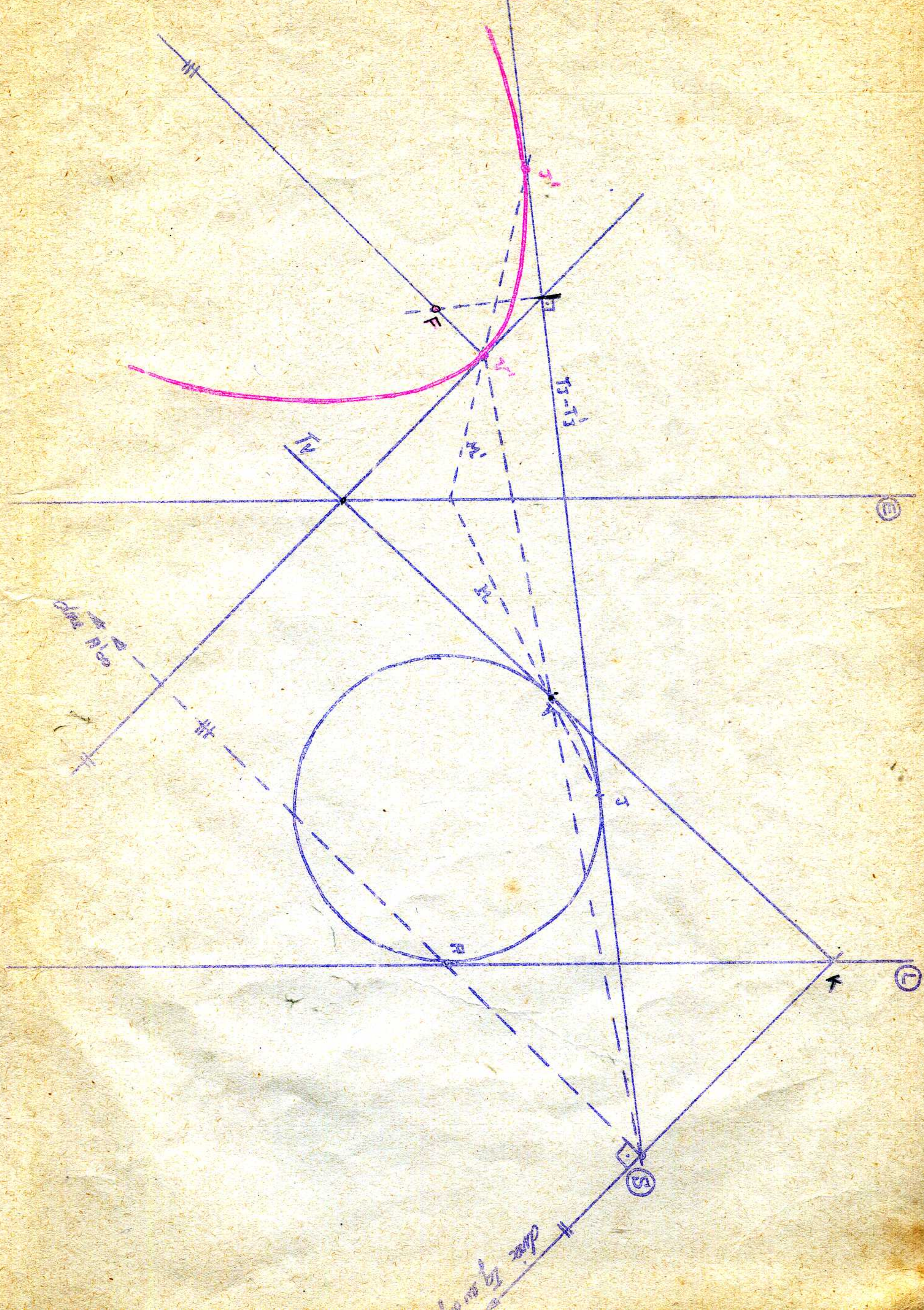
7º) Para calcular el foco nos auxiliamos en la siguiente construcción



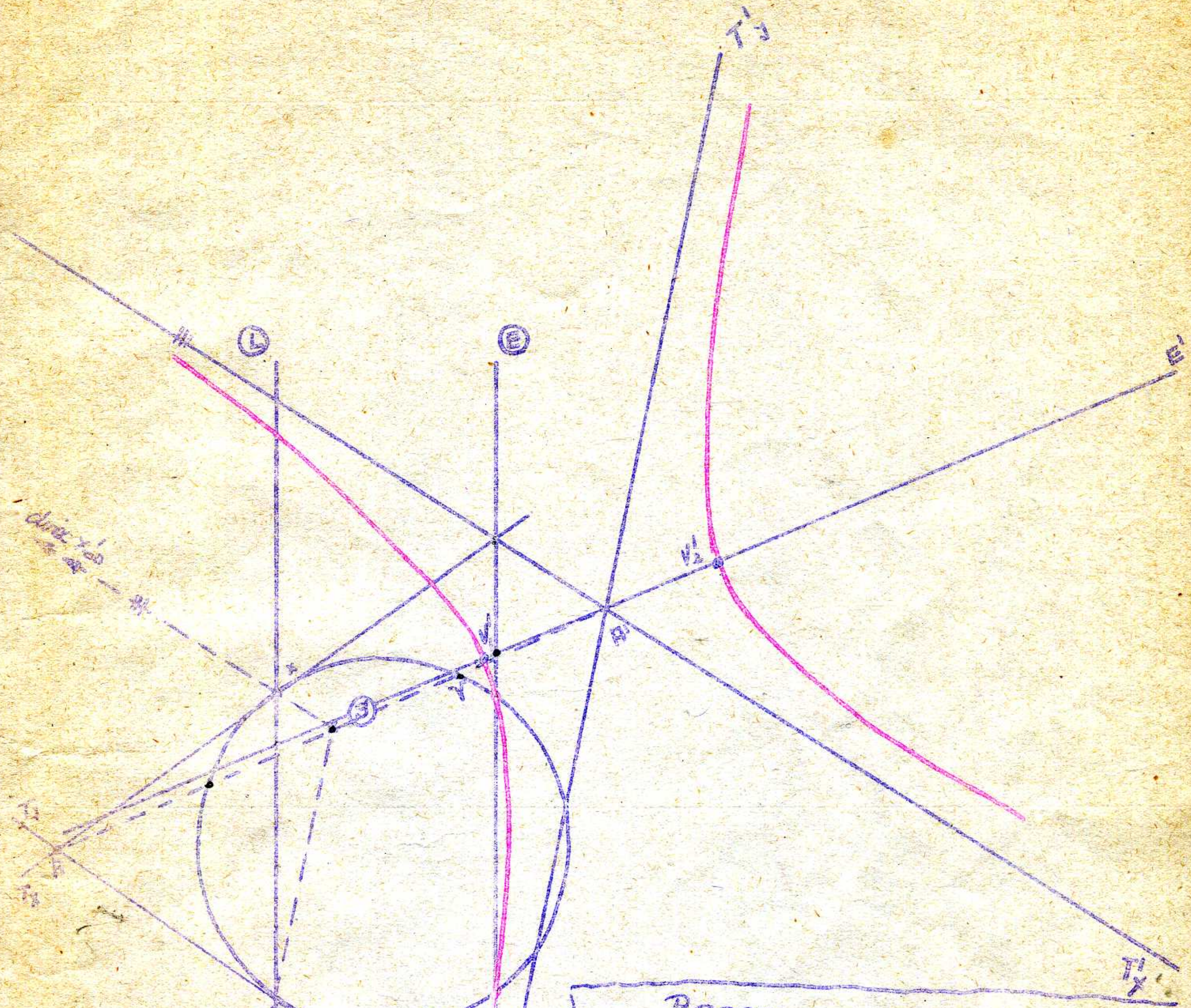
CASO ELIPSE



CASO PARÁBOLA



CASO HIPÉRBOLA



Pasos

1º) Trazo las tg a la ⊙ por los puntos X e Y de intersección de $\left\{ \begin{smallmatrix} \odot \\ L \end{smallmatrix} \right.$ sean T_x y T_y sus homólogas T'_x y T'_y son las asíntotas de la hipérbola

$\begin{smallmatrix} T_x \\ T_y \end{smallmatrix} \Big\} A$ $\begin{smallmatrix} T'_x \\ T'_y \end{smallmatrix} \Big\} A'$ tiene que suceder que $A A'$ y S. estén alineados

2º) Calculamos la bisectriz de $\left\{ \begin{smallmatrix} T'_x \\ T'_y \end{smallmatrix} \right. \rightarrow E'$ que será el eje de la hipérbola.

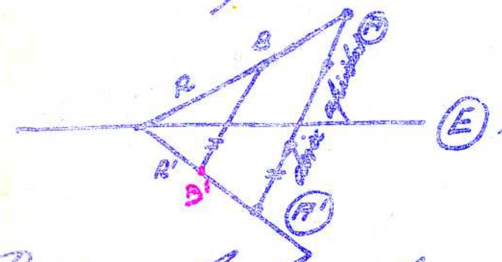
3º) Calculamos la homóloga (primitiva) de $E' \rightarrow E$

4º) Dicha $\begin{smallmatrix} E \\ \odot \end{smallmatrix} \Big\} \rightarrow \left\{ \begin{smallmatrix} V_1 \\ V_2 \end{smallmatrix} \right.$ sus homólogas $\left\{ \begin{smallmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{smallmatrix} \right.$ estarán sobre E' y deben de cumplir que $V'_1A' = V'_2A'$

5º) Cuando $\frac{T'_x}{T'_y} = \frac{V'_1}{V'_2}$ está resuelto el problema

AFINIDAD

La afinidad es un caso particular de la homología en la que las rectas límite L y L' están en el infinito.

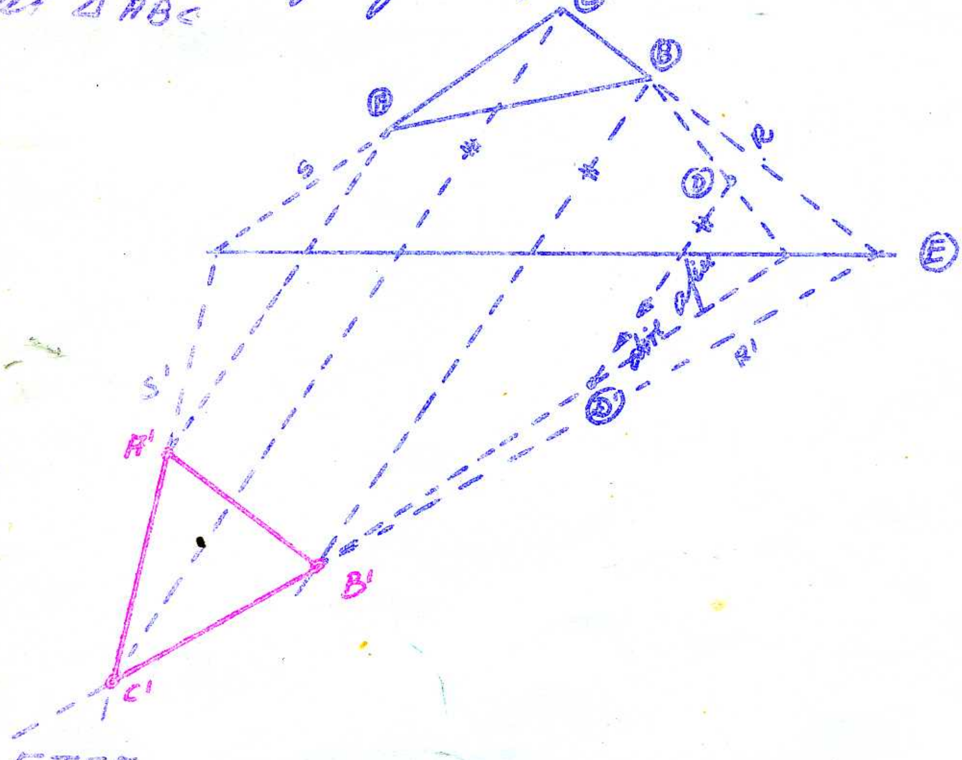


Para definir una ~~homología~~ afinidad se necesita conocer una pareja de puntos homólogos y el eje de afinidad.

Para calcular el afín de un punto B, unimos con A mediante una recta R cuya homóloga R' pasará por A'. Como $\overline{AA'}$ nos define la dirección de afinidad desde B ∥ hasta que corte a R'.

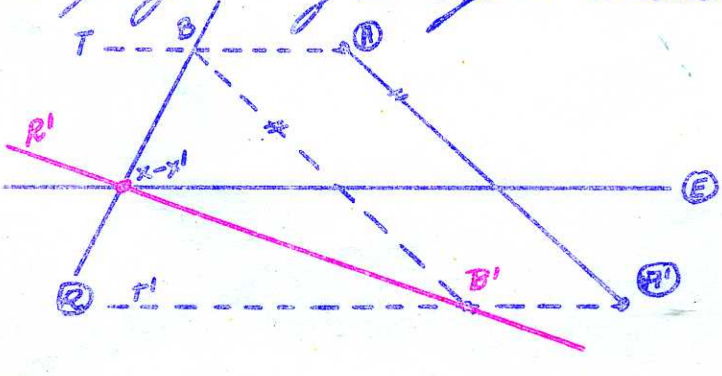
EJEM

Conocido el eje y la pareja DD' calcular el homólogo del △ABC



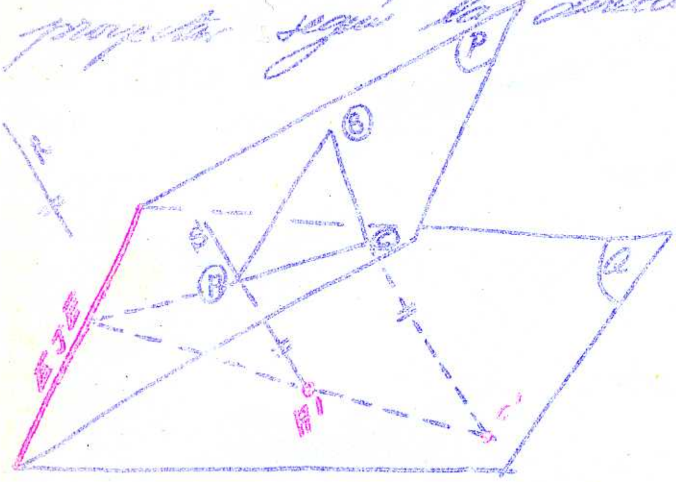
EJEM

Conocida la pareja A-A' y el eje E calcular la homóloga de R



De tener una afinidad Aplicaciones

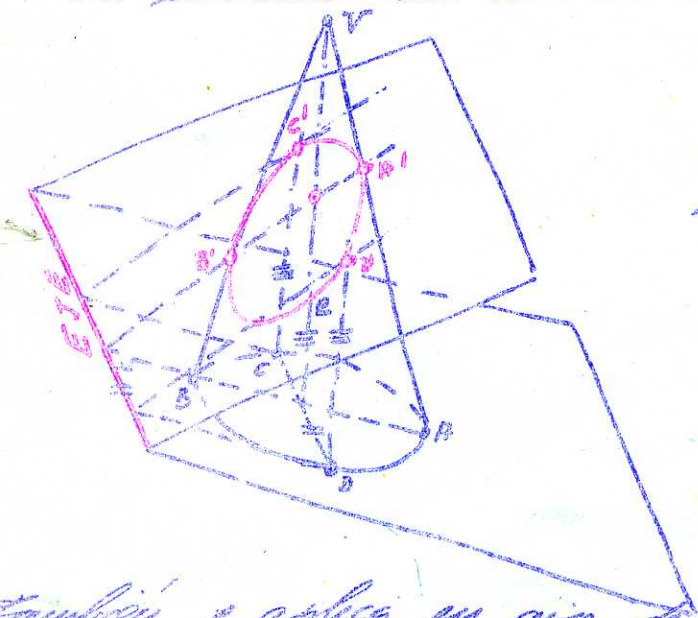
La afinidad se emplea en secciones.
Si consideramos una fig. en un plano P y la queremos proyectar según una dirección dada sobre un plano Q.
La afinidad se define así:



1º) Int. $P/Q \rightarrow$ EJE
2º) Por un punto A (de la figura) recta S // a Q.
3º) Int. $S/Q \rightarrow A'$
4º) Conocido el par A-A' y el eje E la afinidad está resuelta.

EJEM

Hallar la intersección del cono con el plano Q



En este caso la dirección de afinidad era la del eje del cono

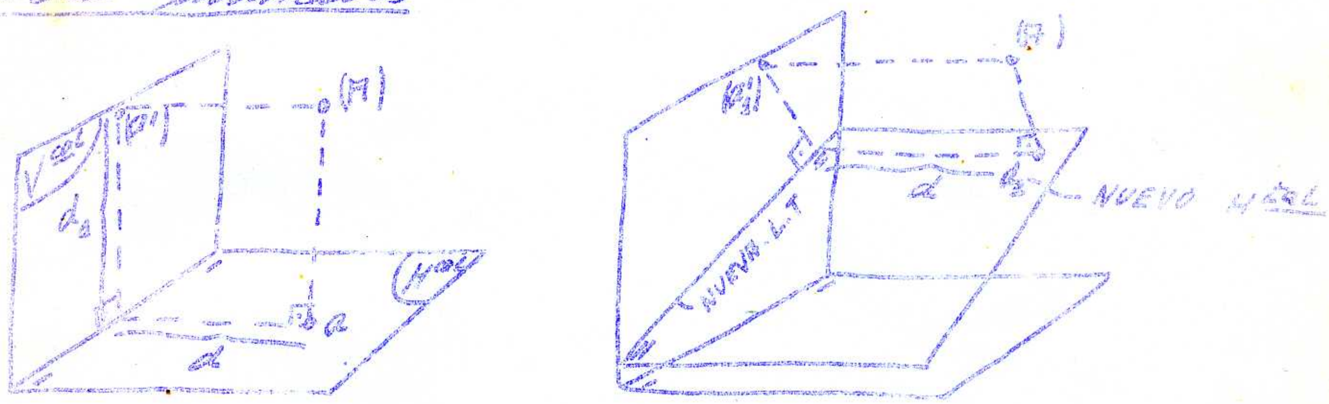
También se aplica en giro de una figura sobre un plano

CAMBIOS DE PLANO

Existen dos cambios de plano que son el vertical y el horizontal.

Cambio de horizontal

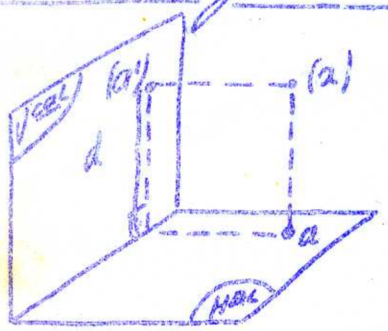
Cambiar el h^tal consiste en considerar un nuevo pno h^tal que nos resulte más cómodo manteniendo el mismo v^tal por lo tanto las proyecciones verticales quedan invariables

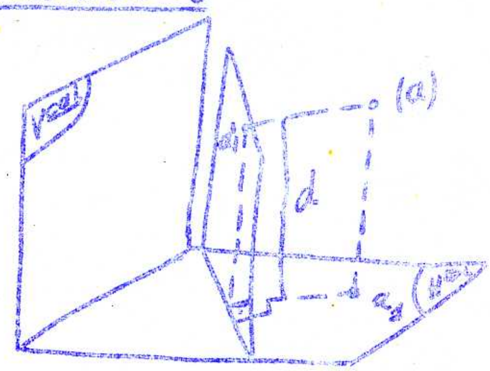


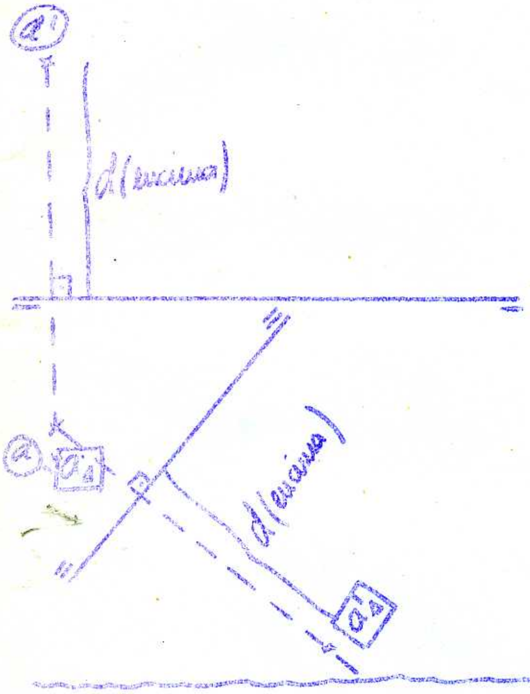
Sobre el pno del dibujo el cambio de pno resultará definido por la nueva línea de tierra =

Como vemos las proyecciones verticales quedan invariables y las distancias de las proyecciones h^tal a las líneas de tierra también y sobre la perpendicular a estas teniendo en cuenta que si en su planiquí están por arriba $d_1 \cdot a$ después también cambio de vertical

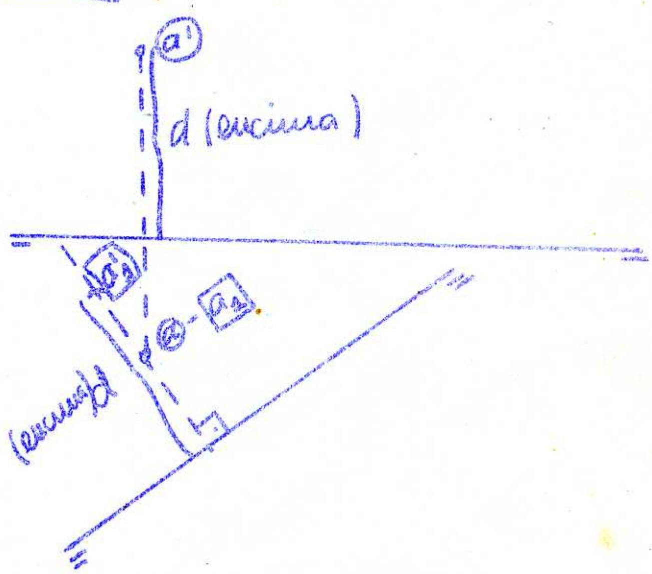
Cambiar el V^cal consiste en considerar un nuevo pro V^cal conservando el mismo H^tal, por lo tanto las proyecciones H^tales permanecen invariables



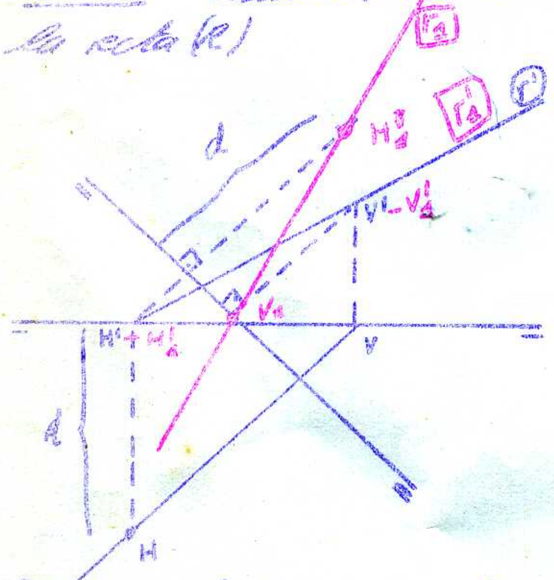




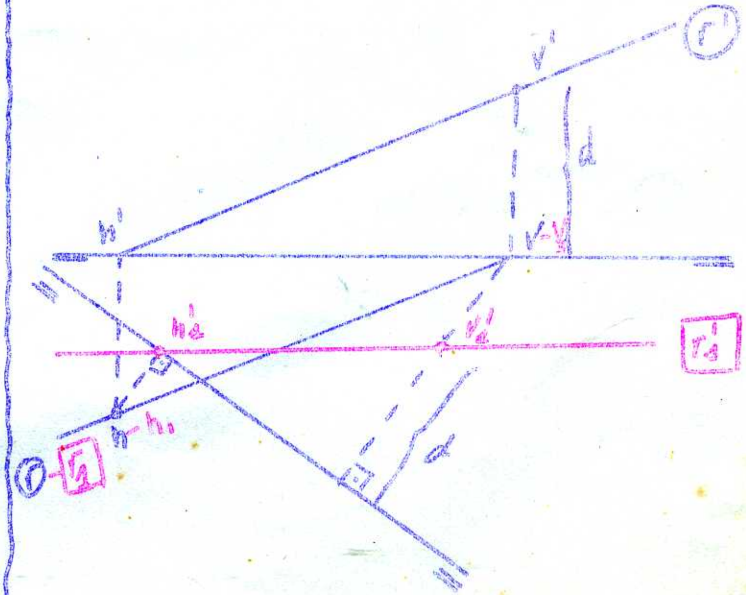
EJEM



EJEM Cambiar de H^tal la recta (R)



EJEM Cambiar de V^cal la recta (R)



(r) Cambiar una recta, es cambiar dos puntos, nosotros

APLICACIONES

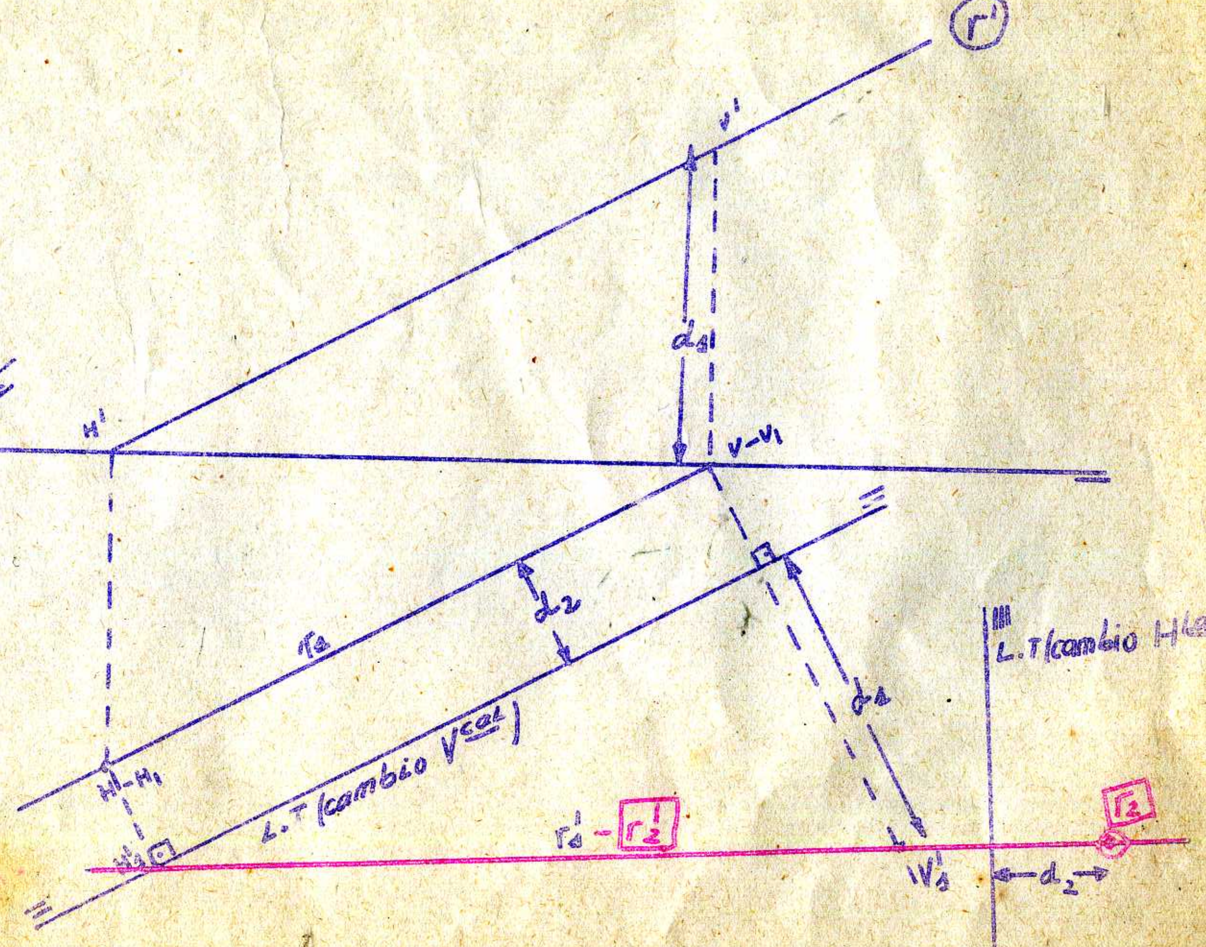
La mayor aplicación de cambios de planos consiste en colocar una recta de punta, para el calculo de mínimas distancias o bisector de planos.

EJEM Mediante dos cambios colocar la recta (r) de punta respec al pno H^{tal}

1º) Hacemos un cambio de vertical de modo que la nueva linea de tierra sea // a la proyección H^{tal} de la recta primitiva r que por ser cambio de V^{cal} sera $r \equiv r_1$

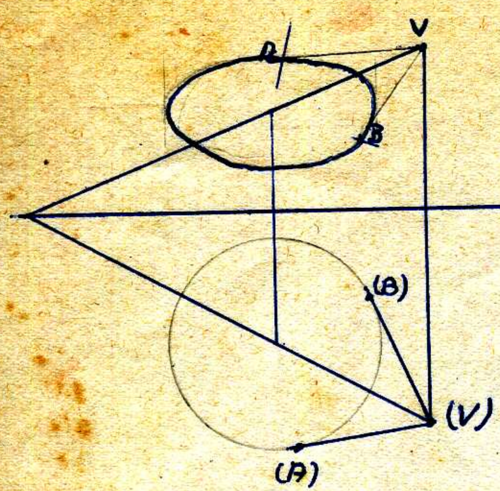
2º) Calculamos la proyección vertical de (r_1) por el metodo normal según H_1 y V

3º) Una vez conocida r_1' Hacemos un cambio de V^{cal} de modo que la nueva linea de tierra sea // a r_1' que por ser cambio de H^{tal} sera $r_1' \equiv r_2'$



Como todos los puntos de r_1 distan lo mismo (d_2) de la anterior linea de tierra, todos ellos se proyectaran sobre un punto que será r_2

proyección directa:



1º Abato V como si estuviera en el plano directriz

2º Por (V) tgs a la circunferencia hallando los puntos de contacto (A) y (B), los desabato y las rectas VA y VB son las generatrices pedidas

Para la proyección horizontal

1º Situo v en el plano directriz, hallando M

2º Abato M y por (M) tgs a la ⊙, hallando los puntos de contacto (C) y (D), los desabato y las rectas $\bar{V}C$ y $\bar{V}D$ son las generatrices pedidas.

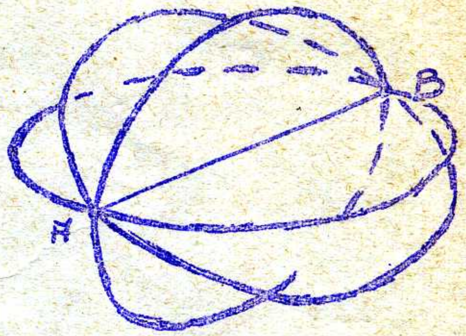
Intersección de un toroide capaz con una Recta.

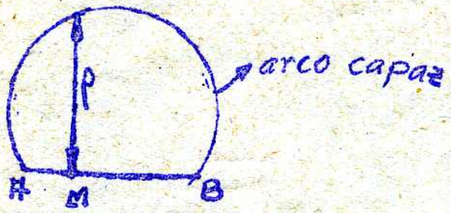
A°) La recta R es ⊥ al eje $\overline{AB}$ del toroide.

1°) Por R plano perpendicular a $\overline{AB}$ → W.

2°) Intersección de W y $\overline{AB}$ → punto M

3°) Mediante la figura auxiliar hallamos la distancia ρ





4°) Abato el plano W $\begin{cases} M \to M_1 \\ R \to R_1 \end{cases}$

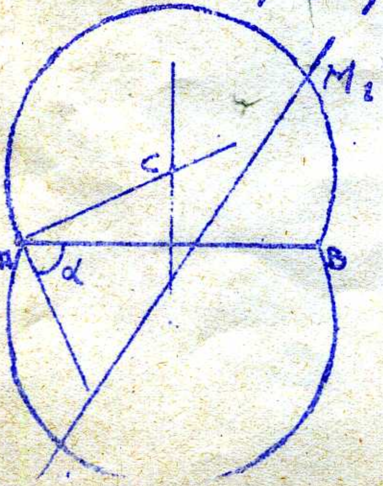
Con centro en M_1 y radio ρ corto a R_1 en dos puntos M_1 y N_1. Desabatidos obtengo los puntos pedidos.

B°) La recta R corta al eje AB del toroide.

1°) Hallamos el plano formado por R y AB → P

2°) Abato el plano P $\begin{cases} R \to R_1 \\ A \to A_1 \\ B \to B_1 \end{cases}$

en el abatimiento dibujo la figura de abajo, y hallo los puntos de corte M_1 y N_1 que desabatidos dan → M y N.



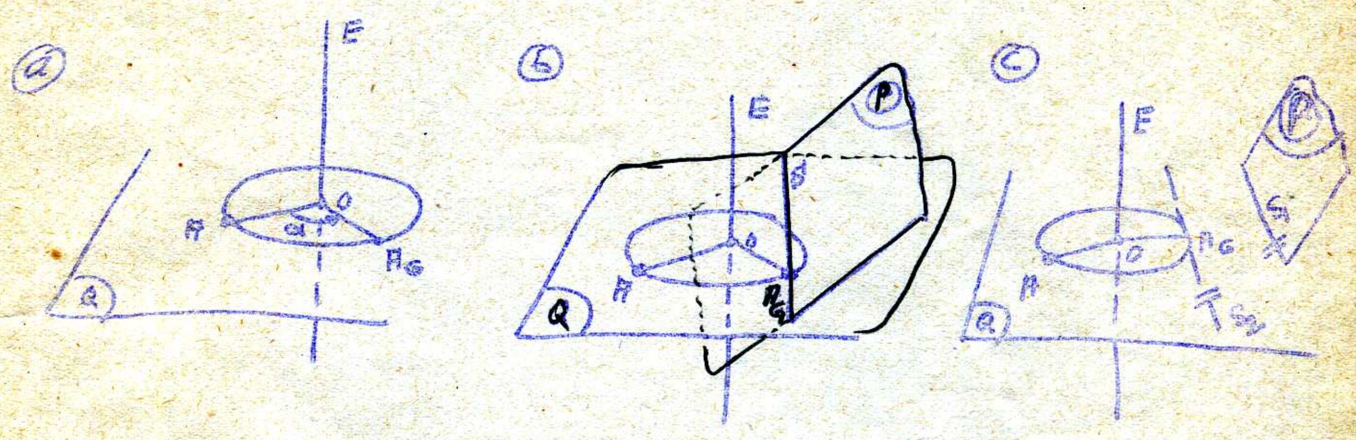
Girar un punto alrededor de E

Girar un punto A alrededor de un eje E hasta que:

a) Gire un angulo α

b) Corte a un pno P

c) Quede lo más cercano posible de un pno P



1º Por A pno Q $\perp$ a E

2º Int $\left\{ \begin{array}{l} Q \\ E \end{array} \right. \rightarrow O$

3º

a) Abato Q $\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow A_1 \\ O \rightarrow O_1 \end{array} \right.$ ○ centro O_1 y radio A_1O_1

giro A_1 $\alpha^\circ \rightarrow A_{G1}$

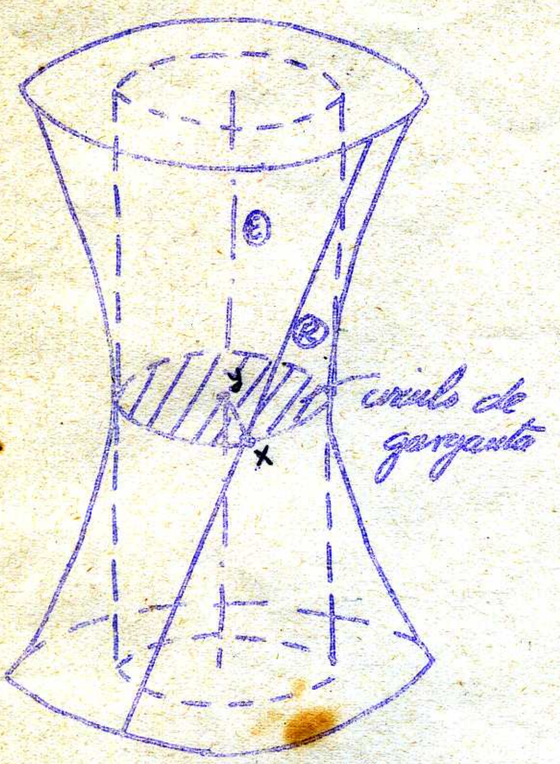
b) Abato Q $\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow A_1 \\ O \rightarrow O_1 \\ S \rightarrow S_1 \end{array} \right.$ ○ centro O_1 radio A_1O_1

Int $\left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right. \rightarrow S$ donde int $\left\{ \begin{array}{l} ○ \\ S_1 \end{array} \right. \rightarrow A_{G1}$

c) Int $\left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right. \rightarrow S$. Abato Q $\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow A_1 \\ O \rightarrow O_1 \\ S \rightarrow S_1 \end{array} \right.$ ○ centro O_1 y radio A_1O_1. Trazo tg $\parallel$ a $S_1 \rightarrow S_{21}$ tg en A_{G1}

Girar una recta R alrededor de un eje E al que no corta

La figura que se engendra es un hiperboloide

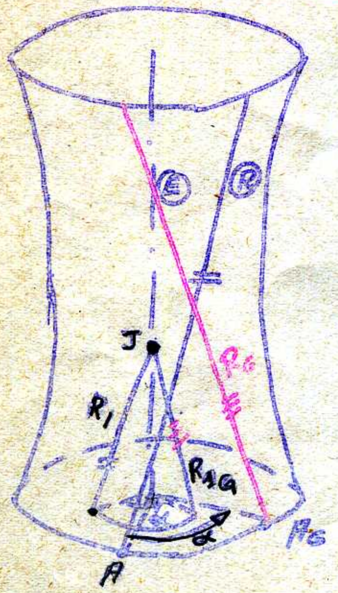


$\overline{x-y}$ es la minima distancia entre R y E y el circulo de garganta es que contiene la m.d de todas las rectas giradas. Su plano es ⊥ al eje E.

Giro de R

Para girar una recta habrá que girar dos puntos cualesquiera de ella para siempre el mismo angulo y en el mismo sentido. Uno de los puntos a girar suele ser el x de la m.d.

Método practico



Girar R un angulo α

1º) Por un punto J ∈ E recta $R_1 \parallel R$

2º) Giro R_1 por el método normal del caso y obtengo R_{1G}

3º) Giro un punto A ∈ R el mismo angulo α y en el mismo sentido → A_G

4º) Por A_G ∥ a R_{1G} → R_G

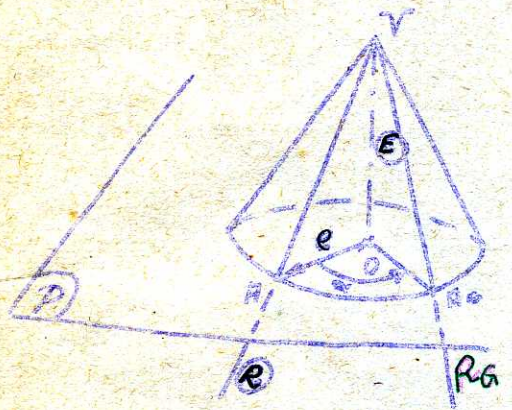
Giro de una recta alrededor de un eje al que corta

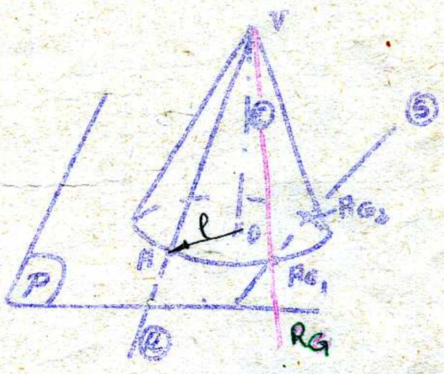
Girar R alrededor de E al que corta

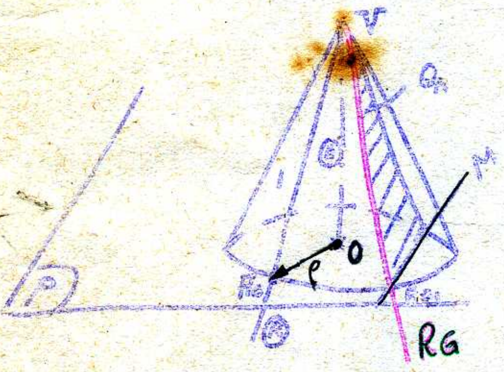
a) Un angulo $\hat{\alpha}$

b) Hasta que corte a una recta $S \in P$. Si P es $\perp$ a E

c) Hasta que quede paralela a un pno Q





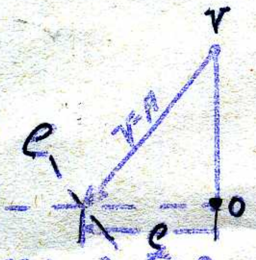


ⓐ 1º) Int $\left\{ \begin{matrix} E \\ R \end{matrix} \right. \rightarrow V$

2º) Por O ∈ E pno P $\perp$ a E

3º) Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ R \end{matrix} \right. \rightarrow A$

4º) Según fig calculo



5º) Abato P $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ A \rightarrow A_1 \end{matrix} \right.$ con centro O_1 y radio $O_1A_1 = e$ giro A_1 un angulo $\alpha \rightarrow R_{G_1}$

6º) Uno V con $R_G \rightarrow R_G$

ⓑ

1º) Realizo los pasos 1º, 2º y 3º del apartado ⓐ

2º) Abato P $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ A \rightarrow A_1 \\ S \rightarrow S_1 \end{matrix} \right.$ giro A_1 alrededor de O_1 hasta que corte a S_1 en R_{G_1}

3º) Desabatido R_G uno con $V \rightarrow R_G$

ⓒ

1º) Realizo los pasos 1º, 2º y 3º del apartado ⓐ

2º) Por V pno $Q_1 \parallel Q$

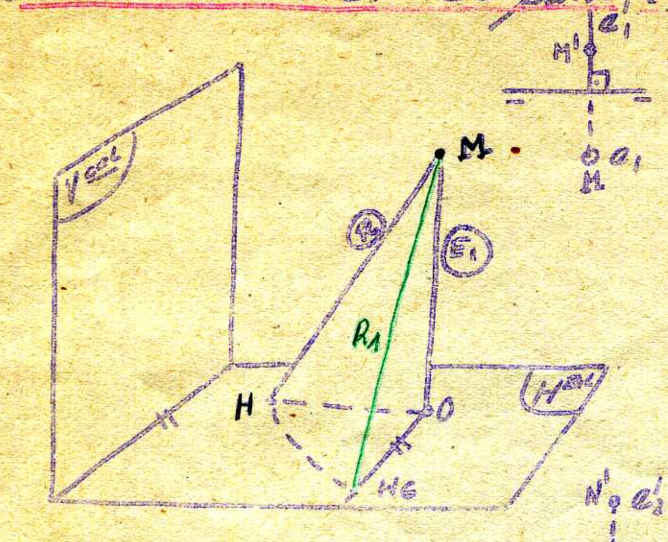
3º) Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right. \rightarrow M$ caso (b)

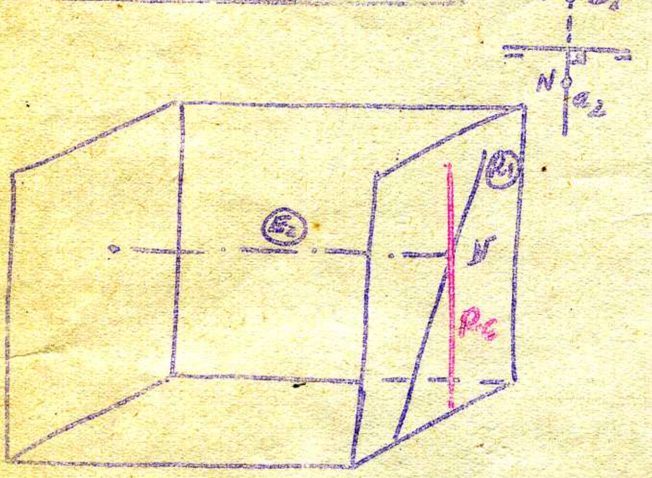
4º) Abato P $\left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ A \rightarrow A_1 \\ M \rightarrow M_1 \end{matrix} \right.$ giro A_1 alrededor de O_1 hasta que corte a M_1 en R_{G_1}

5º) Uno R_G con $V \rightarrow R_G$

[illegible] dos giros [illegible]

Locar una recta de punta



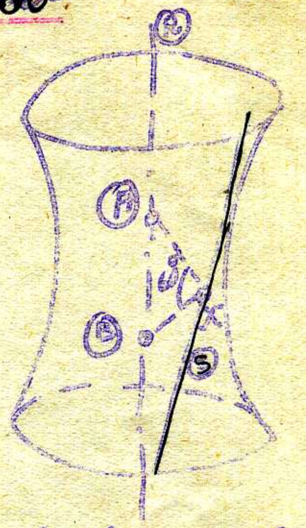


1.º) Considero por un punto $H \in R$ un eje E_1 ⊥ al Hcal y giro R alrededor de E_1 hasta que quede ∥ al Vcal, es decir giro H_R alrededor de O hasta H_{RG} siendo $\overline{OH_{RG}}$ ∥ a L.T.

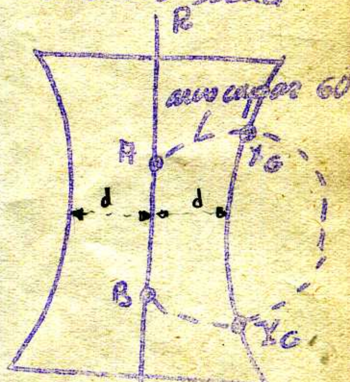
Uno H_G con V → R_1

2.º) Considero un nuevo eje E_2 por $N \in R_1$ ⊥ al Vcal y giro R_1 alrededor de E_2 hasta quede de punta respecto al al Hcal es decir hasta que toda la proyección Hcal coincida en un punto R_G

se cruzan, calcular dos puntos de S desde los cuales se vea el segmento AB de la recta R bajo 60°



1.º) Calculamos la intersección del hiperboloide por un plano α que contenga a R dando una intersección que habrá que calcular como en la figura En la que la distancia d será la m.d. de R y S



2.º) En el abatimiento de α calculo los puntos X_G, e Y_G, según el arco capaz de 60° como indica la fig

3.º) Por X_G paso P ⊥ a E ¿ R

4.º) Int $\left\{ \begin{matrix} P \\ S \end{matrix} \right. \rightarrow X_G$

5.º) Por Y_G paso ⊥ a E ¿ R → Q

6.º) Int $\left\{ \begin{matrix} Q \\ S \end{matrix} \right. \rightarrow Y_G$

Cono director en giros de rectas que se cruzan

La recta R que gira alrededor de un eje E.

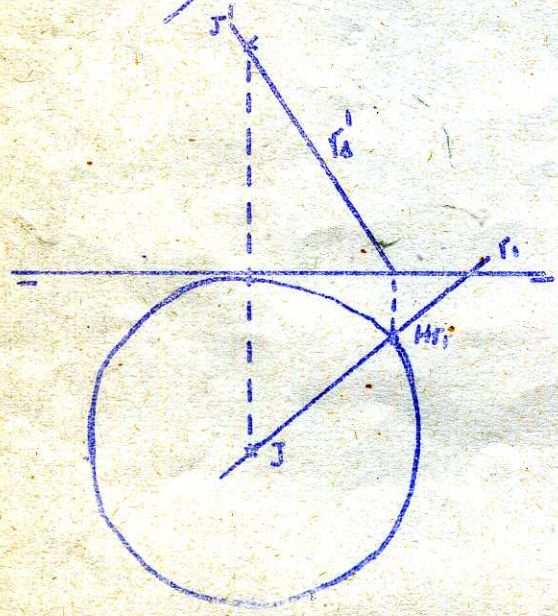
El cono director se forma así:

1º) Se toma un punto J aleatorio y por él se traza una recta $r_1 \parallel R$

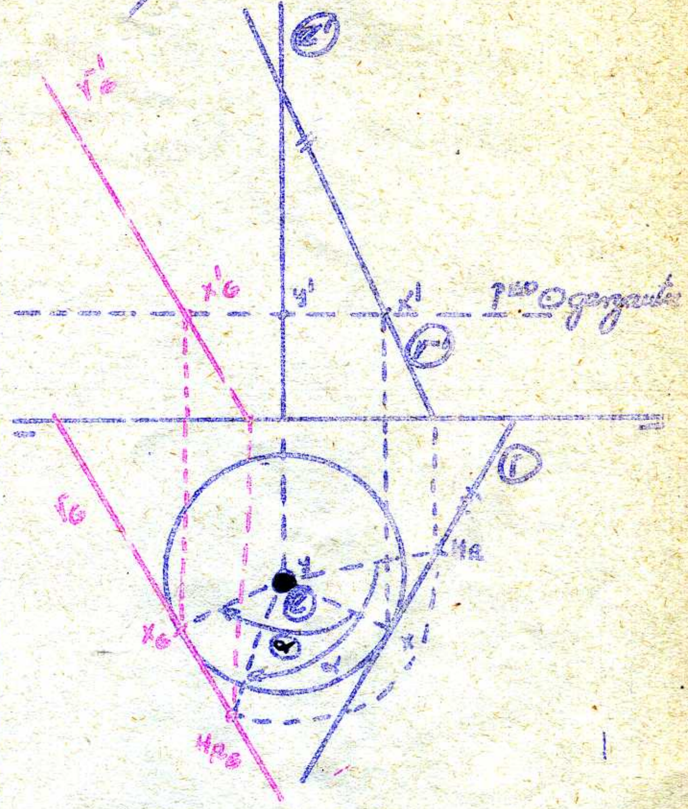
2º) Por J trazamos una circunferencia de radio la distancia de J al punto H de la recta r_1

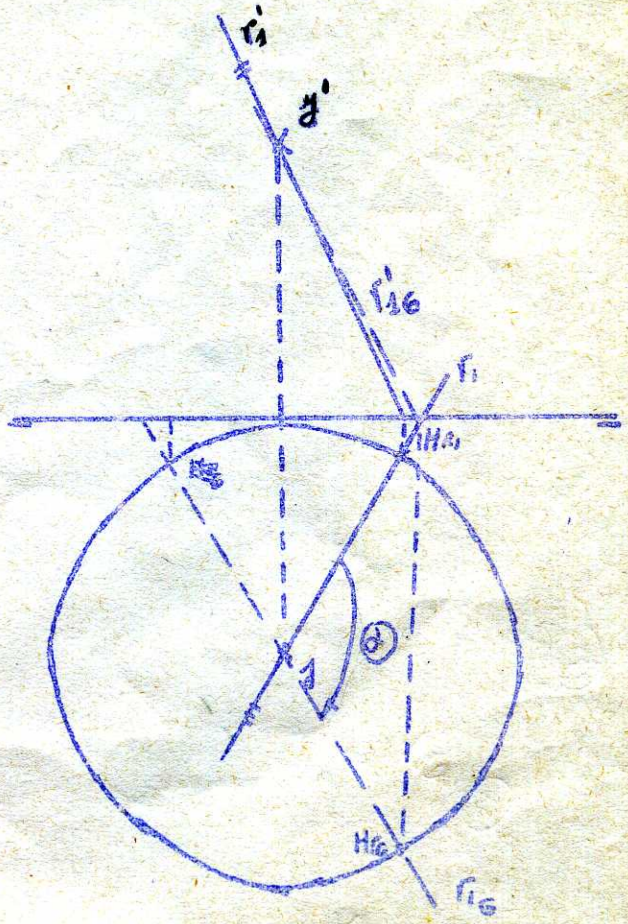
3º) La circunferencia más el punto J nos define el cono

4º) Cualquier recta r_{G_1} tendrá su punto H sobre la ⊙ y pasará por J luego nos determinará las direcciones de r_G en el hiperboloide

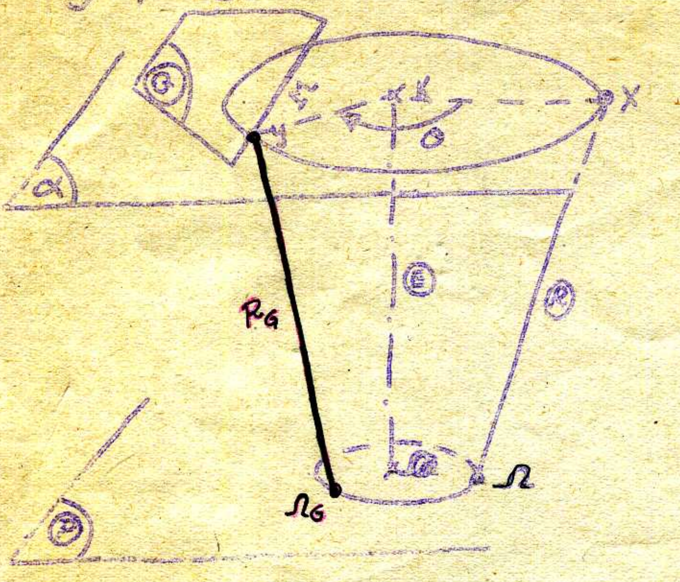


6º Por una recta R alrededor de E al que no corta un ángulo α en sentido dextrorsum (agujas) y comprobar por cono director





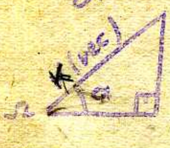
Girar la recta R alrededor de E hasta que delimite K en entre los pasos P y Q siendo P ⊥ a E



1º) Calculo el angulo que forman R y P → α.

Int $\begin{cases} R \\ P \end{cases} \to \Omega$

2º) Según fig. Calculo Ωx



→ x

3º) Por x paso α ∥ a P

4º) Int $\begin{cases} Q \\ \alpha \end{cases} \to M$ $\begin{cases} E \\ \alpha \end{cases} \to K$

5º) Abato α $\begin{cases} x \to x_1 \\ K \to K_1 \\ M \to M_1 \end{cases}$ O centro

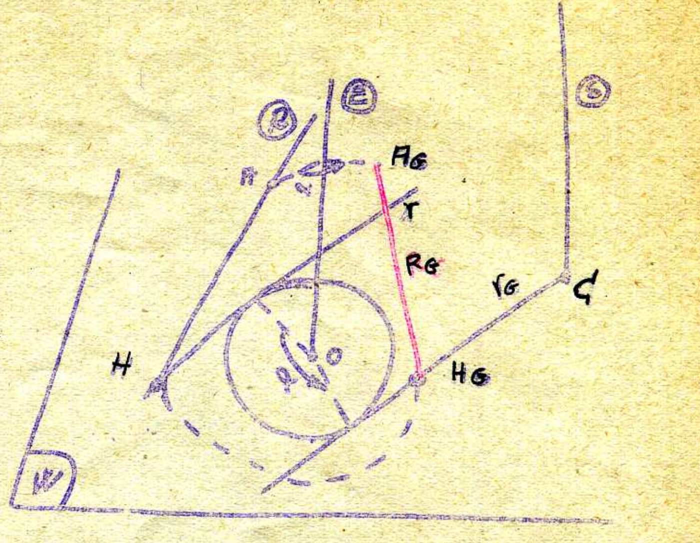
K_1 con $r = x_1K_1$ que corta a M_1 en J_1 (Anoto el angulo θ y su sentido)

6º) Int $\begin{cases} E \\ P \end{cases} \to O$

7º) Abato P $\begin{cases} \Omega \to \Omega_1 \\ O \to O_1 \end{cases}$ O centro O_1 y radio $O_1\Omega_1$ giro un angulo θ en el mismo sentido → Ω_G

8º) Uno Ω_G con Y → R_G

Girar la recta R alrededor de E al que no corta hasta que corte a una recta S ∥ a E



1º) Por O ∈ E paso W ⊥ a E

2º) Int $\begin{cases} W \\ R \end{cases} \to H$ $\begin{cases} W \\ S \end{cases} \to C$

3º) Calculo r proyectando R sobre W

4º) Abato W $\begin{cases} r \to r_1 \\ O \to O_1 \\ C \to C_1 \end{cases}$ O centro O_1 tg a r_1 y desde C_1 tg a O − r_{G1}

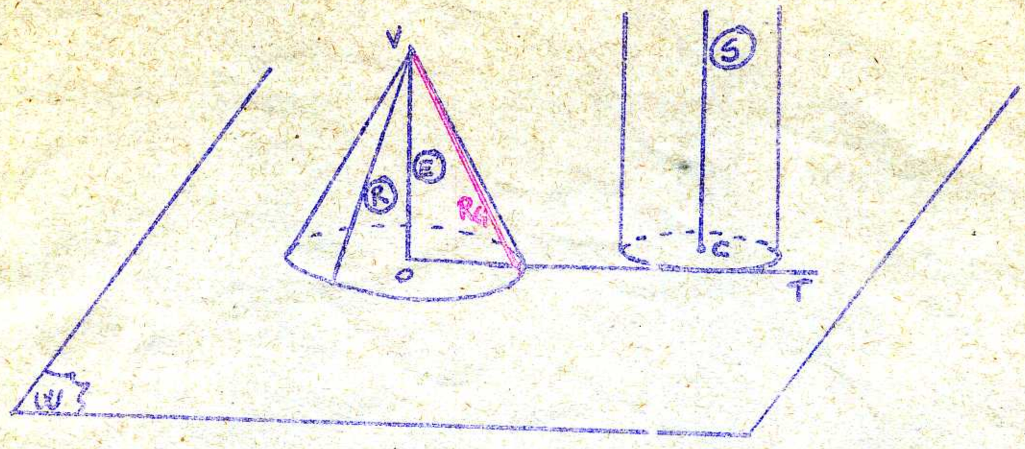
5º) En el abatimiento calculo el angulo α girado y giro H el mismo angulo y en el mismo sentido → H_G

6º) Cojo otro punto cualquiera M de R, lo giro el mismo angulo y en el mismo sentido obteniendo A_G

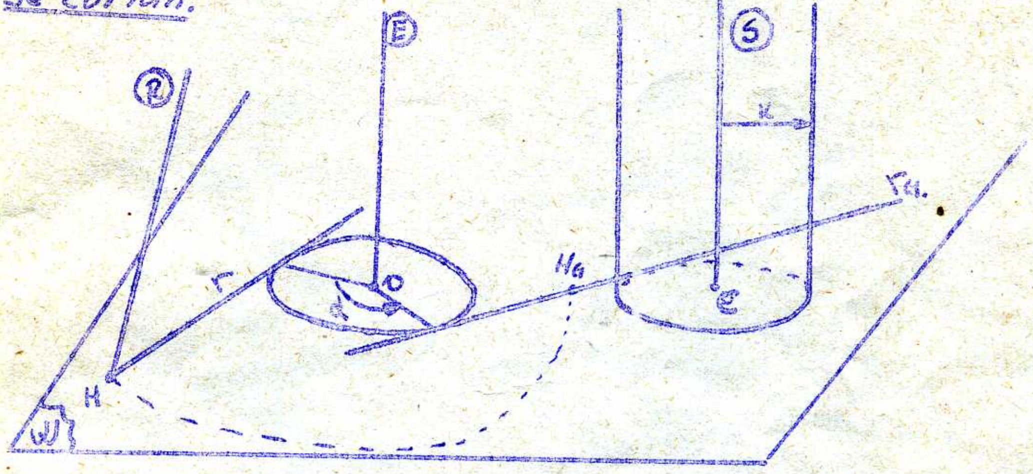
7º) Uno A_G con H_G → R_G

Girar la recta R alrededor del eje E hasta que diste K de S ‖ a E.

R y E se cortan.



R y E no se cortan:



1º) Por O de E plano W ⊥ a E.

2º) Intersección $\left.\begin{matrix}W\\R\end{matrix}\right\} \to H$. $\left.\begin{matrix}W\\S\end{matrix}\right\} \to C$

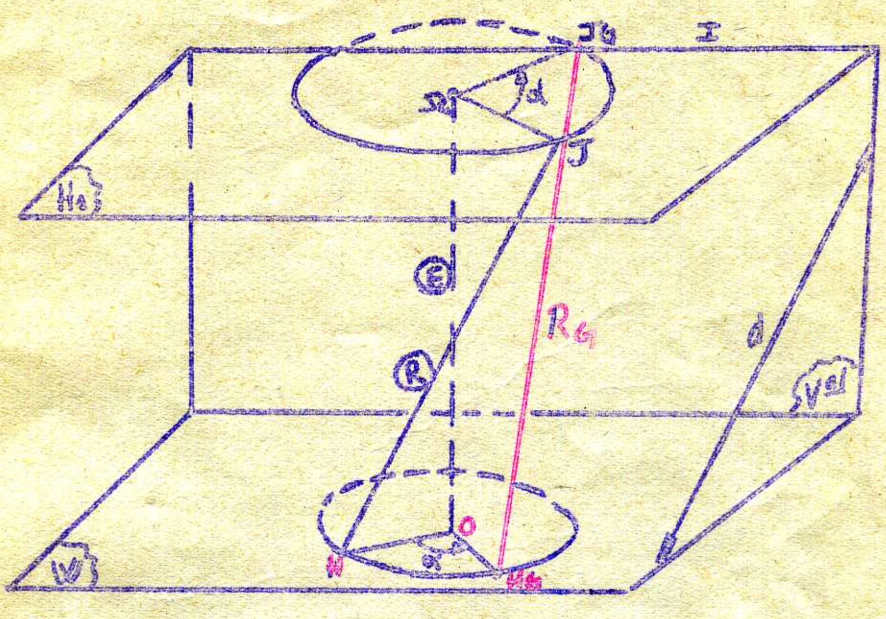
3º) Proyecto R sobre W → r.

4º) Abato W $\left\{\begin{matrix}H \to H_1\\ O \to O_1\\ r \to r_1\\ C \to C_1\end{matrix}\right.$ ⊙ centro O_1 tg a r_1 y ⊙ centro C_1 y $r = K$. Trazo recta r_G tg a ambos ⊙ y calculo el angulo α girado. Giro el H_1 $\hat{\alpha}$ y obtengo H_G.

5º) Tomo otro punto de R y lo giro el mismo angulo y en el mismo sentido

6º) La recta formada por los dos puntos girados es la solución.

Girar una recta R alrededor del eje E hasta que la distancia entre los puntos de corte con el H^{el} y V^{el} valga $\underline{d}$



1°) Calculo el punto H de intersección $\left\{ \begin{matrix} R \\ H^{el} \end{matrix} \right.$

2°) A partir de H llevo $\underline{d}$ sobre R y calculo J

3°) Por J plano H_1 $\perp$ a E en Ω

4°) Intersección de H_1 y $Vrt \rightarrow I$

5°) Por H plano W $\perp$ a E en O.

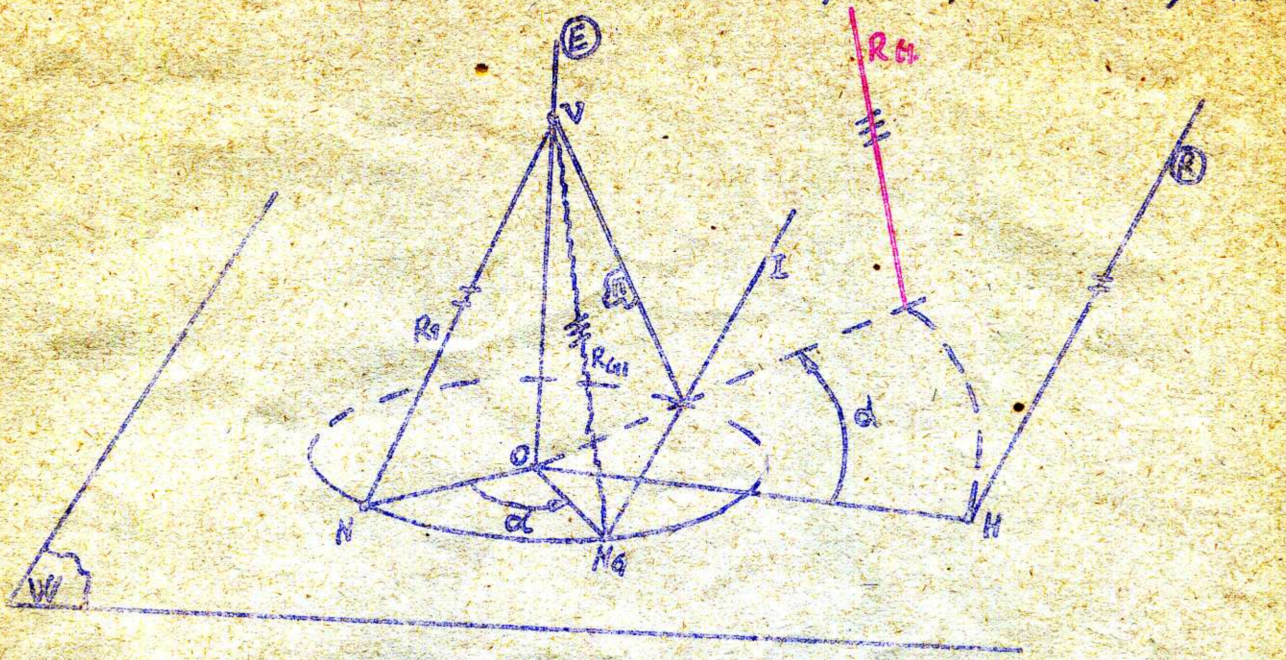
6°) Abato $H_1 \left\{ \begin{matrix} \Omega \rightarrow \Omega_1 \\ I \rightarrow I_1 \\ J \rightarrow J_1 \end{matrix} \right.$ con centro en Ω_1 y radio $r = \overline{\Omega_1 - J_1}$

⊙ que corta a I_1 en I_G, calculando el ángulo α girado

7°) Abato $W \left\{ \begin{matrix} O \rightarrow O_1 \\ H \rightarrow H_1 \end{matrix} \right.$ ⊙ de centro O_1 y radio $O_1 H_1$, giro H_1 el ángulo α en el mismo sentido $\Longrightarrow H_G$.

8°) Uniendo H_G y J_G me da la recta pedida R_G.

Girar la recta R alrededor de E hasta que quede paralela al plano P



1º) Por un punto O que pertenece al eje E

2º) Intersección del plano W y la recta R → punto H

3º) Por un punto cualquiera de E (punto V) trazo una recta R_1 paralela a R

4º) Intersección de W y R_1 punto N.

5º) Por un punto V (del eje E) plano π paralelo a P.

6º) Intersección del plano W y del plano π → recta I

7º) Abato W en el $\begin{cases} O \to O_1 \\ H \to H_1 \\ N \to N_1 \\ I \to I_1 \end{cases}$ con centro O_1 y radio $\overline{O_1 N_1}$

○ que corta a I_1 en N_{1G}.

Calculo el ángulo α girado por N_1.

8º) Giro H_1 el mismo ángulo en el mismo sentido → H_G.

9º) Calculo la dirección VN_G

10º) Por el punto H_G trazo una recta paralela a la dirección $\overline{VN_G}$ dándonos R_G